http://ir.nmu.org.ua/bitstream/handle/123456789/27753/adbc0495e1a50760a5230cbdb971f4a4.pdf?sequence=1. – Дата доступа : 03.02.2016.
2. Экономика БГЭУ [Электронный ресурс] / Понятие оптимизационных задач и оптимизационных моделей. – Режим доступа: http://www.economy-web.org/?p=479. – Дата доступа : 04.02.2016.

УДК 338

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТРАНСПОРТА ДЛЯ ДОСТАВКИ ПРОДУКЦИИ С ВРЕМЕННЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

ДЫМКОВ М.П., БЕНЕДИКТОВИЧ В.И., ДЕМИДЕНКО В.М., КОВАЛЕНКО Н.С.,

БРИЛЕВСКИЙ А.О.

Белорусский государственный экономический университет,

г. Минск, Республика Беларусь

Ключевые слова: целочисленное и смешанное программирование, временные окна.

Реферат: предложены математические сетевые модели для задачи эффективной организации работы транспортных средств по доставке готовой продукции при наличии ограничений типа «временные окна». Дается краткий обзор методов решения некоторых классов задач маршрутизации.

Планирование работы транспортных средств и перевозок в цепи поставок готовой продукции охватывает широкий класс оптимизационных задач, в которых нужно сформировать наборы маршрутов и рейсов транспортных средств (ТС), выполняющих заданное множество заявок на перевозки, и минимизировать выбранную целевую функцию при различных ограничениях. Заявка определяется парой поставщик-заказчик и объемом поставки. Возможны и дополнительные характеристики заявок, определяющие специфику задачи, например, выполнение заказа при заданном графике поставок, количестве однородных либо различной вместимости транспортных средств и других условиях. Критерии выбора маршрутов могут определяться различными целевыми функциями: суммарным временем пробега ТС или длиной пройденного пути; штрафами, накладываемыми при нарушении графика доставки; общим количеством используемых транспортных средств, обеспечивающих выполнение всех поставок [1].

В настоящее время в различных странах проводятся многочисленные исследования в группах логистики, связанных с задачами маршрутизации (Vehicle Routing Problem, в дальнейшем VRP). К настоящему времени широко разработана классификация задач VRP, созданы библиотеки тестовых данных, разработаны многочисленные методы решения для различных модификаций VRP, создаются программные средства для автоматизации для решения названных задач. Постоянно проводится совершенствование подходов к построению точных и приближенных методов ее решения [2,3].

В последние 10–15 лет задача маршрутизации транспортных средств с временными окнами (VRPTW) стала особо пристальной областью многочисленных исследований. В этой задаче у каждого клиента есть окно времени, и между всеми парами клиентов или парой клиент-склад задано время передвижения. Транспортные средства теперь обладают дополнительным ограничением, состоящим в том, что обслуживание клиентов может быть начато только в определенных окнах времени для каждого клиента. Также возможно прибытие транспортного средства заранее до открытия окна времени конкретного клиента, но тогда транспортное средство должно ожидать, пока не начнется обслуживание клиента в рамках его окна времени.

В задаче VRPTW задан парк однородных транспортных средств (обозначим его через V), множество клиентов C и ориентированный граф G. Граф G состоит из $|C|+2$ вершин, где клиенты обозначены вершинами 1; 2;...; n, а склады представлены вершиной 0 («исходящий склад») и n+1 («склад возвращения»).

Множество вершин 0; 1;...; n+1 обозначим через N. Множество дуг (обозначим его через A)

представляет собой связи между складом и клиентами и между самими клиентами. Заметим, что никакая дуга не заканчивается в вершине 0, и никакая дуга не исходит из вершины n+1. С каждой дугой ($i; j$), где $i \neq j$, мы связываем стоимость c_{ij} и время t_{ij}, которое может включать время обслуживания клиента i.

Каждое транспортное средство обладает грузоподъемностью q и каждый клиент i – требованием d_i. У каждого клиента i есть временное окно [$a_i; b_i$], которое означает следующее. Транспортное средство должно прибыть к клиенту прежде времени b_i. Оно может прибыть также прежде времени a_i, но тогда до этого времени клиент не будет обслуживаться. У склада также есть временное окно [$a_0; b_0$] (окна времени для обоих складов, как предполагается, одинаковы). Интервал [$a_0; b_0$] называют горизонтом планирования. Транспортные средства не могут покинуть склад прежде времени a_0 и должны вернуться на склад не позже времени b_{n+1}.

Предполагается, что $q; a_i; b_i; d_i; c_{ij}$ – неотрицательные целые числа, в то время как t_{ij} являются положительными целыми числами (причины этого предположения имеют технический характер). Также предполагается, что для значений c_{ij} и t_{ij} выполняется неравенство треугольника в силу евклидовой метрики графа G.

Модель содержит два набора переменных x и s, которые требуется найти. Для каждой дуги ($i; j$), где $i \neq j$; $i \neq n$+1; $j \neq 0$, и каждого транспортного средства k определим бинарные переменные x_{ijk} следующим образом:

$$x_{ijk} = \begin{cases} 0, \text{ если транспортное средство } k \text{ не следует из вершины } i \text{ в вершину } j, \\ 1, \text{ если транспортное средство } k \text{ следует из вершины } i \text{ в вершину } j, \end{cases}$$

Вещественная переменная решения s_{ik} определяется для каждой вершины i и каждого транспортного средства k и обозначает время, когда транспортное средство k начинает обслуживать клиента i. В случае, если данное транспортное средство k не обслуживает клиента i, то полагаем, что $s_{ik} = 0$. Также полагают $a_0 = 0$ и поэтому $s_{0k} = 0$ для каждого k. Требуется проложить минимальные по стоимости маршруты для каждого транспортного средства, такие что каждый клиент обслуживается в точности один раз, каждый маршрут начинается в вершине 0 и заканчивается в вершине n+1, соблюдаются временные окна для каждого клиента и ограничения по грузоподъемности. Теперь можно дать математическую формулировку задачи VRPTW следующим образом:

$$\min \sum_{k \in V} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ijk}, \qquad (1)$$

при следующих ограничениях:

$$\sum_{k \in V} \sum_{j \in N} x_{ijk} = 1, \forall i \in C \qquad (1.2)$$

$$\sum_{i \in C} d_i \sum_{j \in N} x_{ijk} \leq q, \forall k \in V \qquad (1.3)$$

$$\sum_{j \in N} x_{0jk} = 1, \forall k \in V \qquad (1.4)$$

$$\sum_{i \in N} x_{ihk} - \sum_{j \in N} x_{hjk} = 0, \forall h \in C, \forall k \in V \qquad (1.5)$$

$$\sum_{i \in N} x_{i,n+1,k} = 1, \forall k \in V \qquad (1.6)$$

$$s_{ik} + t_{ij} - K(1 - x_{ijk}) \leq s_{jk}, \forall i, j \in N, \forall k \in V \qquad (1.7)$$

$$a_i \leq s_{ik} \leq b_i, \forall i \in N, \forall k \in V \qquad (1.8)$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\}, \forall i, j \in N, \forall k \in V \qquad (1.9)$$

Ограничения (1.2) означают, что каждого клиента посещают в точности один раз, а ограничения (1.3) означают, что никакое транспортное средство не может быть загружено больше, чем позволяет его грузоподъемность. Следующие три уравнения (1.4), (1.5) и (1.6) гарантируют, что каждое транспортное средство начинает движение со склада 0, после достижения очередного клиента транспортное средство покидает его снова, и, наконец, достигает склада n+1. Неравенства (1.7) означают, что транспортное средство k не может достигнуть клиента j прежде времени $s_{ik} + t_{ij}$, если оно едет от i до j. Здесь K обозначает достаточно большое число. Наконец ограничения (1.8) гарантируют, что соблюдаются временные окна, а (1.9) – ограничения на бинарность переменных x_{ijk}. Отметим, что неиспользованное транспортное средство может быть смоделировано, введя «пустой» маршрут (0; n +1).

Как отмечалось ранее, задача VRPTW является обобщением и TSP и VRP. В случае, если временные ограничения ((1.7) и (1.8)) не рассматриваются, проблема VRPTW превращается в задачу VRP. Это может быть достигнуто также, положив $a_i = 0$ и $b_i = M$ (где M – большое число) для всех клиентов i. Если доступно только одно транспортное средство, задача превращается в задачу TSP. Если доступно больше транспортных средств и дополнительно $c_{0j} = 1;\ j \in C$ и $c_{ij} = 0$, мы получаем задачу упаковки. Поскольку порядок, в котором мы посещаем клиентов, становится неважным (благодаря «свободным» маршрутам), целью становится загрузить как можно большим количеством продукции как можно меньшее число транспортных средств. Наконец, когда мы удаляем ограничения на грузоподъемность (1.3), проблема становится задачей о кратчайшем пути с временными окнами и ограничениями на грузоподъемность для каждого транспортного средства, состоящей в нахождении кратчайшего пути со склада и обратно на склад, который не нарушает ограничений по времени и грузоподъемности и посещает клиентов на маршруте не больше одного раза.

Для решения данной проблемы в настоящее время существует четыре метода: динамическое программирование, метод декомпозиции Данцига-Вольфа (с процедурой генерации столбцов), метод декомпозиции Лагранжа и непосредственное переборное решение задачи в ее классической формулировке. В настоящее время алгоритмы, которые используют метод Данцига-Вольфа, дали наилучшие результаты. В методе Данцига-Вольфа исходная задача подразделена на две задачи: «мастер-задачу» и «подзадачу». Мастер-задача является релаксационной задачей разбиения множества, которая гарантирует, что каждого клиента посетят в точности один раз, в то время как подзадача является задачей кратчайшего пути с дополнительными ограничениями (грузоподъемность и временные окна). Используя мастер-задачу, для каждой дуги естественно возникающего ориентированного графа вычисляются приведенные затраты, и эти затраты затем используются в подзадаче, чтобы найти маршруты со склада и обратно на склад. Улучшенные маршруты затем возвращаются к мастер-задаче и служат входными данными для релаксационной задачи разбиения множества. Поскольку проблема разбиения множества ослаблена путем удаления ограничений на целочисленность, то решение редко является целочисленным, поэтому метод Данцига-Вольфа использует технику, основанную на сечениях.

Литература:

1. Дымков М.П., (в соавторстве: Демиденко В.М., Брилевский А.О). Лексикографический подход к решению неоднородных задач маршрутизации транспортных средств товаропроводящих сетей большой размерности // Экономика, моделирование, прогнозирование: Сб. науч. тр. / Ред. Коллегия: М.К. Кравцов (гл. ред.) [и др.]. – Минск: НИЭИ Министерства экономики РБ, 2013. – Вып. 7. – С. 112-119.
2. T.K. Ralphs, L. Kopmanf, W.R. Pulleyblank and L.E. Trotter, Jr. On the Capacitated Vehicle Routing Problem. Research Report, School of OR&IE, Cornell University, Ithaca, NY 14853. 2001. P.1–19.
3. J. Carlsson, D. Ge, A. Subramaniam, A. Wu and Y. Ye. Solving Min-Max Multi-Depot Vehicle Routing Problem. Research Report, Stanford University, Stanford, CA 94305, SA. P. 1–22.