УДК 517.9

ОПТИМИЗАЦИЯ НОРМЫ ФУНКЦИИ P(Z)=1/Z+C НА ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

СИЛИВОНЧИК В.В., старший преподаватель

Витебский государственный технологический университет,
г. Витебск, Республика Беларусь

Ключевые слова: комплексный полином, норма, параметр, оптимизация, минимальное значение.

Реферат: математические модели реальных инженерных задач часто имеют вид различного рода оптимизационных задач или задач, решение которых может проводиться при помощи вычислительных процессов, зависящих от одного или нескольких параметров. Значения этих параметров существенно влияют на поведение процесса, что приводит к задаче оптимизации указанных параметров. В статье рассматривается нахождение оптимального значения комплексного параметра, которое может быть использовано для построения хорошо сходящегося итерационного процесса.

Функция $P(z)=\frac{1}{z}+c$ рассматривается на замкнутом подмножестве комплексной плоскости M. Норма функции определяется равенством

$$\| P(z)\|_M = \max_{x\in M} |P(z)|.$$

Норма зависит от параметра c и требуется найти значение параметра, минимизирующее значение нормы. Это оптимальное значение параметра обозначим через c_M^*, а минимальное значение нормы – через r_M^*. Тогда

$$P_M^*(z)=\frac{1}{z}+c_M^*,\ r_M^*=\min_c \| P(z)\|_M = \| P_M^*(z)\|_M = \| \frac{1}{z}+c_M^* \|_M .$$

Ниже будут рассмотрены три случая: 1) M состоит из двух точек z_1, z_2; 2) M является отрезком, не содержащем точку $z=0$; 3) M является прямоугольником, не содержащем точку $z=0$.

Минимизация нормы на двухточечном множестве.

Предложение 1. Пусть $M=M_1=\{z_1;z_2\}$ $(z_1\neq z_2)$. Тогда

$$c_{M_1}^* = -\frac{z_1+z_2}{2z_1z_2}|,\ r_{M_1}^* = \frac{|z_1-z_2|}{2|z_1z_2|}. \tag{5}$$

Доказательство. Воспользуемся достаточным условием оптимальности параметра c, состоящем в разрешимости системы условий:

$$\lambda_1(\frac{1}{z_1}+c)+\lambda_2(\frac{1}{z_2}+c)=0,\quad |\frac{1}{z_1}+c|=|\frac{1}{z_2}+c|,\quad \lambda_1+\lambda_2=1;\ \lambda_1,\lambda_2>0 \tag{6}$$

Система легко решается. В силу второго условия $\lambda_1=\lambda_2=1/2$. Тогда:

$$c=-\frac{1}{2}(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2})=-\frac{z_1+z_2}{2z_1z_2},\ \min_c \| P(z)\|_{M_1} = |P_{M_1}^*(z_1)| = |\frac{1}{z_1}-\frac{z_1+z_2}{2z_1z_2}| = \frac{|z_1-z_2|}{2|z_1z_2|}.$$

Обозначим минимальную норму знаком $r_{M_1}^*$. Получаем равенства (5).

Минимизация нормы на отрезке $[z_1;z_2]$.Пусть

$M_1=\{z_1;z_2\}$, ,$M_2=[z_1;z_2]$ $(z_1\neq z_2,\ 0\notin[z_1;z_2])$. Решим задачу оптимизации на множестве M_1 и получим оптимальные параметры $c_{M_1}^*$ и $r_{M_1}^*$ по формулам (5). Рассмотрим линию уровня

$|P^*_{M_1}(z)|=r^*_{M_1}$ или $|\dfrac{1}{z}+c^*_{M_1}|=r^*_{M_1}$. Преобразовав, получаем уравнение окружности

$$|1+c^*_{M_1}z|=r^*_{M_1}|z| \text{ или}$$

$$1+c^*_{M_1}z+\bar{c}^*_{M_1}\bar{z}+(|c^*_{M_1}|^2-r^{*\,2}_{M_1})|z|^2=0 \tag{7}$$

Возможны три различных случая: $|c^*_{M_1}|=r^*_{M_1}$, $|c^*_{M_1}|<r^*_{M_1}$, $|c^*_{M_1}|>r^*_{M_1}$.

Предложение 2. Если $|c^*_{M_1}|=r^*_{M_1}$ (это значит, что $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$), то справедливы равенства:

$$c^*_{M_2}=c^*_{M_1}=-\frac{z_1+z_2}{2z_1z_2}|,\ r^*_{M_2}=r^*_{M_1}=\frac{|z_1-z_2|}{2|z_1z_2|}=\frac{|z_1+z_2|}{2|z_1z_2|}. \tag{8}$$

Если $|c^*_{M_1}|<r^*_{M_1}$, т.е. $|z_1+z_2|<|z_1-z_2|$, то справедливы равенства:

$$c^*_{M_2}=\frac{\bar{z}_1-\bar{z}_2}{z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1z_2},\ r^*_{M_2}=\frac{|\bar{z}_1-\bar{z}_2|}{|z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1z_2|}. \tag{9}$$

Если $|c^*_{M_1}|>r^*_{M_1}$, т.е. $|z_1+z_2|>|z_1-z_2|$. то справедливы равенства:

$$c^*_{M_2}=c^*_{M_1}=-\frac{z_1+z_2}{2z_1z_2}|,\ r^*_{M_2}=r^*_{M_1}=\frac{|z_1-z_2|}{2|z_1z_2|}. \tag{10}$$

повторяющие равенства (5).

Доказательство проводится анализом поведения линии уровня, имеющей уравнение (7).

Замечание. Если $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$, равенства (9) принимают вид (5), что легко проверяется вычислениями.

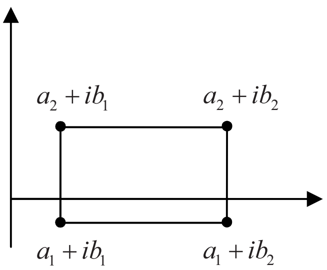

Рисунок 1

Минимизация нормы на прямоугольнике. Пусть M_3 – прямоугольник с вершинами z_1,z_2,z_3,z_4. Поворотом системы координат всегда можно добиться того, чтобы прямоугольник лежал в правой полуплоскости и пересекался с первой четвертью (рисунок 1). Поэтому без ограничения общности считаем

$$z_1=a_1+ib_1, z_2=a_1+ib_2, z_3=a_2+ib_1, z_4=a_2+ib_2;$$
$$a_2>a_1>0,\ b_2>b_1,\ b_2>0.$$

Далее дадим сводку результатов без доказательства.

Предложение 3. Если $|z_1+z_2|\le|z_1-z_2|$, то:

$$c^*_{M_3}=\frac{\bar{z}_1-\bar{z}_2}{z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1z_2},\ r^*_{M_3}=\frac{|\bar{z}_1-\bar{z}_2|}{|z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1z_2|}. \tag{11}$$

Замечание. Аналогичный результат для стороны $M_2=[z_2;z_3]$ не возможен, так как при наших условиях всегда имеем $|z_2+z_3|>|z_2-z_3|$.

Теперь пусть выполняется неравенство $|z_1+z_2|>|z_1-z_2|$.

Лемма. Следующие два неравенства не могут выполняться одновременно:

$$(a_1^2+b_1b_2)(a_2-a_1)-a_1(b_1-b_2)^2=-|z_2|^2(z_1+\bar{z}_1)+z_1\bar{z}_2z_3+\bar{z}_1z_2\bar{z}_3\le 0, \tag{12}$$

$$(b_1^2+a_1a_2)(b_2-b_1)-b_1(a_1-a_2)^2=-i|z_3|^2(\bar{z}_1-z_1)-iz_1z_2\bar{z}_3+i\bar{z}_1\bar{z}_2z_3\le 0 \tag{13}$$

Замечание. При выполнении условия (12) прямоугольник лежит внутри круга, ограниченного линией $|P^*_{[z_1;z_2]}(z)|=r^*_{[z_1;z_2]}$, при выполнении условия (13) прямоугольник лежит внутри круга, ограниченного линией $|P^*_{[z_1;z_3]}(z)|=r^*_{[z_1;z_3]}$, и это не может происходить одновременно.

Предложение 4. Пусть справедливо неравенство $|z_1+z_2|>|z_1-z_2|$. Если выполняется условие (12), то справедливы равенства:

$$c_{M_3}^* = -\frac{z_1+z_2}{2z_1z_2}|,\ \ r_{M_3}^* = \frac{|z_1-z_2|}{2|z_1z_2|}. \tag{14}$$

Если выполняется условие (13), то справедливы равенства:

$$c_{M_3}^* = -\frac{z_1+z_3}{2z_1z_3}|,\ \ r_{M_3}^* = \frac{|z_1-z_3|}{2|z_1z_3|}. \tag{15}$$

Если оба неравенства (12) и (13) неверны, то есть выполняются два условия:

$$\begin{aligned}&(a_1^2+b_1b_2)(a_2-a_1)-a_1(b_1-b_2)^2 = -|z_2|^2\,(z_1+\overline{z}_1)+z_1\overline{z}_2z_3+\overline{z}_1z_2\overline{z}_3>0,\\ &(b_1^2+a_1a_2)(b_2-b_1)-b_1(a_1-a_2)^2 = -i|z_3|^2\,(\overline{z}_1-z_1)-iz_1z_2\overline{z}_3+i\overline{z}_1\overline{z}_2z_3>0,\end{aligned} \tag{16}$$

то справедливы равенства:

$$c_{M_3}^* = -\frac{\overline{z}_2+\overline{z}_3}{2\operatorname{Re} z_2\overline{z}_3} = -\frac{\overline{z}_1+\overline{z}_4}{2\operatorname{Re} z_1\overline{z}_4},\ \ r_{M_3}^* = \frac{|z_2-z_3|}{2\operatorname{Re} z_2\overline{z}_3} = \frac{|z_1-z_4|}{2\operatorname{Re} z_1\overline{z}_4}. \tag{17}$$

Литература:

1. Трубников, Ю. В. Оптимальные итерационные процессы: монография / Ю. В. Трубников, О. В. Пышненко, И. А. Орехова. – Витебск: ВГУ имени П. М. Машерова, 2011. – 95 с.
2. Иоффе А. Д. Теория экстремальных задач / А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. – Москва: Наука, 1976.– 480 с.

УДК 677.314.022.043.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ НАТЯЖЕНИЯ НИТИ НА КОЛЬЦЕВЫХ ПРЯДИЛЬНЫХ МАШИНАХ В СРЕДЕ MATHCAD

СКУЛАНОВА Н.С., профессор, БАБКИН М.М., магистрант, МАЛИНОВСКИЙ В.В., магистрант, СОБАЛЬКОВА Н.С., магистрант, МИХАЙЛОВА А.А., студент

Московский государственный университет дизайна и технологии, г. Москва, Российская Федерация

Ключевые слова: натяжение, пряжа, прочность, веретено.

Реферат: проведено моделирование натяжения нити при наматывании на кольцевых прядильных машинах по формулам проф. В.П.Щербакова в среде MathCAD. Установлены границы запаса прочности чистошерстяной и полушерстяной пряжи 28 текс для прядильной машины фирмы «Савио» FTC-7L.

Решения задачи о баллонировании нити даны в работах Минакова А.П., Мигушева И.И., Живова В.С. [1]. Изложенные работы известных механиков ограничены исследованием движения и относительного равновесия нити без учета на конце нити бегунка, т.е. груза массы $\mathrm{m_B}$, движущегося с трением по кольцу. Построенная в учебнике по моделированию технологических процессов в текстильной промышленности математическая модель баллона учитывает достаточно полные условия, но принятые допущения, неточности ограничивают точное знание о наматывании на кольцевой прядильной машине.

В работах профессора В.П.Щербакова проведено уточнение формулы для расчета натяжения нити между бегунком и початком с учетом бегунка на конце нити. [1,2,3,4,5]

Для решения задачи о баллонировании и натяжении нити необходимо решить систему уравнений. (1):

$$\mathrm{l} = \int_0^{\mathrm{h}} \sqrt{1+\left(\mathrm{tg}\alpha_0 - 3\mathrm{n}^2\frac{\sin\alpha_0}{3\cos^3\alpha_0}\mathrm{x}^2\right)}\mathrm{dx},\ \mathrm{tg}\alpha_{\mathrm{B}} = \mathrm{tg}\alpha_0 - 3\mathrm{n}^2\frac{\sin\alpha_0}{3\cos^3\alpha_0}\mathrm{h}^2, \tag{1}$$