(сообщение 2) //Вестник Казанского технологического университета. 2015. Т. 18. № 15. С. 167-171.

УДК 517.988

РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

СИЛИВОНЧИК В.В., старший преподаватель

Витебский государственный технологический университет,
г. Витебск, Республика Беларусь

Ключевые слова: алгебраическое уравнение, метод Вейерштрасса, разложение в ряд.

Реферат: практические инженерные задачи, проходя стадию математического моделирования, порождают те или иные чисто математические задачи, например, разного рода уравнения. Поэтому разработка вычислительных алгоритмов решения математических задач представляет интерес для инженерного работника, поскольку расширяет его технические возможности.

В статье рассматривается дифференциальный аналог метода Вейерштрасса одновременного нахождения всех корней произвольного алгебраического уравнения, представляющий собой систему дифференциальных уравнение первого порядка. Указанная система преобразуется к виду, имеющему наглядную интерпретацию. Последний вид удобен для использования разложения решений в степенной ряд, сходимость которого и является главным предметом исследования.

Рассмотрим уравнение:

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0 \tag{1}$$

с комплексной неизвестной z и постоянными комплексными коэффициентами $a_1, \ldots, a_n$. Дискриминант уравнения предполагается произвольным. Добавим в рассмотрение уравнение:

$$z^n + u_1 z^{n-1} + \ldots + u_{n-1} z + u_n = 0 \tag{2}$$

с переменными комплексными коэффициентами $u_1, \ldots, u_n$. Введём обозначения: $A = (a_1, \ldots, a_n)$, $U = (u_1, \ldots, u_n)$, $P_A(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$ и $P_U(z) = z^n + u_1 z^{n-1} + \ldots + u_{n-1} z + u_n$. Тогда уравнения (1) и (2) принимают вид $P_A(z) = 0$ и $P_U(z) = 0$. Дискриминант уравнения обозначаем через $DIS(U)$. Пусть $z_1, \ldots, z_n$ – некоторая упорядоченная запись корней уравнения (2).

Теорема 1. Пусть $U = F(Z)$ – функция, определяемая виетовскими равенствами:

$$\begin{cases} u_1 = -z_1 - \ldots - z_n \\ u_2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + \ldots + z_{n-1} z_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n = (-1)^n z_1 \ldots z_n \end{cases}$$

Если начальное условие Z_0 таково, что для $U_0 = F(Z_0)$ справедливо неравенство $DIS(U(t)) \neq 0$ при $t \geq 0$, где $U(t)$ определяется равенством $U(t) = A + (U_0 - A)e^{-t}$, то можно найти некоторую последовательность корней уравнения (1) – $Z^* = (z_1^*, ..., z_n^*)$ по формуле $\lim\limits_{t \to +\infty} Z(t) = Z^*$, где $Z(t) = \left(z_1(t), ..., z_n(t)\right)$ – решение системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1(t)}{dt} = -\dfrac{P_A(z_1(t))}{P_U'(z_i(t))} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dz_n(t)}{dt} = -\dfrac{P_A(z_n(t))}{P_U'(z_i(t))} \end{cases} \qquad (3)$$

$Z(t) = \left(z_1(t), ..., z_n(t)\right)$ – последовательность с начальным условием $Z(0) = Z_0$ (Здесь штрих означает производную: $P_U'(z) = nz^{n-1} + u_1(n-1)z^{n-2} + \ldots + u_{n-1}$). При этом всех корней уравнения $P_{U(t)}(z) = 0$ и функция $Z(t)$ продолжается в области $t < 0$ в пределах выполнения условия $DIS(U(t)) \neq 0$.

Лемма. После опускания индекса i и замены переменной $\tau = 1 - e^{-t}$ уравнение (3) принимает вид:

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{Q_A(z)}{P_U'(z)}$$

где $Q_A(z) = (a_1 - u_{10})z^{n-1} + \ldots + (a_{n-1} - u_{n-10})z + (a_n - u_{n0})$.

Следствие. Если участок прямой $U = U_0(1-\tau) + A\tau$ при $\tau \in [0;1)$ не пересекает множество нулевого дискриминанта ($DIS(U(\tau)) \neq 0$), то решение $z = z(\tau)$ задачи:

$$\frac{dz}{d\tau} = -\frac{Q_A(z)}{P_U'(z)},\ z(0) = z_0 \qquad (4)$$

существует на всём промежутке $\tau \in [0;1)$. При этом $z = z(\tau)$ является решением уравнения $P_{U(\tau)}(z) = 0$, где $U(\tau) = U_0(1-\tau) + A\tau$.

Теорема 2. Пусть $\alpha < 0$, $\beta > 1$. Если прямая линия $U = U_0(1-t) + At$ не пересекает множество нулевого дискриминанта на интервале $(\alpha;\beta)$, ($DIS(U(t)) \neq 0, t \in (\alpha;\beta)$), и z_0 некоторое решение уравнения $P_{U_0}(z) = 0$, то решение задачи (4) продолжается на весь интервал $(\alpha;\beta)$ и является решением уравнения $P_{U(t)}(z) = 0$. Соответственно $z^* = z(1)$ является решением уравнения $P_A(z) = 0$.

Теорема 3. Если прямая линия $U = U_0(1-t) + At$ не пересекает множество нулевого дискриминанта на интервале $(\alpha;\beta)$, содержащем точку $t = 0$ ($DIS(U(t)) \neq 0, t \in (\alpha;\beta)$), и z_0 некоторое решение уравнения $P_{U_0}(z) = 0$, то решение $z = z(t)$ задачи (4), продолженное на интервал $(\alpha;\beta)$, является аналитичным на этом интервале.

Теорема 4. Если множество $U(\zeta) = U_0(1-\zeta) + A\zeta$ (ζ – комплексная переменная) не пересекает множество нулевого дискриминанта при $|\zeta| \leq 1$ ($U(\zeta) \neq 0, |\zeta| \leq 1$), и z_0 некоторое решение уравнения $P_{U_0}(z) = 0$, то решение $z = z(t)$ задачи (4), раскладывается в степенной ряд по переменной t при $|t| \leq 1$. В частности при $t = 1$ получаем представление решения уравнения (1) – $z^* = z(1)$ – в виде суммы абсолютно сходящегося ряда.

Литература:

1. Трубников, Ю. В. Оптимальные итерационные процессы: монография / Ю. В. Трубников, О. В. Пышненко, И. А. Орехова. – Витебск: ВГУ имени П. М. Машерова, 2011. – 95 с.