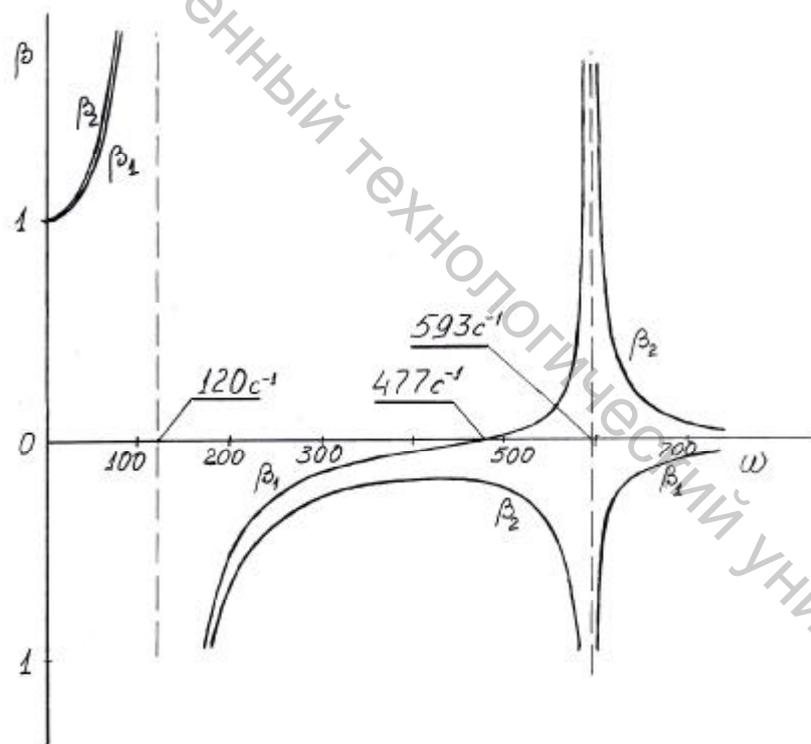


А.А.КАЛИНИН , В.В.ПЕТУХОВ

# КОЛЕБАНИЯ УПРУГОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

курс лекций



Витебск  
ВГТУ  
2009

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ  
"ВИТЕБСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ"**

КАЛИНИН А.А. ПЕТУХОВ В.В.

**КОЛЕБАНИЯ  
УПРУГОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ**

**КУРС ЛЕКЦИЙ**

**для студентов специальности 1-360801**

**"Машины и аппараты легкой, текстильной промышленности и  
бытового обслуживания"  
дневной формы обучения**

**ВИТЕБСК  
2009**

УДК 534.121  
ББК 22.323  
К17

**Рецензент :**

Сункуев Б.С., доктор технических наук, заведующий кафедрой "Машины и аппараты лёгкой промышленности"

Рекомендовано в качестве учебного пособия редакционно-издательским советом УО"ВГТУ", протокол № 9 от 29.12.2008.

**Калинин, А.А., Петухов, В.В. Колебания упругой системы с двумя степенями свободы : курс лекций / А.А. Калинин, В.В. Петухов – Витебск: УО"ВГТУ", 2009. – 69с.**

**ISBN 978–985–481–138–3**

В курсе лекций рассмотрены свободные затухающие и вынужденные колебания упругой системы с одной степенью свободы и системы с конечным числом степеней свободы. Приведено описание расчетно-графической работы, выполняемой студентами специальности 1-360801 "Машины и аппараты лёгкой, текстильной промышленности и бытового обслуживания".

**УДК 534.121  
ББК 22.323  
К 17**

**ISBN 978–985–481–138–3**

© Калинин А.А., Петухов В.В., 2009  
© УО"ВГТУ", 2009

## Содержание

<b>Введение</b> .....	<b>4</b>
<b>Лекция 1</b> .....	<b>5</b>
<b>1. Колебания упругой системы с одной степенью свободы</b> .....	<b>5</b>
1.1.Свободные колебания.....	5
1.2.Затухающие колебания.....	8
<b>Лекция 2</b> .....	<b>9</b>
1.3.Вынужденные колебания.....	9
<b>Лекция 3</b> .....	<b>16</b>
1.4.Учет массы упругих элементов.....	16
<b>Лекция 4</b> .....	<b>22</b>
<b>2.Колебания стержневой системы с конечным числом степеней свободы</b> .....	<b>22</b>
2.1.Свободные колебания.....	22
<b>Лекция 5</b> .....	<b>32</b>
2.2.Уравнения Лагранжа.....	32
<b>Лекция 6</b> .....	<b>42</b>
2.3.Учет массы гибких элементов стержневой системы.....	42
<b>Лекция 7</b> .....	<b>45</b>
<b>3.Пример расчетно-графической работы</b> .....	<b>45</b>
3.1.Задание.....	45
3.2.Геометрические характеристики сечений.....	47
3.3.Характеристики инертности стержней.....	49
3.4.Построение упрощенной модели.....	49
3.5.Уравнение упругой линии стержней АВ и CD.....	50
3.6.Потенциальная энергия упругой деформации.....	52
3.7.Кинетическая энергия системы.....	54
3.8.Уравнения Лагранжа.....	54
3.9.Частотное уравнение.....	54
<b>Лекция 8</b> .....	<b>57</b>
3.10.Учет массы гибких стержней АВ и CD.....	57
<b>Лекция 9</b> .....	<b>59</b>
<b>4. Вынужденные колебания стержневой системы</b> .....	<b>59</b>
<b>5. Задание к расчетно-графической работе</b> .....	<b>64</b>
<b>Рекомендуемая литература</b> .....	<b>69</b>

## Введение

С основами теории колебания студенты-механики познакомились в курсах математики, физики и теоретической механики. Тем не менее, ограничиваясь лишь изучением механических колебаний упругих систем при линейной восстанавливающей силе, считаем необходимым напомнить основные положения теории колебаний.

В предлагаемом курсе лекций рассмотрены свободные, затухающие и вынужденные колебания системы с одной степенью свободы и системы с конечным числом степеней свободы. При исследовании колебаний стержневых систем рассмотрено построение расчетной схемы на базе упрощенной модели системы, а также учет массы упругих элементов.

Студенты специальности 1-360801 "Машины и аппараты легкой, текстильной промышленности и бытового обслуживания" в четвертом семестре на базе одного задания выполняют три расчетно-графические работы по исследованию колебаний конструкции, схема которой принципиально схожа со схемой корпуса швейного полуавтомата.

В первой расчетно-графической работе определяются необходимые характеристики жесткости элементов конструкции и характеристики их инертности. По результатам вычислений строится упрощенная модель конструкции и вводятся обобщенные координаты.

Во второй расчетно-графической работе по введенным обобщенным координатам составляются уравнения упругой линии гибких стержней и определяются кинетическая энергия системы и потенциальная энергия упругой деформации.

В третьей расчетно-графической работе составляются уравнения Лагранжа второго рода и частотное уравнение, находятся резонансные частоты и строятся главные формы колебаний.

Приводится пример выполнения расчетно-графической работы с краткими пояснениями.

## Лекция 1

# 1. КОЛЕБАНИЯ УПРУГОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

## 1.1. Свободные колебания

Наиболее простым примером колебательного движения является прямолинейное движение материальной точки при восстанавливающей силе, пропорциональной отклонению точки от положения равновесия (рис. 1.1)

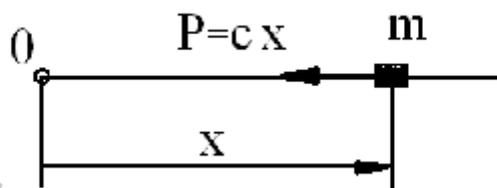


Рис. 1.1

Физическая природа восстанавливающей силы может быть различной. Например, таковой может являться реакция невесомой упругой связи. Тогда коэффициент пропорциональности  $C$  характеризует жесткость этой связи, т.е. он равен силе, которую нужно приложить к связи для того, чтобы получить перемещение материальной точки, равное единице.

Дифференциальное уравнение движения материальной точки имеет вид

$$m\ddot{x} = -cx,$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \quad (1.1)$$

где

$$k^2 = \frac{c}{m}. \quad (1.2)$$

Общее решение уравнения (1.1) представляется в виде

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (1.3)$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  зависят от начальных условий, то есть от начального положения материальной точки и от ее начальной скорости. Они определяются координатой  $x$  и значением производной  $\dot{x}$  в момент времени  $t_0 = 0$ .

$$x_0 = x(0); \quad V_0 = \dot{x}(0).$$

Простой подстановкой найдем

$$C_1 = x_0; \quad C_2 = \frac{V_0}{k}.$$

Теперь общее решение (1.3) представляется в виде

$$x = x_0 \cos kt + \frac{V_0}{k} \sin kt.$$

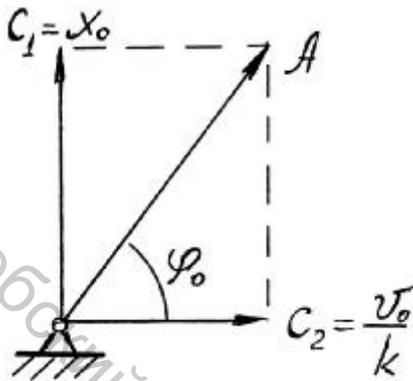


Рис. 1.2

Это решение имеет следующую геометрическую интерпретацию. Рассмотрим равномерное вращательное движение системы двух взаимно перпендикулярных жестко связанных друг с другом векторов  $C_1$  и  $C_2$ . Их сумма представлена вектором  $A$ .

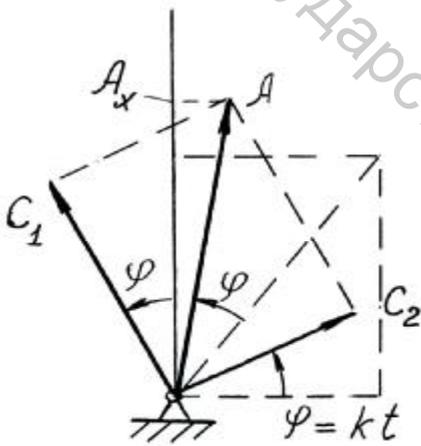


Рис 1.3

Его модуль  $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{V_0^2}{k^2}}.$  (1.4)

Начальное положение вектора  $A$ , показанное на рисунке 1.2, определено углом

$$j_0 = \arctg \frac{x_0 k}{V_0}.$$

На рисунке 1.3 показано положение системы в текущий момент  $t$ . При равномерном вращении системы с угловой скоростью, равной  $k$ , угол поворота ее  $j = kt$ .

Проекция вектора  $A$  на ось  $x$  равна сумме проекций на ось  $x$  ее составляющих

$$A_x = C_{1x} + C_{2x} = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Это выражение совпадает с выражением (1.3).

В то же время

$$x = A_x = A \sin(kt + j_0). \quad (1.5)$$

В некоторых случаях исследование колебательного движения удобнее производить с помощью выражения (1.5).

Коэффициент  $A$  равен наибольшему значению координаты  $x$ , т.е. координате  $x$  при наибольшем отклонении материальной точки от положения равновесия. Это есть амплитуда колебаний.

Амплитуда колебаний зависит от начальных условий  $(x_0, V_0)$  и параметра  $k^2$ , а значит от жесткости упругой связи  $C$  и инертности колеблющейся точки.

Аргумент  $(kt + j_0)$  называется фазой колебаний, а  $j_0$  - начальной фазой.

Время одного оборота вектора  $A$  называется периодом колебаний

$$T = \frac{2\pi}{k}.$$

Период колебаний равен промежутку времени, по истечении которого движение точки полностью повторяется. Величина, обратная периоду колебаний, называется частотой колебаний

$$g = \frac{1}{T}.$$

Она измеряется герцами – числом колебаний за одну секунду.

Параметр  $k$ , равный угловой скорости вращения системы векторов, изображенных на рисунке 1.3, называется круговой (циклической) частотой. Она измеряется числом радиан в секунду и равна числу колебаний за  $2\pi$  секунд.

В курсе сопротивления материалов исследуется не столько движение материальной точки, сколько состояние упругой связи. Исследуя состояние упругой связи уравнение (1.1) можно получить иным путем.

Упругое перемещение  $u$  при статическом нагружении упругой системы силой  $f$  равно

$$u = d_{11}f.$$

Здесь  $d_{11}$  - отклонение материальной точки от положения равновесия под действием силы, равной единице.

Теперь воспользуемся принципом Даламбера и положим

$$f = -m\ddot{u}$$

Тогда 
$$u = d_{11}(-m\ddot{u}), \tag{1.6}$$

или

$$\ddot{u} + \frac{1}{d_{11}m}u = 0.$$

Это уравнение совпадает с уравнением (1.1). Таким образом, циклическая частота свободных колебаний определяется по формуле

$$k^2 = \frac{1}{d_{11}m}. \tag{1.7}$$

Эта формула практически не отличается от формулы (1.2), так как жесткость  $C$  и единичное перемещение связаны соотношением

$$c = \frac{1}{d_{11}}.$$

Тем не менее, такой подход к составлению уравнений колебаний во многих случаях оказывается более удобным, нежели при использовании жесткости упругой связи.

## 1.2. Затухающие колебания

При колебаниях реальной конструкции всегда существуют силы, которые препятствуют движению, что приводит к постепенному уменьшению амплитуды и затуханию колебаний.

К силам, препятствующим движению, следует отнести силы трения в кинематических парах, силы сопротивления воздуха или вязкой среды, а также внутренние силы неупругого сопротивления. По гипотезе Фойгта для учета внутренних сил сопротивления движению следует рассматривать материал колеблющейся балки как упруго вязкий. Напряжения в нем зависят не только от деформации  $\epsilon$ , но и от скорости изменений деформации.

$$s = \epsilon E + cE \frac{\partial \epsilon}{\partial t}.$$

Здесь  $c$  - коэффициент вязкого трения. По гипотезе Фойгта силы внутреннего сопротивления приводятся к внешней силе

$$R = -m \frac{du}{dt}.$$

С учетом силы  $R$  уравнение (1.6) принимает вид

$$u = d_{11}(f + R) = d_{11}(-m\ddot{u} - m\dot{u}). \quad (1.8)$$

Преобразуем уравнение (1.8) к виду

$$\ddot{u} + 2n\dot{u} + k^2 u = 0. \quad (1.9)$$

Здесь  $n = \frac{m}{2m}$  - параметр, зависящий от коэффициента вязкого трения,  $k^2 = 1/d_{11}m$  - значение циклической частоты колебаний при отсутствии сил сопротивления. Общее решение уравнения (1.9) представляется в виде

$$u = e^{-nt} \left( c_1 e^{\sqrt{n^2 - k^2} t} + c_2 e^{-\sqrt{n^2 - k^2} t} \right) \quad (1.10)$$

При  $n \geq k$  (случай большего сопротивления) имеет место апериодическое затухающее движение.

И лишь в случае  $n < k$  движение носит колебательный характер, хотя и не является периодическим.

С помощью обозначения

$$k_1^2 = k^2 - n^2$$

выражение (1.10) можно представить в виде

$$u = e^{-nt} (c_1 \cos k_1 t + c_2 \sin k_1 t),$$

или

$$u = e^{-nt} A \sin(k_1 t + d). \quad (1.11)$$

По выражению (1.11) видно, что через промежуток времени, равный  $p/k_1$ , система проходит через состояние равновесия. Этим объясняется колебательный характер движения.

Величина, равная

$$T_1 = \frac{2p}{k_1} = \frac{2p}{\sqrt{k^2 - n^2}}, \quad (1.12)$$

условно называется периодом затухающих колебаний.

Формула (1.12) показывает, что период затухающих колебаний больше, чем период свободных колебаний системы при отсутствии сопротивления движению.

Множитель  $Ae^{-nt}$  показывает, что последовательные максимальные отклонения системы от положения равновесия с течением времени уменьшаются. При этом отношение

$$h = \frac{u(t + T_1)}{u(t)} = \frac{e^{-n(t+T_1)} A \cdot \sin(k_1 t + k_1 T_1 + g)}{e^{-nt} \cdot A \cdot \sin(k_1 t + g)} = e^{-nT_1}$$

не зависит от времени  $t$ . Величина  $h$  называется декрементом затухающих колебаний, а показатель степени  $nT_1$  - логарифмическим декрементом.

## Лекция 2

### 1.3. Вынужденные колебания

Колебания упругой системы, которые вызываются и поддерживаются возмущающими силами, заданными в виде явных функций времени, называются вынужденными.

Физическая природа таких сил весьма разнообразна. Разнообразны и задающие их функции. Они могут быть как периодическими, так и случайными функциями времени. Наиболее часто на практике встречаются возмущающие силы, меняющиеся периодически.

Возможно и кинематическое возбуждение колебаний.

Рассмотрим действие силы, изменяющейся по гармоническому закону

$$P = P_0 \sin wt. \quad (1.13)$$

Уравнение (1.6) принимает вид

$$u = d_{11}(-m\ddot{u} - m\dot{u} + P \sin wt), \quad (1.14)$$

или

$$\ddot{u} + \frac{m}{d_{11}m} \dot{u} + \frac{1}{d_{11}m} u = \frac{P}{m} \sin wt.$$

При введенных ранее обозначениях

$$2n = \frac{m}{d_{11}m}, \quad k^2 = \frac{1}{d_{11}m}$$

уравнение (1.14) принимает вид

$$\ddot{u} + 2n\dot{u} + k^2 u = \frac{P}{m} \sin wt. \quad (1.15)$$

Полученное дифференциальное уравнение является неоднородным (с правой частью). Полное решение такого уравнения, как известно, состоит из решения  $u_0$  однородного уравнения

$$\ddot{u}_0 + 2n\dot{u}_0 + k^2 u_0 = 0 \quad (1.16)$$

и частного решения  $u^*$  исходного неоднородного уравнения (1.15)

$$u = u_0 + u^*$$

Однородное уравнение (1.16) совпадает с уравнением (1.9), описывающим затухающие колебания с частотой

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}.$$

Представим частное решение неоднородного уравнения (1.15) в виде

$$u^* = (B + Dt) \sin(wt + g), \quad (1.17)$$

где  $B, D, g$  - искомые постоянные.

Подстановка решения (1.17) в уравнение (1.15) приводит к четырем алгебраическим уравнениям:

$$\begin{aligned} (k^2 - w^2)D &= 0; \\ 2nwD &= 0; \\ (k^2 - w^2)B + 2nD &= \frac{P}{m} \cos g; \\ 2nwB + 2wD &= -\frac{P}{m} \sin g. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Рассмотрим наиболее общий случай, при котором частота возмущения  $w$  отлична от частоты  $k$ .

Из первого уравнения системы (1.18) следует  $D = 0$ , а третье и четвертое уравнения принимают вид

$$\begin{aligned}(k^2 - w^2)B &= \frac{P}{m} \cos g; \\ 2nwB &= -\frac{P}{m} \sin g.\end{aligned}\tag{1.19}$$

Отсюда

$$B = \frac{P}{m\sqrt{(k^2 - w^2)^2 + 4n^2w^2}},$$

или

$$B = \frac{P}{mk^2 \sqrt{\left(1 - \frac{w^2}{k^2}\right)^2 + 4\frac{n^2}{k^2} \cdot \frac{w^2}{k^2}}}.\tag{1.20}$$

Заметим, что  $k$  в формуле (1.20) – это частота свободных колебаний системы при отсутствии сопротивления движению.

Угол сдвига фаз  $g$  определяется по одному из уравнений (1.19), или по формуле

$$\operatorname{tg} g = -\frac{2nw}{k^2 - w^2}.\tag{1.21}$$

Полное решение уравнения (1.15) теперь имеет вид

$$u = Ae^{-nt} \sin(k_1 t + d) + B \sin(wt + g).\tag{1.22}$$

Формула (1.22) показывает, что упругая система одновременно участвует в двух колебательных движениях. Первое слагаемое выражения (1.22) описывает собственные затухающие колебания.

В отличие от колебаний, рассмотренных в предыдущем разделе, эти колебания имеют место и при нулевых начальных условиях, ибо они зависят не только от начальных условий, но и от возмущающей силы.

Пользуясь начальными условиями

$$u(0) = u_0 \quad \text{и} \quad \dot{u}(0) = V_0,$$

получим два уравнения

$$A \sin d = u_0 - B \sin g;\tag{1.23}$$

$$A \cos d = \frac{1}{k_1} [V_0 + nu_0 - B(w \cos g + n \sin g)].$$

По уравнениям (1.23) видно, что постоянные  $A$  и  $d$ , характеризующие затухающие колебания, зависят от угла сдвига фаз  $g$  и величины  $B$  и при нулевых начальных условиях определяются из уравнений

$$A \sin d = -B \sin g;$$

$$A \cos d = -\frac{B}{k_1} (w \cos g + n \sin g).$$

Второе слагаемое формулы (1.22) характеризует установившиеся вынужденные колебания с частотой, равной частоте возмущающей силы, и с амплитудой  $B$ .

Принимая во внимание соотношение

$$k^2 = \frac{1}{d_{11}m},$$

представим амплитуду  $B$  в следующем виде:

$$B = \frac{d_{11}P}{\sqrt{\left(1 - \frac{w^2}{k^2}\right)^2 + 4 \frac{n^2}{k^2} \cdot \frac{w^2}{k^2}}}. \quad (1.24)$$

Произведение  $d_{11}P$  представляет собой перемещение массы  $m$  под действием силы  $P$ , равной амплитуде возмущающей силы, приложенной статически

$$d_{11}P = u_{cm}.$$

Таким образом, амплитуда вынужденных колебаний равна

$$B = u_{cm}b, \quad (1.25)$$

где

$$b = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{w^2}{k^2}\right)^2 + 4 \frac{n^2}{k^2} \cdot \frac{w^2}{k^2}}}. \quad (1.26)$$

Коэффициент  $b$  показывает, во сколько раз амплитуда вынужденных колебаний, то есть наибольшее динамическое перемещение, больше статического перемещения под действием силы, равной  $P$ . Этот коэффициент называется динамическим, или коэффициентом нарастания колебаний.

Коэффициент  $b$  зависит от соотношений  $w/k$  и  $n/k$ . При совпадении частот  $w$  и  $k$  упругая система находится в состоянии резонанса. При этом коэффициент  $b$  равен

$$b = \frac{k}{2n}.$$

Заметим, что это значение не является максимальным, хотя и близко к нему. Максимальное значение коэффициент  $b$  принимает при частоте  $w$  возмущающей силы несколько меньшей частоты свободных колебаний  $k$ .

Взяв первую и вторую производные по отношению  $w/k$  от выражения, стоящего в знаменателе формулы (1.26), получим значение отношения  $w/k$ , соответствующее максимальному значению коэффициента  $b$ .

$$\frac{w}{k} = \sqrt{1 - 2 \frac{n^2}{k^2}}. \quad (1.27)$$

После подстановки выражения (1.27) в формулу (1.26) получим

$$\max b = \frac{l}{2 \frac{n}{k} \sqrt{1 - \frac{n^2}{k^2}}} = \frac{l}{2 \frac{n}{k} \cdot \frac{k_1}{k}}. \quad (1.28)$$

На рисунке 1.4 показана зависимость коэффициента динамичности от отношения  $\frac{w}{k}$  при различных значениях отношения  $\frac{n}{k}$ . Здесь же штриховой линией соединены максимальные значения  $b$ .

При  $n=0$ , то есть при ничтожно малом сопротивлении движению, коэффициент  $b$  многократно возрастает. Но увеличение  $b$  происходит не мгновенно, ибо не может быть бесконечно больших ускорений.

Вернемся к частному решению (1.17) и положим  $n=0$  в системе (1.18). Второе уравнение системы (1.18) обращается в тождество, остальные уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} (k^2 - w^2)D &= 0; \\ (k^2 - w^2)B &= \frac{P}{m} \cos g; \\ 2wD &= -\frac{P}{m} \sin g. \end{aligned} \quad (1.29)$$

При  $w \neq k$  из первого уравнения следует  $D=0$ .

Тогда  $\sin g = 0$ ,  $\cos g = 1$  и

$$B = \frac{P}{m(k^2 - w^2)},$$

или с учетом формулы частоты свободных колебаний при  $n=0$ , равной

$$k^2 = \frac{l}{d_n m},$$

$$B = u_{cm} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{k}\right)^2}$$

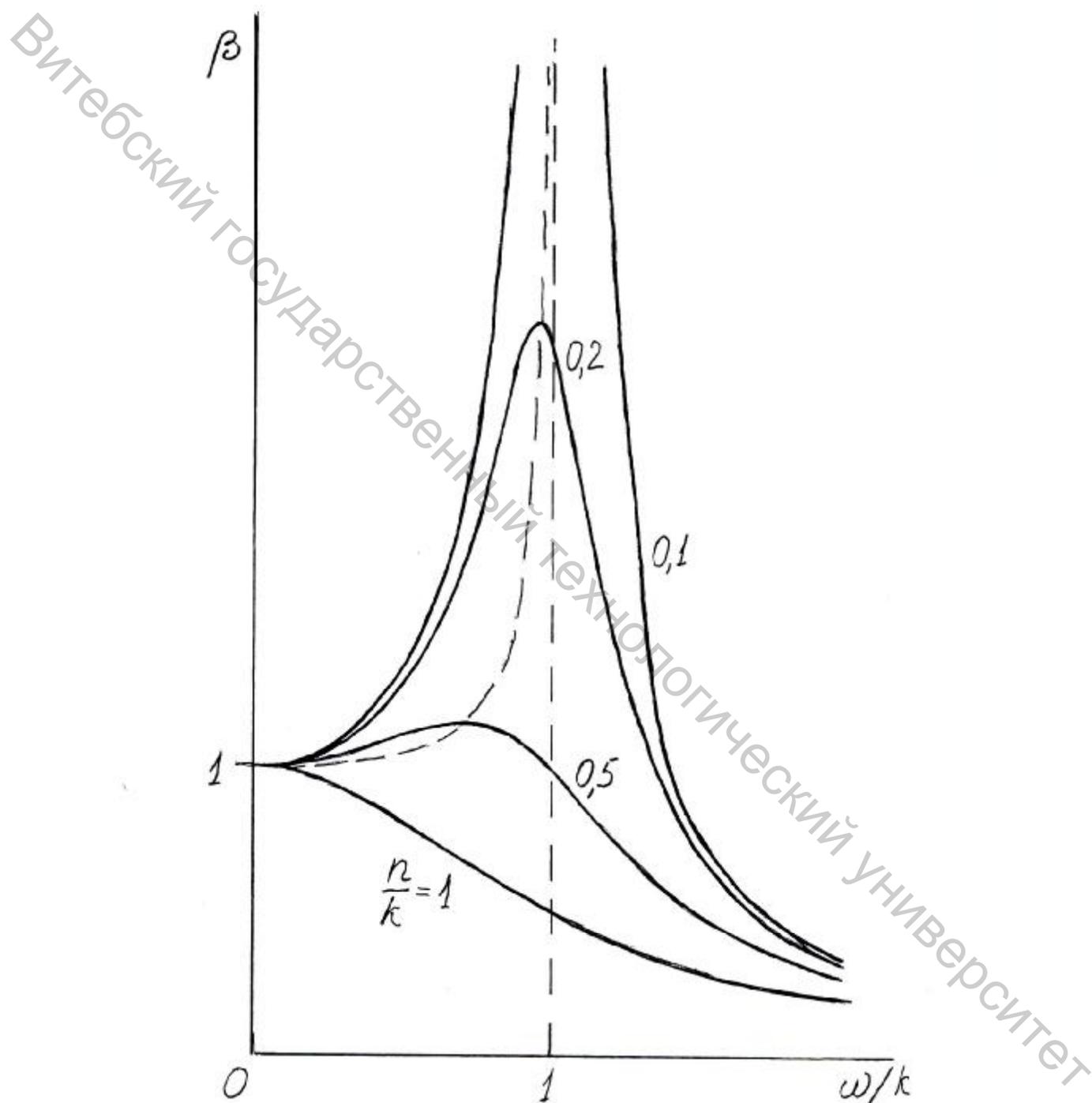


Рис 1.4. Частотно-амплитудная диаграмма при различных значениях коэффициента  $n$

Этот же результат получается при подстановке  $n = 0$  в формулу (1.26).  
Теперь положим в системе (1.29)  $w = k$ . Из второго уравнения следует

$$\frac{P}{m} \cos g = 0,$$

значит  $g = \frac{p}{2}, \quad \sin g = 1$

и  $D = -\frac{P}{2mw} = -\frac{P}{2mk},$

или  $D = -\frac{Pd_{11}}{2k}.$

Учитывая соотношение  $u_{cm} = d_{11}P,$

получим  $D = -\frac{u_{cm}}{2k}.$

Таким образом, уравнение установившихся вынужденных колебаний при резонансе имеет вид

$$u = -\frac{u_{cm}}{2k} t \sin\left(kt + \frac{p}{2}\right),$$

или

$$u = -\frac{u_{cm}}{2k} t \cos kt. \quad (1.30)$$

Как видно, неограниченное возрастание амплитуды колебаний происходит во времени линейно.

Формула (1.21), которую можно записать в виде

$$\operatorname{tg} g = -\frac{2 \frac{n}{k} \cdot \frac{w}{k}}{1 - \left(\frac{w}{k}\right)^2},$$

показывает, что угол сдвига фаз также зависит от отношений  $n/k$  и  $w/k$ .

Увеличение сопротивления движению при  $w < k$  приводит к увеличению угла сдвига фаз. Но при резонансе ( $w = k$ ),

$$g = \frac{p}{2}.$$

Если частота возмущения превышает собственную частоту, то угол сдвига фаз будет больше, чем  $p/2$  и увеличение его при возрастании отношения  $w/k$  происходит тем медленнее, чем больше сопротивление движению.

Эти зависимости видны на рисунке 1.5.

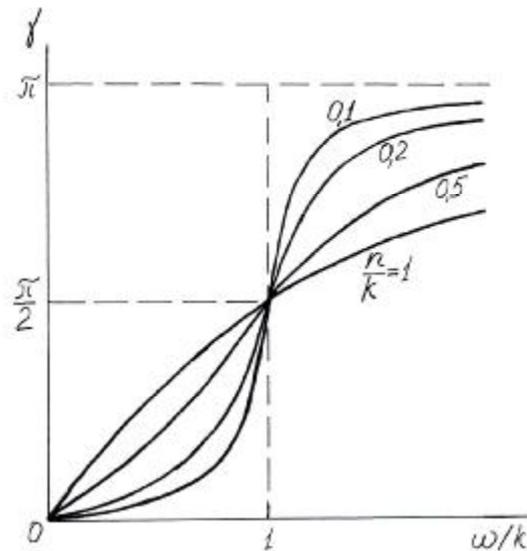


Рис 1.5 Зависимость угла сдвига фаз  $\gamma$  от частоты возмущения  $\omega$  и от сопротивления среды

### Лекция 3

#### 1.4. Учет массы упругих элементов

В рассмотренных выше задачах полагалось, что масса тела, налагающего упругую связь на материальную точку, пренебрежительно мала. В реальных конструкциях масса пружины или балки может оказаться весьма значительной, сравнимой с массой тела, которое представляется материальной точкой. Пренебрежение инертностью пружины или балки, или иного упругого тела может привести к значительным погрешностям.

Точное решение задачи об исследовании колебаний таких систем оказывается очень громоздким и не всегда возможным. Ведь такая система представляет собой бесконечное множество взаимосвязанных материальных точек с бесконечно малыми массами. Положение такой системы определяется бесконечным множеством координат. Значит такая система имеет бесконечное множество степеней свободы и, следовательно, бесконечное множество собственных частот.

Во многих инженерных задачах оказывается достаточным определение наименьшей собственной частоты, которая называется частотой основного тона. Приближенное значение частоты основного тона может быть найдено с помощью введения некоторых допущений.

Одно из таких допущений предложено Рэлеем. Функция перемещения элементов тела, представляющего упругую связь

$$u = u(z, t) ,$$

заменяется произведением двух функций

$$u = f(z)j(t) . \tag{1.31}$$

Здесь  $f(z)$  - функция продольной координаты элемента упругого тела, характеризующая форму деформированного тела;  $j(t)$  - функция времени, которая является переменной обобщенной координатой. Она играет роль переменного масштабного коэффициента.

Рассмотрим применение метода Рэлея на примере задачи о свободных колебаниях консоли, изображенной на рисунке 1.6. К свободному концу консоли прикрепена сосредоточенная масса  $m_1$ . Масса консоли  $m$  равномерно распределена по ее длине.

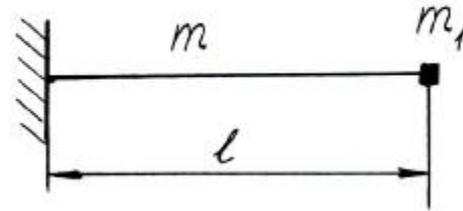


Рис. 1.6.

Если пренебречь инертностью консоли, то есть положить  $m = 0$ , то частота свободных колебаний консоли равна

$$k^2 = \frac{l}{d_{11}m} = \frac{3EI}{ml^3}. \quad (1.32)$$

Такой же результат получим с помощью уравнения

$$\frac{d}{dt}(T + \Pi) = 0, \quad (1.33)$$

которое выражает закон сохранения полной механической энергии системы.

В уравнении (1.33)  $T$  - кинетическая энергия массы  $m_1$ , равная

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{u}_1^2, \quad (1.34)$$

$\Pi$  - потенциальная энергия упругой деформации консоли.

Естественно допустить, что форма деформированной безмассовой консоли с сосредоточенной массой  $m_1$  при колебании совпадает с формой консоли, нагруженной сосредоточенной силой. Тогда

$$\Pi = \frac{1}{2} P u_1 = \frac{1}{2} \frac{u_1^2}{d_{11}}. \quad (1.35)$$

В выражениях потенциальной энергии (1.35) и кинетической энергии (1.34)  $u_1$  и  $\dot{u}_1$  - координата и скорость сосредоточенной массы  $m_1$ .

После подстановки выражений (1.34) и (1.35) в уравнение (1.33) получим

$$m_1 \ddot{u}_1 + \frac{1}{d_{11}} u_1 = 0.$$

Отсюда следует решение (1.32).

Теперь учтем распределенную массу  $m \neq 0$ . Кинетическая энергия деформированной системы, изображенной на рисунке 1.7,

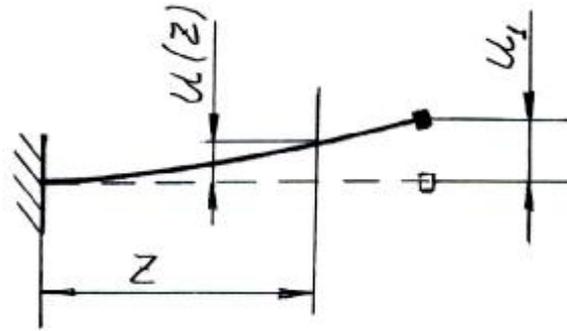


Рис 1.7

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{u}_l^2 + \frac{1}{2} \int_m \dot{u}^2 dm.$$

При равномерном распределении массы  $m$  по длине консоли

$$dm = \frac{m}{l} dz,$$

тогда

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{u}_l^2 + \frac{1}{2} \frac{m}{l} \int_l \dot{u}^2 dz. \quad (1.36)$$

Представив перемещение произвольного сечения консоли в виде

$$u = f(z)j(t) = fj,$$

получим

$$u_l = f(z_l)j(t) = fj.$$

Выражение (1.36) принимает следующий вид:

$$T = \frac{1}{2} m_1 f_l^2 \dot{j}^2 + \frac{1}{2} \frac{m}{l} \dot{j}^2 \int_l f^2 dz = \frac{1}{2} A \dot{j}^2. \quad (1.37)$$

Множитель  $A$  формулы (1.37) называется инерционным коэффициентом. Он равен

$$A = m_1 f_l^2 + \frac{m}{l} \int_l f^2 dz. \quad (1.38)$$

Потенциальную энергию упругой деформации системы найдем с помощью того же представления прогиба произвольного сечения консоли

$$\Pi = \frac{1}{2} EI \int_l (u'')^2 dz = \frac{1}{2} EI j^2 \int_l (f'')^2 dz,$$

или

$$\Pi = \frac{1}{2} B j^2. \quad (1.39)$$

Множитель  $B$  формулы (1.39) называется обобщенным коэффициентом жесткости или квазиупругим коэффициентом.

$$B = EI \int_l (f'')^2 dz. \quad (1.40)$$

Подстановкой выражений (1.37) и (1.39) в уравнение (1.33) получим

$$A \ddot{x} + B \dot{x} = 0.$$

Отсюда частота свободных колебаний консоли

$$k^2 = \frac{B}{A} = \frac{EI \int_l (f'')^2 dz}{m_1 f_1 + \frac{m}{l} \int_l f^2 dz}. \quad (1.41)$$

В формулах (1.38) и (1.40)  $f$  – задаваемая функция. Она назначается исходя из представления нагрузки, которая, будучи приложена статически, придаст продольной оси консоли форму, близкую к форме колеблющейся балки. Такой нагрузкой может быть, например, сосредоточенная сила, приложенная к массе  $m_1$ , или равномерно распределенная нагрузка.

Положим, что форма колеблющейся консоли близка к форме консоли, изогнутой сосредоточенной силой (рисунок 1.8).

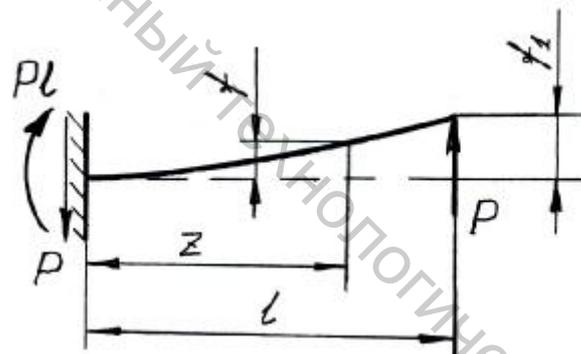


Рис 1.8

Уравнение упругой линии

$$f = \frac{l}{EI} \left( -\frac{Pl}{2} z^2 + \frac{P}{6} z^3 \right) = \frac{P}{6EI} (-3lz^2 + z^3). \quad (1.42)$$

Перемещение сечения  $C$

$$f_1 = f(l) = -\frac{Pl^3}{3EI}. \quad (1.43)$$

Инерционный коэффициент (1.38)

$$\begin{aligned}
 A &= m_1 \left( -\frac{Pl^3}{3EI} \right)^2 + \frac{m}{l} \int_0^l \frac{P^2}{(6EI)^2} (9l^2 z^4 - 6lz^5 + z^6) dz = \\
 &= \frac{P^2 l^6}{9(EI)^2} \left( m_1 + \frac{33}{140} m \right)
 \end{aligned} \tag{1.44}$$

Обобщенный коэффициент жесткости (1.40)

$$B = EI \int_0^l \frac{P^2}{(EI)^2} (z-l)^2 dz = \frac{P^2 l^3}{3EI}. \tag{1.45}$$

Подстановкой выражений (1.44) и (1.45) в формулу (1.41) получим

$$k^2 = \frac{P^2 l^3}{3EI} \cdot \frac{9(EI)^2}{P^2 l^6 \left( m_1 + \frac{33}{140} m \right)} = \frac{3EI}{\left( m_1 + \frac{33}{140} m \right) l^3}. \tag{1.46}$$

Инерционный коэффициент (1.38) можно представить в виде

$$A = f_1^2 \left[ m_1 + \frac{m}{l} \int_l \left( \frac{f}{f_1} \right)^2 dz \right] = f_1^2 (m_1 + m_{np}), \tag{1.47}$$

В формуле (1.47)

$$m_{np} = \frac{m}{l} \int_l \left( \frac{f}{f_1} \right)^2 dz. \tag{1.48}$$

Эта величина представляет собой массу балки, приведенную к сечению, к которому прикрепена сосредоточенная масса  $m_1$ . То есть это такая масса, сосредоточенная в выбранном сечении, кинетическая энергия которой равна кинетической энергии распределенной массы при условии равенства скоростей сечений действительной балки и приведенной.

Подынтегральное выражение формулы (1.48) по найденным перемещениям (1.42) и (1.43)

$$\left( \frac{f}{f_1} \right)^2 = \left( \frac{3}{2} \frac{z^2}{l^2} - \frac{1}{2} \frac{z^3}{l^3} \right)^2 = (1,5a^2 - 0,5a^3)^2,$$

где  $a = z/l$ .

Приведенная масса консоли

$$m_{np} = \frac{m}{l} \int_0^1 (1,5a^2 - 0,5a^3)^2 \cdot l da = \frac{33}{140} m.$$

Теперь приближенное значение частоты основного тона можно определить, заменив систему, изображенную на рисунке 1.6, моделью, изображенной на рисунке 1.9. Тогда в соответствии с решением (1.32)

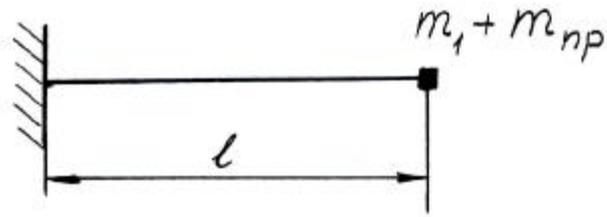


Рис.1.9

$$k^2 = \frac{3EI}{\left(m_1 + \frac{33}{140}m\right)l^3}.$$

Заметим, что, назначая форму упругой линии, то есть построив уравнение (1.42), можно опустить коэффициент перед выражением, стоящим в скобках. Тогда

$$f = -3lz^2 + z^3, \quad f_1 = -2l^3.$$

Инерционный коэффициент (1.38)

$$\begin{aligned} A &= m_1 \cdot 4l^6 + \frac{m}{l} \int_0^l (9l^2 z^4 - 6lz^5 + z^6) dz = \\ &= m_1 \cdot 4l^6 + \frac{33}{35} ml^6 = 4l^6 \left( m_1 + \frac{33}{140} m \right) \end{aligned}$$

Обобщенный коэффициент жесткости (1.40)

$$B = EI \int_0^l 36(z-l)^2 dz = 12EI l^3.$$

По формуле (1.41) получаем тот же результат (1.46):

$$k^2 = \frac{B}{A} = \frac{12EI l^3}{4l^6 \left( m_1 + \frac{33}{140} m \right)} = \frac{3EI}{\left( m_1 + \frac{33}{140} m \right) l^3}.$$

## Лекция 4

### 2. КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

#### 2.1. Свободные колебания

Система, состоящая из конечного числа упругих стержней, имеет бесконечное число степеней свободы, поскольку каждый из ее элементов представляет бесконечное множество материальных точек. Приближенное решение задачи можно получить, заменив реальную конструкцию более простой моделью с конечным числом степеней свободы.

Для построения упрощенной модели следует:

а) выделить наиболее массивные элементы конструкции и пренебречь инертностью менее массивных ее частей;

б) выделить наиболее жесткие элементы и пренебречь их деформацией, то есть положить их абсолютно жесткими;

в) пренебречь размерами и вращательным движением малых элементов, то есть заменить их материальными точками.

На рис. 2.1 изображена плоская рама, которая находится в состоянии устойчивого равновесия.

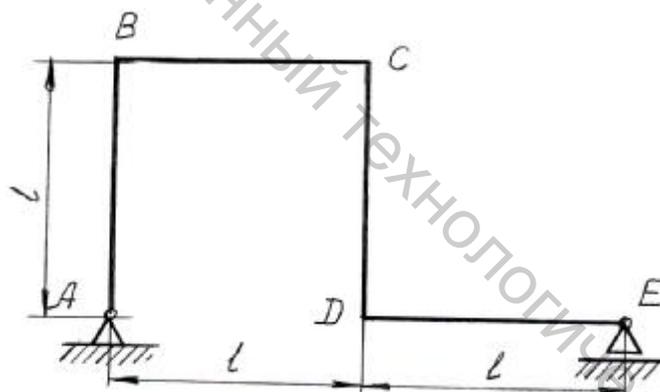


Рис. 2.1

Масса и жесткость стержня CD значительно больше, чем других стержней. Положим стержень CD абсолютно жестким и изобразим деформированную систему, придав ей произвольное перемещение.

При этом учтем, что перемещения, вызванные изгибом стержней AB, BC и DE, значительно превышают перемещения, вызванные их деформациями растяжения-сжатия.

Такая деформированная рама изображена на рисунке 2.2.

Положение системы определяют три обобщенные координаты: горизонтальное и вертикальное перемещения центра масс  $u_1$ ,  $u_2$  и угол поворота стержня CD  $u_3$ .

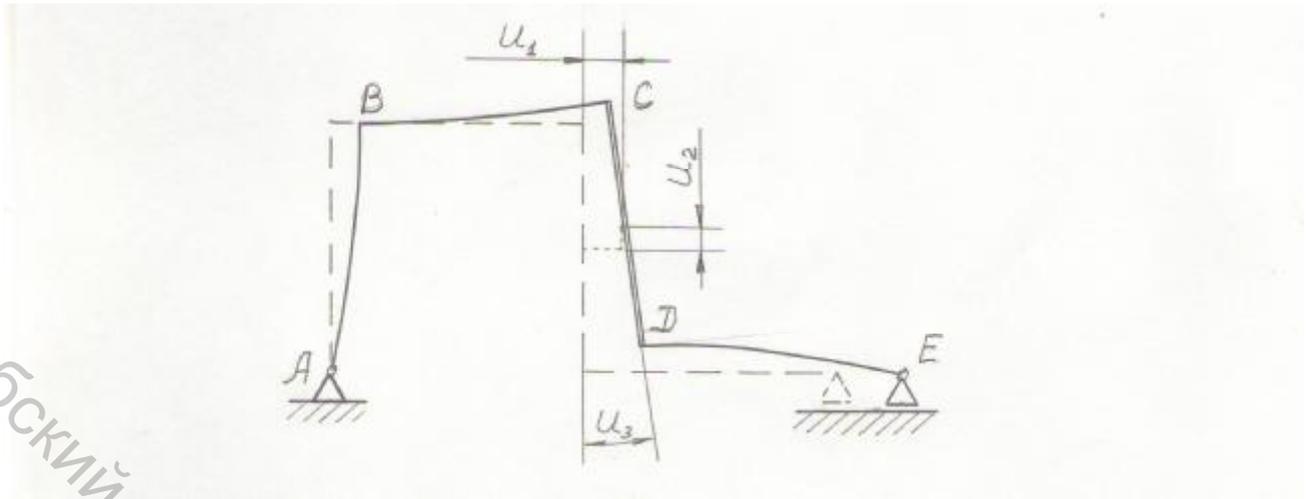


Рис. 2.2

Таким образом, упрощенная модель исходной рамы является системой с тремя степенями свободы. Ее колебательное движение зависит от инертности стержня CD (его массы и момента инерции массы относительно центра масс) и от жесткости стержней AB, BC и DE.

Если один из трех стержней (например, стержень BC) обладает высокой, по сравнению со стержнями AB и DE, жесткостью, то система еще более упрощается.

Такая рама изображена на рисунке 2.3. Положение стержня CD определяется теми же координатами  $u_1, u_2$  и  $u_3$ . Но вследствие того, что стержни BC и CD представляют собой единый жесткий элемент конструкции, угол поворота стержня CD такой же, как и угол поворота стержня BC.

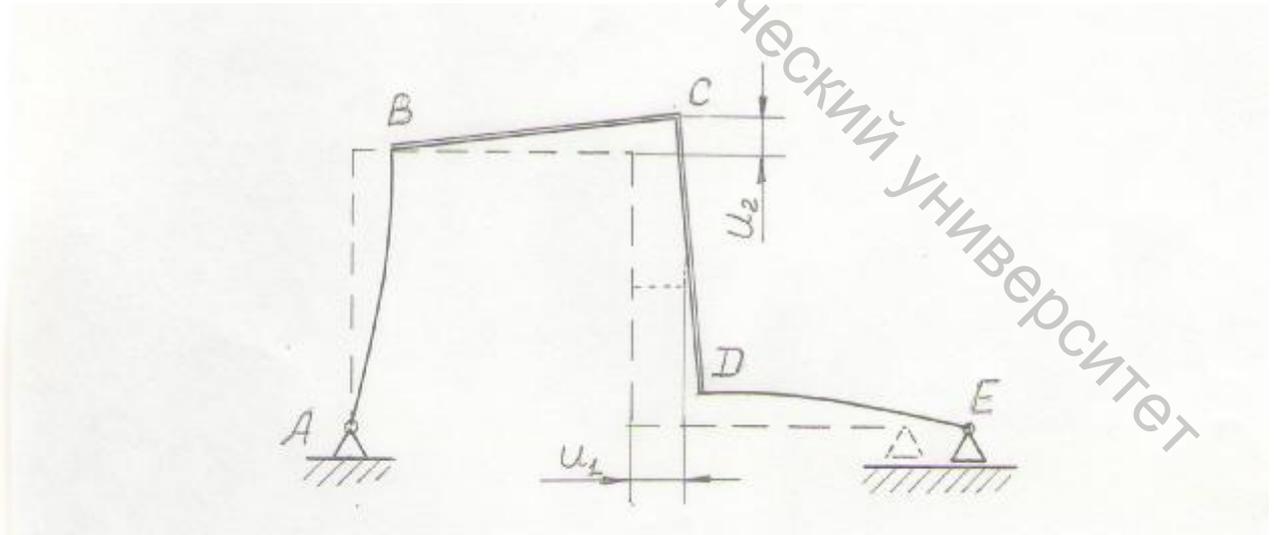


Рис. 2.3

Он связан с вертикальным перемещением узла С зависимостью  $u_3 = u_2/l$ . Значит, независимых координат теперь только две.

Если массы гибких стержней сравнимы с массами жестких элементов конструкции, то пренебрегать их инертностью нельзя. В этом случае необходимо установить форму инерционного перемещения гибкого стержня. Поскольку истинная форма стоячей волны гибкого стержня является неизвестной, ее следует назначить так, чтобы удовлетворялись краевые условия.

Так, сечение А стержня АВ может свободно поворачиваться, а сечение В повернуто на угол, равный углу поворота бруса CD. Горизонтальное перемещение этого сечения также может быть выражено через координату  $u_1$  и угол поворота бруса CD.

Рассмотрим модель рамы, изображенную на рисунке 2.4.

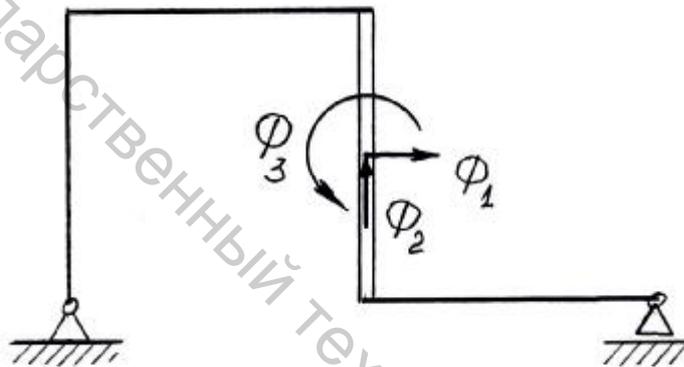


Рис 2.4

Еще раз отметим, что положение системы определяется тремя обобщенными координатами  $u_1, u_2, u_3$ . Деформированное состояние колеблющейся рамы в каждый момент времени идентично состоянию статически уравновешенной системы, нагруженной силами, равными при свободных колебаниях обобщенным силам инерции бруса CD.

На рисунке 2.4 показаны силы инерции бруса CD, приведенные к его центру масс. Горизонтальная и вертикальная составляющие  $f_1$  и  $f_2$  соответствуют обобщенным координатам  $u_1$  и  $u_2$ .  $f_3$  — это главный момент сил инерции бруса CD относительно оси, проходящей через центр масс. Он соответствует угловой координате  $u_3$ .

Для линейно деформируемой системы, каковой и является исследуемая конструкция, полные перемещения сечений (на основании принципа независимости действия сил) определяются как суммы перемещений, вызванных отдельными нагрузками.

$$u_i = \sum_{j=1}^n u_{ij}. \quad (2.1)$$

Здесь  $u_{ij}$  – перемещение сечения в направлении обобщенной координаты  $u_i$ , вызванное силой  $f_j$ . Это перемещение равно

$$u_{ij} = d_{ij} f_j = d_{ij} (-m_j \ddot{u}_j). \quad (2.2)$$

В формуле (2.2)  $d_{ij}$  – перемещение сечения в направлении координаты  $u_i$ , вызванное единичной силой, приложенной вместо силы  $f_j$ . Следует учесть, что в выражении обобщенной даламберовой силы инерции

$$f_j = -m_j \cdot \ddot{u}_j$$

$m_j$  не всегда является массой.

Под  $m_j$  следует понимать меру инертности бруса в движении, определяемом координатой  $u_j$ . Так, в представлении

$$f_3 = -m_3 \ddot{u}_3$$

$m_3$  есть момент инерции массы бруса CD относительно его центральной оси.

Теперь выражение (2.2) для системы с тремя степенями свободы представляется в виде дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} u_1 &= d_{11}(-m_1 \ddot{u}_1) + d_{12}(-m_2 \ddot{u}_2) + d_{13}(-m_3 \ddot{u}_3); \\ u_2 &= d_{21}(-m_1 \ddot{u}_1) + d_{22}(-m_2 \ddot{u}_2) + d_{23}(-m_3 \ddot{u}_3); \\ u_3 &= d_{31}(-m_1 \ddot{u}_1) + d_{32}(-m_2 \ddot{u}_2) + d_{33}(-m_3 \ddot{u}_3). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Решение системы (2.3) разыскивается в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= A_1 \sin kt + B_1 \cos kt; \\ u_2 &= A_2 \sin kt + B_2 \cos kt; \\ u_3 &= A_3 \sin kt + B_3 \cos kt. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь  $k$  – циклическая частота колебаний.

После подстановки выражений (2.4) в уравнения (2.3) и несложных преобразований получаются две подобные алгебраические системы относительно неизвестных  $A_1, A_2, A_3$

$$\begin{aligned} (d_{11}m_1k^2 - 1)A_1 + d_{12}m_2k^2A_2 + d_{13}m_3k^2A_3 &= 0; \\ d_{21}m_1k^2A_1 + (d_{22}m_2k^2 - 1)A_2 + d_{23}m_3k^2A_3 &= 0; \\ d_{31}m_1k^2A_1 + d_{32}m_2k^2A_2 + (d_{33}m_3k^2 - 1)A_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

и относительно неизвестных  $B_1, B_2, B_3$

$$\begin{aligned} (d_{11}m_1k^2 - 1)B_1 + d_{12}m_2k^2B_2 + d_{13}m_3k^2B_3 &= 0; \\ d_{21}m_1k^2B_1 + (d_{22}m_2k^2 - 1)B_2 + d_{23}m_3k^2B_3 &= 0; \\ d_{31}m_1k^2B_1 + d_{32}m_2k^2B_2 + (d_{33}m_3k^2 - 1)B_3 &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Уравнения (2.5) и (2.6), кроме неизвестных  $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ , содержат неизвестную частоту  $k$ . Найти все 7 неизвестных по шести уравнениям нельзя, но частота  $k$  может быть определена.

Ненулевое решение системы однородных уравнений (2.5) или (2.6) существует лишь при равенстве нулю определителя системы, то есть при

$$\begin{vmatrix} d_{11}m_1k^2 - 1 & d_{12}m_2k^2 & d_{13}m_3k^2 \\ d_{21}m_1k^2 & d_{22}m_2k^2 - 1 & d_{23}m_3k^2 \\ d_{31}m_1k^2 & d_{32}m_2k^2 & d_{33}m_3k^2 - 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.7)$$

Условие (2.7) в развернутом виде представляет собой уравнение третьей степени относительно  $k^2$

$$L_1k^6 + L_2k^4 + L_3k^2 - 1 = 0. \quad (2.8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} L_1 &= (d_{11}d_{22}d_{33} + 2d_{12}d_{23}d_{31} - d_{11}d_{23}^2 - d_{22}d_{31}^2 - d_{33}d_{12}^2)m_1m_2m_3; \\ L_2 &= (d_{12}^2 - d_{11}d_{22})m_1m_2 + (d_{23}^2 - d_{22}d_{33})m_2m_3 + (d_{31}^2 - d_{33}d_{11})m_3m_1; \\ L_3 &= d_{11}m_1 + d_{22}m_2 + d_{33}m_3 \end{aligned}$$

Уравнение (2.8) называется *частотным*. Оно имеет три действительных положительных корня  $k_1^2, k_2^2, k_3^2$ . Им соответствуют три значения собственной частоты  $k_1, k_2, k_3$ . Индексы при  $k$  подбираются так, чтобы удовлетворялось условие

$$k_1 < k_2 < k_3.$$

Частота  $k_1$  называется *частотой основного тона*.

Несколько значений частоты свидетельствуют о том, что колебательный процесс является многочастотным и решение (2.4) теперь представляется в виде

$$u_i = \sum_{j=1}^3 (A_{ij} \sin k_j t + B_{ij} \cos k_j t) \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Здесь  $i$  - номер обобщенной координаты;  $j$  - номер частоты.

Постоянные  $A_{ij}$  и  $B_{ij}$  зависят от начальных условий, но каждому значению  $k_j$  соответствуют определенные соотношения амплитуд  $A_{ij}$  и  $B_{ij}$ . При подстановке значения частоты  $k_j$  в уравнения (2.5) одно из них представляется

линейной комбинацией остальных уравнений, то есть независимых уравнений остается два. Таким образом, две амплитуды выразятся через выбранную одну. Если за основную амплитуду взять амплитуду колебаний первой массы  $A_{1j}$ , то получим отношение

$$A_{2j} = n_{2j}A_{1j};$$

$$A_{3j} = n_{3j}A_{1j}.$$

Так же

$$B_{2j} = n_{2j}B_{1j};$$

$$B_{3j} = n_{3j}B_{1j}.$$

Таковы же и соотношения обобщенных координат

$$u_i^j = A_{ij} \sin k_j t + B_{ij} \cos k_j t,$$

Значит, коэффициенты  $n_{ij}$  определяют формы, которые принимает деформированная система при колебаниях с соответствующей частотой  $k_j$ . Эти формы называются главными. Истинная мгновенная форма представляется комбинацией главных форм, при которой обобщенные координаты при найденных соотношениях амплитуд

$$u_i = \sum_{j=1}^3 n_{ij} (A_{1j} \sin k_j t + B_{1j} \cos k_j t). \quad (2.9)$$

Если движение системы начинается из состояния покоя, то

$$A_{11} = 0, \quad A_{12} = 0 \quad \text{и} \quad A_{13} = 0.$$

Уравнения (2.9) принимают вид

$$\begin{aligned} u_1 &= B_{11} \cos k_1 t + B_{12} \cos k_2 t + B_{13} \cos k_3 t; \\ u_2 &= n_{21} B_{11} \cos k_1 t + n_{22} B_{12} \cos k_2 t + n_{23} B_{13} \cos k_3 t; \\ u_3 &= n_{31} B_{11} \cos k_1 t + n_{32} B_{12} \cos k_2 t + n_{33} B_{13} \cos k_3 t. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Подстановка в систему (2.10)  $t = 0$  приводит к системе уравнений относительно амплитуд  $B_{11}, B_{12}, B_{13}$ .

$$\begin{aligned} B_{11} + B_{12} + B_{13} &= u_{10}; \\ n_{21} B_{11} + n_{22} B_{12} + n_{23} B_{13} &= u_{20}; \\ n_{31} B_{11} + n_{32} B_{12} + n_{33} B_{13} &= u_{30}. \end{aligned}$$

Подобным образом по начальным значениям скоростей  $V_{10}, V_{20}$  и  $V_{30}$  определяются амплитуды  $A_{11}, A_{12}, A_{13}$ .

Построим для нашей задачи систему (2.5).

На рисунках (2.5, 2.6 и 2.7) показаны единичные нагрузки, приложенные вместо сил  $f_j$  формулы (2.2), и соответствующие им эпюры изгибающих моментов  $\bar{M}_j$ .

Витебский государственный технологический университет

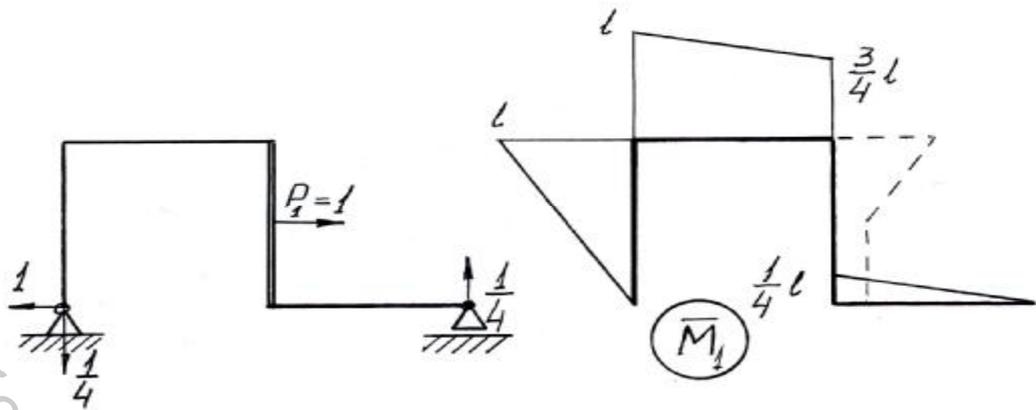


Рис. 2.5

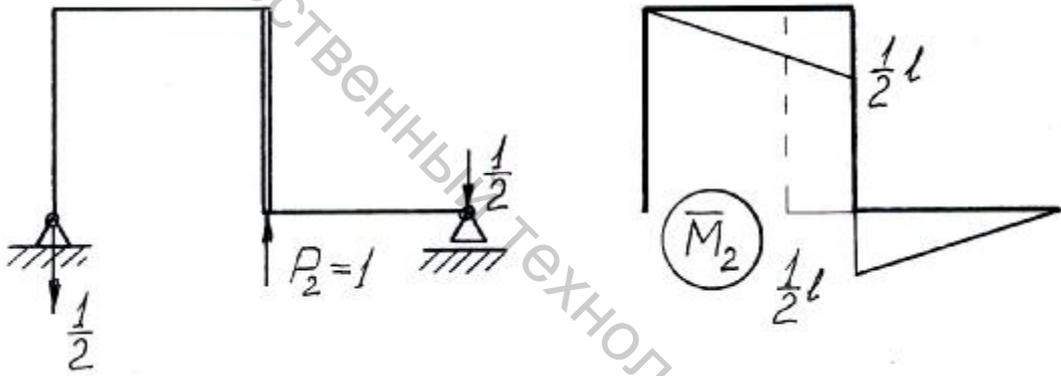


Рис. 2.6

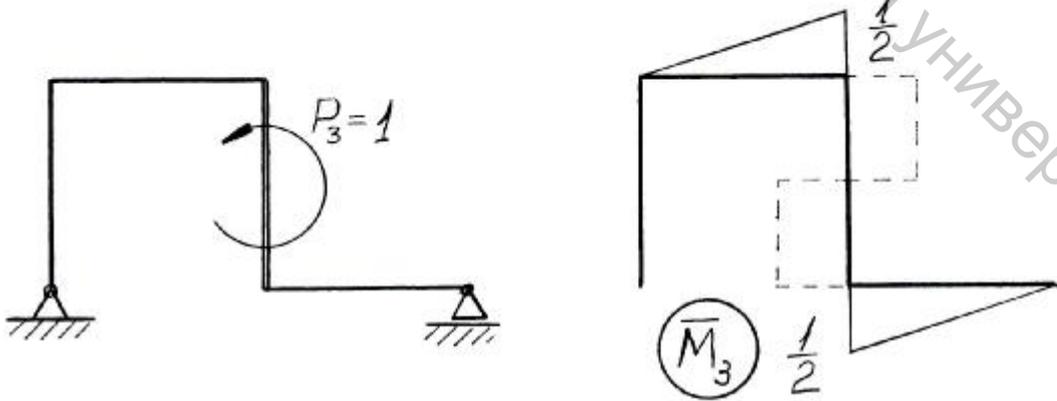


Рис. 2.7

Перемножив по Верещагину эпюры изгибающих моментов, получим

$$EId_{ij} = \overline{M}_i \overline{M}_j.$$

$$EId_{11} = \overline{M}_1 \overline{M}_1 = \left( \frac{1}{2} \frac{l}{4} l \right) \cdot \frac{2}{3} \frac{l}{4} + \left( \frac{1}{2} l \cdot l \right) \cdot \frac{2}{3} l + \\ + \frac{1}{2} l \cdot l \left( \frac{2}{3} l + \frac{1}{3} \cdot \frac{3l}{4} \right) + \frac{1}{2} \frac{3}{4} l \cdot l \left( \frac{1}{3} l + \frac{2}{3} \cdot \frac{3l}{4} \right) = \frac{9}{8} l^3;$$

$$EId_{12} = \overline{M}_1 \cdot \overline{M}_2 = - \left( \frac{1}{2} l \cdot \frac{l}{4} \right) \cdot \frac{2}{3} \frac{l}{2} - \left( \frac{1}{2} l \cdot l \right) \cdot \frac{1}{3} \frac{l}{2} - \\ - \left( \frac{1}{2} \frac{3}{4} l \cdot l \right) \cdot \frac{2}{3} \frac{l}{2} = - \frac{l^3}{4};$$

$$EId_{13} = \overline{M}_1 \cdot \overline{M}_3 = - \left( \frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{l}{4} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{2} l \cdot l \right) \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \\ + \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} l \cdot l \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = - \frac{l^2}{6};$$

$$EId_{22} = \left( \frac{1}{2} \frac{1}{2} \cdot l \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \cdot 2 = \frac{l^3}{6}; \quad EId_{23} = 0;$$

$$EId_{33} = \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot l \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{l}{6}. \quad (2.11)$$

$$EId_{21} = EId_{12} = - \frac{l^3}{4}; \quad EId_{31} = EId_{13} = - \frac{l^2}{6};$$

$$EId_{32} = EId_{23} = 0.$$

При перемножении эпюр принималось во внимание одинаковая жесткость сечений  $EI$  участков  $AB$ ,  $BC$  и  $DE$ , а также абсолютная жесткость бруса  $CD$  (эпюры изгибающего момента на участке  $CD$  изображены штриховой линией).

С учетом найденных значений  $d_{ij}$  и обобщенных масс

$$m_1 = m, \quad m_2 = m, \quad m_3 = \frac{ml^2}{12}$$

уравнения (2.5) имеют вид

$$\left( \frac{9l^3}{8EI} mk^2 - 1 \right) A_1 - \frac{l^3}{4EI} mk^2 A_2 + \frac{l^2}{6EI} \frac{ml^2}{12} A_3 = 0;$$

$$- \frac{l^3}{4EI} mk^2 A_1 + \left( \frac{l^3}{6EI} mk^2 - 1 \right) A_2 + 0 = 0;$$

$$\frac{l^2}{6EI}mk^2 A_1 + 0 + \left( \frac{l}{6EI} \frac{ml^2}{12} k^2 - 1 \right) A_3 = 0. \quad (2.12)$$

Обозначим

$$k^2 \frac{ml^3}{72EI} = z. \quad (2.13)$$

Система (2.12) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} (81z - 1)A_1 - 18zA_2 + zA_3l &= 0; \\ -18zA_1 + (12z - 1)A_2 + 0 &= 0; \\ 12zA_1 + 0 + (z - 1)A_3l &= 0; \end{aligned} \quad (2.14)$$

По определителю системы (2.14)

$$\begin{vmatrix} 84z - 1 & -18z & z \\ -18z & 12z - 1 & 0 \\ 12z & 0 & z - 1 \end{vmatrix}$$

получаем частотное уравнение

$$504z^3 - 729z^2 + 94z - 1 = 0. \quad (2.15)$$

Корни уравнения (2.15)

$$z_1 = 0,0117; \quad z_2 = 0,1301; \quad z_3 = 1,305.$$

Им соответствуют частоты

$$k_1 = 0,918 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}; k_2 = 3,06 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}; k_3 = 9,69 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}.$$

Для построения главных форм колебаний воспользуемся вторым и третьим уравнениями системы (2.14).

При  $z = z_1 = 0,0117$  они принимают вид

$$\left. \begin{aligned} -0,2106 A_{11} - 0,8596 A_{21} &= 0; \\ 0,1404 A_{11} - 0,9883 A_{31}l &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда

$$A_{21} = -0,245 A_{11}, \quad l A_{31} = 0,142 A_{11}.$$

При  $z = z_2 = 0,1301$

$$-2,342 A_{12} + 0,5612 A_{22} = 0;$$

$$1,561 A_{12} - 0,870 l A_{32} = 0.$$

$$A_{22} = 4,17 A_{12}, \quad l A_{32} = 1,79 A_{12}.$$

При  $z = z_3 = 1,305$

$$-23,49A_{13} + 14,66A_{23} = 0;$$

$$15,66A_{13} + 0,305A_{33}l = 0.$$

$$A_{23} = 1,60A_{13}, \quad lA_{33} = -51,3A_{13}.$$

Заметим, что главные формы обладают свойством ортогональности. Что это значит? Для каждой главной формы, соответствующей частоте  $k_j$ , можно построить вектор  $F_j$ , компоненты которого равны

$$F_{jl} = \sqrt{m_l} A_{lj}.$$

То есть

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \\ F_1 & (\sqrt{m_1} A_{11}; \quad \sqrt{m_2} A_{21}; \quad \sqrt{m_3} A_{31} ); \\ \mathbf{r} \\ F_2 & (\sqrt{m_1} A_{12}; \quad \sqrt{m_2} A_{22}; \quad \sqrt{m_3} A_{32} ); \\ \mathbf{r} \\ F_3 & (\sqrt{m_1} A_{13}; \quad \sqrt{m_2} A_{23}; \quad \sqrt{m_3} A_{33} ). \end{aligned}$$

Положив  $A_{lj} = 1$ , получим более простую систему векторов  $f_j$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \\ f_1 & (\sqrt{m_1}; \quad \sqrt{m_2} n_{21}; \quad \sqrt{m_3} n_{31} ); \\ \mathbf{r} \\ f_2 & (\sqrt{m_1}; \quad \sqrt{m_2} n_{22}; \quad \sqrt{m_3} n_{32} ); \\ \mathbf{r} \\ f_3 & (\sqrt{m_1}; \quad \sqrt{m_2} n_{23}; \quad \sqrt{m_3} n_{33} ). \end{aligned}$$

Признаком ортогональности векторов является равенство нулю их скалярного произведения, то есть

$$F_j \cdot F_s = \sum_{p=1}^n F_{jp} \cdot F_{sp} = \sum_{p=1}^n m_p A_{pj} A_{ps} = 0,$$

или

$$\mathbf{r} \quad \mathbf{r} \\ f_j \cdot f_s = \sum_{p=1}^n m_p n_{pj} n_{ps}.$$

По результатам вычислений в рассмотренной задаче получим векторы

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \\ f_1 & (\sqrt{m}; \quad -0,245\sqrt{m}; \quad 0,142 \frac{1}{l} \sqrt{\frac{ml^2}{12}} ); \\ \mathbf{r} \\ f_2 & (\sqrt{m}; \quad 4,17\sqrt{m}; \quad 1,79 \frac{1}{l} \sqrt{\frac{ml^2}{12}} ); \\ \mathbf{r} \\ f_3 & (\sqrt{m}; \quad 1,60\sqrt{m}; \quad -51,3 \frac{1}{l} \sqrt{\frac{ml^2}{12}} ). \end{aligned}$$

Скалярные произведения

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = m \left( 1 \cdot 1 - 0,245 \cdot 4,17 + \frac{0,142}{l} \cdot \frac{1,79}{l} \cdot \frac{l^2}{12} \right) = -0,0005m;$$

$$\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3 = m \left( 1 \cdot 1 + 4,17 \cdot 1,60 - \frac{1,79}{l} \cdot \frac{51,3}{l} \cdot \frac{l^2}{12} \right) = 0,019m;$$

$$\mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{r}_1 = m \left( 1 \cdot 1 - 1,60 \cdot 0,245 - \frac{51,3}{l} \cdot \frac{0,142}{l} \cdot \frac{l^2}{12} \right) = -0,00095m.$$

Результаты близки к нулю.

## Лекция 5

### 2.2. Уравнения Лагранжа

Частотное уравнение можно построить с помощью уравнений Лагранжа второго рода для механической системы

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i^* \quad (2.16)$$

Здесь  $q_i$  - обобщенная координата,  $Q_i^*$  - обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате  $q_i$ .

Если силы, приложенные к механической системе, являются потенциальными, то уравнение (3.1) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0, \quad (2.17)$$

где  $\Pi$  - потенциальная энергия упругой деформации системы в текущий момент времени  $t$ .

Заметим, что обобщенная сила  $Q_i^*$  уравнения (2.16) – это сила, приложенная к колеблющейся массе со стороны безмассового упругого скелета системы, то есть, в случае предыдущей задачи, это сила, с которой безмассовая рама действует на инертный брус CD. При решении задачи удобнее оперировать силами, приложенными к упругой раме, которые равны силам  $Q_i^*$ , но противоположны им по направлению. В этом случае уравнения (2.16) запишутся в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i = 0. \quad (2.18)$$

Рассмотрим построение частотного уравнения на примере предыдущей задачи.

Положение инертного бруса CD определено обобщенными координатами  $u_i$ . Кинетическая энергия системы – это кинетическая энергия бруса CD, ко-

торая по теореме Кенига складывается из кинетической энергии поступательного движения его со скоростью центра масс и кинетической энергии вращательного движения его вокруг центральной оси.

$$T = T_{nc} + T_{вр} = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + \frac{1}{2} \frac{ml^2}{12} \dot{\alpha}_3^2. \quad (2.19)$$

Потенциальная энергия упругой деформации системы представляется суммой потенциальных энергий деформации трех стержней – АВ, ВС и DE.

Пренебрегая деформацией растяжения – сжатия при определении потенциальной энергии деформации гибких стержней, ограничимся лишь деформацией изгиба. Тогда

$$\Pi = \frac{EI}{2} \int_l \left[ \frac{d^2 u(z)}{dz^2} \right]^2 dz. \quad (2.20)$$

В формуле (2.20)  $u(z)$  - перемещение сечения с продольной координатой  $z$ . Определение этого перемещения основывается на интуитивном представлении формы упругой линии изогнутого стержня. Форма упругой линии определяется функцией, удовлетворяющей граничные условия, которые зависят от способа закрепления гибкого стержня и перемещения граничных сечений. Эти перемещения выражаются через введенные обобщенные координаты. Таким образом, потенциальная энергия деформации каждого стержня выражается через обобщенные координаты.

Рассмотрим деформацию каждого стержня в отдельности и построим уравнения упругой линии

а) Стержень АВ (рисунок 2.8).

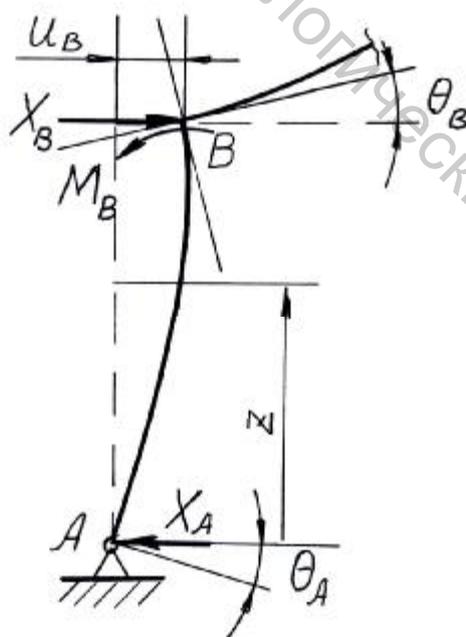


Рис. 2.8

Сечение А закреплено шарнирно-неподвижной опорой, которая допускает его поворот. Угол поворота  $q_A$  неизвестен. Сечение В получило горизонтальное перемещение  $u_B$ , которое выражается через обобщенные координаты  $u_1$  и  $u_3$  (рисунок 2.2)

$$u_B = u_1 - u_3 \cdot \frac{l}{2}. \quad (2.21)$$

Угол поворота сечения В  $q_B$  неизвестен, но известно, что он такой же, как и угол поворота сечения В стержня ВС. Как следует нагрузить стержень АВ, чтобы получить такие перемещения?

Для поворота сечения В на угол  $q_B$  и горизонтального смещения его  $u_B$  к сечению В следует приложить пару сил с моментом  $M_B$ . Пара сил должна быть уравновешена другой парой. Таковой будет пара, образованная силами  $X_A$  и  $X_B$ . Эти нагрузки видны на рисунке 2.8.

При построении уравнения упругой линии продольную координату  $z$  можно отсчитывать от сечения А, а можно и от сечения В. Если за начальное сечение принять сечение А, то неизвестными начальными параметрами будут  $X_A$  и  $q_A$ . Начальные параметры  $u_A$  и  $M_A$  известны. Они равны нулю. Если в качестве начального сечения взять сечение В, то известным будет лишь перемещение  $u_B$ . Остальные начальные параметры ( $q_B$ ,  $X_B$  и  $M_B$ ) – неизвестны.

Остановимся на первом варианте.

$$EIu = -EIq_{Az} + \frac{1}{6} X_A z^3. \quad (2.22)$$

По краевым условиям  $u(l) = -u_B$ ,  $u'(l) = q_B$  получим два уравнения

$$\begin{aligned} -EIq_A l + \frac{X_A}{6} l^3 &= -EIu_B; \\ -EIq_A + \frac{X_A l^2}{2} &= EIq_B. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Уравнения (2.23) содержат три неизвестных. Найти их можно лишь при исследовании перемещений стержня ВС.

б) Стержень ВС (рисунок 2.9).

Поскольку продольные деформации стержней вызывают незначительные перемещения, положим, что горизонтальные перемещения всех сечений стержня ВС одинаковы. На рисунке 2.9 указаны лишь вертикальные перемещения сечений. Сечение В повернуто на угол  $\varphi_B$ , который, как отмечалось, равен углу поворота сечения В стержня АВ. Сечение С получило вертикальное перемещение  $u_C = u_2$  и угловое  $\varphi_C = u_3$ .

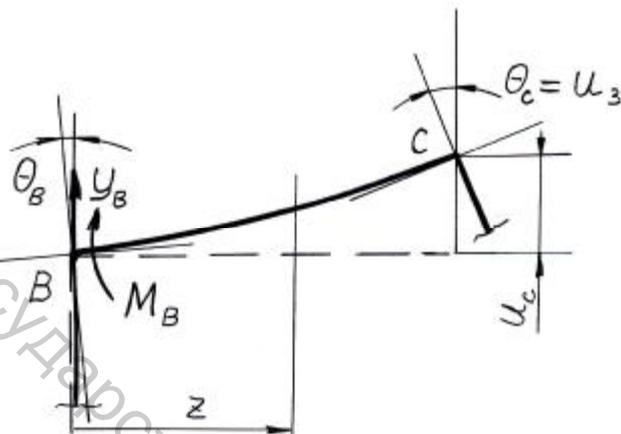


Рис. 2.9

Выберем в качестве начального сечение В. К нему приложены сила  $Y_B$  и пара сил, момент которой  $M_B$ . Здесь следует учесть, что момент  $M_B$  на рисунке (2.8) выражает действие стержня ВС на стержень АВ, а момент  $M_B$  на рисунке (2.9) выражает действие стержня АВ на стержень ВС. Поэтому на рисунках (2.8) и (2.9) эти моменты при равных алгебраических значениях имеют противоположные направления.

Уравнение упругой линии

$$EIu = EIq_B z + \frac{1}{2} M_B z^2 + \frac{1}{6} Y_B z^3. \quad (2.24)$$

По крайевым условиям

$$u(l) = u_2, \quad u'(l) = u_3$$

получим уравнения

$$\begin{aligned} EIu_2 &= EIq_B l + \frac{1}{2} M_B l^2 + \frac{1}{6} Y_B l^3; \\ EIu_3 &= EIq_B + M_B l + \frac{1}{2} Y_B l^2. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Уравнения (2.25) кроме неизвестного угла  $\varphi_B$  содержат неизвестные моменты  $M_B$  и силу  $Y_B$ .

Дополним систему уравнений (2.23) и (2.25) уравнением статики

$$lX_A - M_B = 0$$

и равенством (2.21) и получим следующее решение:

$$\begin{aligned} q_A &= \frac{1}{7l}(9u_1 + 3u_2 - 5,5u_3l); \\ q_B &= \frac{1}{7l}(-3u_1 + 6u_2 - 0,5u_3l); \\ X_A &= \frac{6EI}{7l^3}(2u_1 + 3u_2 - 2u_3l); \\ Y_B &= \frac{6EI}{7l^3}(-3u_1 - 8u_2 + 6,5u_3l); \\ M_B &= \frac{6EI}{7l^2}(2u_1 + 3u_2 - 2u_3l). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Перейдем к определению потенциальной энергии.

$$\Pi = \frac{EI}{2} \int_0^l (u'')^2 dz.$$

Стержень АВ.

$$u'' = \frac{1}{EI} X_A z.$$

$$\Pi_{AB} = \frac{EI}{2} \int_0^l \frac{1}{(EI)^2} X_A^2 z^2 dz = \frac{X_A^2 l^3}{EI \cdot 6} = \frac{6EI}{49l^3} (2u_1 + 3u_2 - 2u_3l)^2. \quad (2.27)$$

Стержень ВС.

$$u'' = \frac{1}{EI} (M_B + Y_B z).$$

$$\begin{aligned} \Pi_{BC} &= \frac{EI}{2} \int_0^l \frac{1}{(EI)^2} (M_B + Y_B z)^2 dz = \frac{1}{2EI} \left( M_B^2 l + M_B Y_B l^2 + \frac{1}{3} Y_B^2 l^3 \right) = \\ &= \frac{6EI}{49l^3} (3u_1^2 + 19u_2^2 + 15,25u_3^2 l^2 + 9u_1 u_2 - 6u_1 u_3 l - 33,5u_2 u_3 l). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Перейдем к стержню DE (рисунок 2.10).

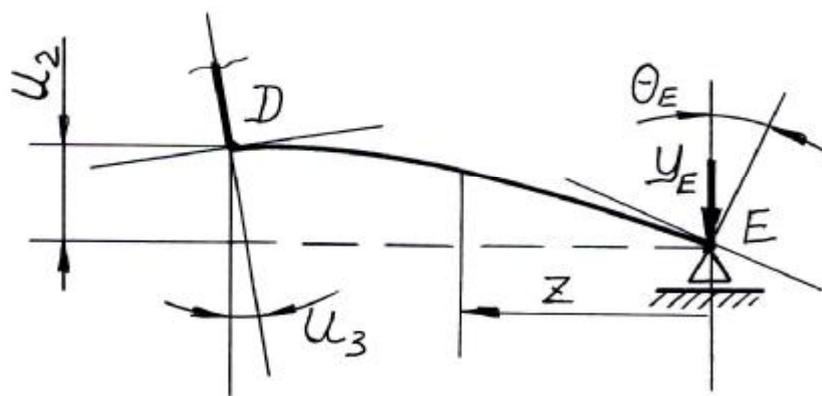


Рис. 2.10

Уравнение упругой линии

$$EIu = EIq_E z - \frac{1}{6} Y_E z^3. \quad (2.29)$$

По краевым условиям

$$u(l) = u_2; \quad u'(l) = -u_3$$

получим уравнения

$$\begin{aligned} EIq_E l - \frac{1}{6} Y_E l^3 &= u_2; \\ EIq_E - \frac{1}{2} Y_E l^2 &= -u_3. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Решение уравнений (2.30)

$$\begin{aligned} q_E &= \frac{1}{2l} (3u_2 + u_3 l); \\ Y_E &= \frac{3EI}{l^3} (u_2 + u_3 l). \end{aligned}$$

Потенциальная энергия деформации стержня DE.

$$\begin{aligned} u'' &= -\frac{1}{EI} Y_E z \\ \Pi_{DE} &= \frac{EI}{2} \int_0^l \frac{1}{(EI)^2} Y_E^2 z^2 dz = \frac{Y_E^2 l^3}{6EI} = \frac{3EI}{2l^3} (u_2 + u_3 l)^2. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Если какой либо стержень системы закреплен так, что одно из крайних сечений его имеет возможность свободно поворачиваться, то его перемещение можно сопоставить с перемещениями консоли, нагруженной на конце сосредоточенной силой (рисунок 2.11).

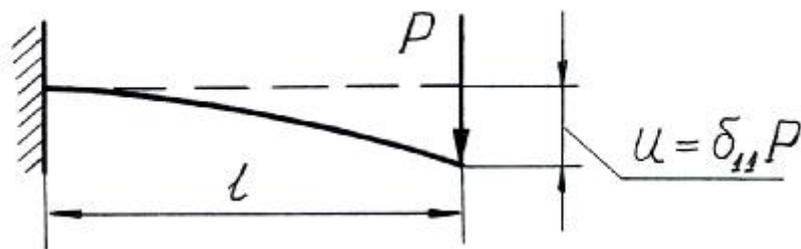


Рис. 2.11

Потенциальная энергия деформации такой консоли равна

$$\Pi = \frac{1}{2} Pu = \frac{1}{2} \frac{u^2}{d_{11}},$$

где

$$d_{11} = \frac{l^3}{3EI}.$$

Значит

$$\Pi = \frac{3EI}{2l^3} u^2. \quad (2.32)$$

На рисунке 2.12 показано положение стержня DE в состоянии равновесия системы и в деформированном состоянии ( $D_1E_1$ ).

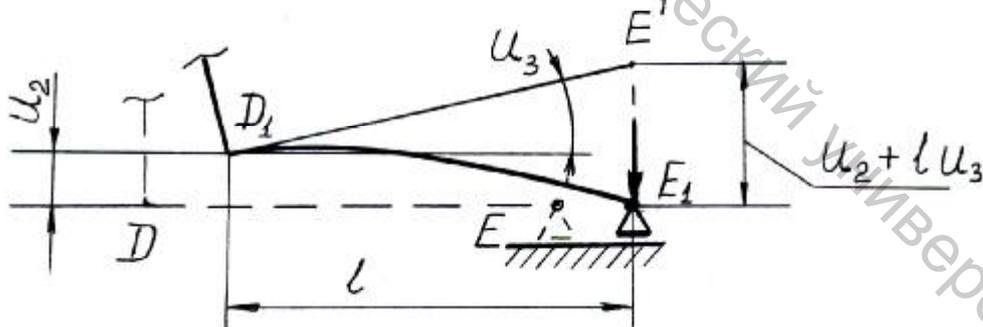


Рис. 2.12

Это перемещение можно осуществить в два этапа. Сначала переместить стержень как абсолютно жесткий в положение  $D_1E^1$ . Затем, зафиксировав сечение D, действием на сечение E сосредоточенной силой (равной реакции опоры E) переместить его в положение  $E_1$ . При этом деформации аналогичны деформациям консоли, изображенной на рисунке 2.11. Прогиб  $u$

формулы (2.32) равен  $u_2 + lu_3$  и потенциальная энергия деформации стержня DE

$$\Pi_{DE} = \frac{3EI}{2l^3}(u_2 + lu_3)^2.$$

Эта закономерность может использоваться в целях проверки определения потенциальной энергии деформации стержня, один конец которого закреплен с помощью шарнира. На рисунке 2.13 изображена деформация стержня АВ.

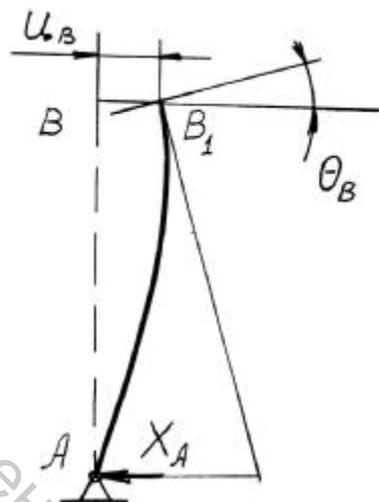


Рис. 2.13

По найденному значению угла  $\theta_B$  определим параметр  $u$  формулы (2.32)

$$\begin{aligned} u &= u_B + l\theta_B = u_1 - \frac{1}{2}lu_3 + \frac{1}{7}(-3u_1 + 6u_2 - 0,5lu_3) = \\ &= \frac{2}{7}(2u_1 + 3u_2 - 2u_3l). \end{aligned}$$

Потенциальная энергия

$$\Pi_{AB} = \frac{3EI}{2l^3}u^2 = \frac{3EI}{2l^3} \cdot \frac{4}{49}(2u_1 + 3u_2 - 2u_3l)^2 = \frac{6EI}{49l^3}(2u_1 + 3u_2 - 2u_3l)^2.$$

Этот результат совпадает с выражением (2.27).

Теперь потенциальная энергия упругой деформации всей рамы с учетом выражений (2.27), (2.28), (2.31)

$$\begin{aligned} \Pi &= \Pi_{AB} + \Pi_{BC} + \Pi_{DE} = \\ &= \frac{3EI}{7l^3} \left[ 2u_1^2 + 11,5u_2^2 + 9u_3^2l^2 + 6u_1u_2 - 4lu_1u_3 - 6lu_2u_3 \right] \end{aligned} \quad (2.33)$$

Перейдем к построению уравнений Лагранжа.  
По выражению (2.19)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_1} \right) &= m \ddot{u}_1; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_2} \right) &= m \ddot{u}_2; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_3} \right) &= \frac{ml^2}{12} \ddot{u}_3.\end{aligned}$$

По выражению (2.33)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi}{\partial u_1} &= \frac{6EI}{7l^3} (2u_1 + 3u_2 - 2u_3l); \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_2} &= \frac{6EI}{7l^3} (3u_1 + 11,5u_2 - 3u_3l); \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_3} &= \frac{6EI}{7l^2} (-2u_1 - 3u_2 + 9u_3l).\end{aligned}\tag{2.34}$$

Подстановкой выражений (2.34) в формулу (2.17) получим три дифференциальных уравнения:

$$\begin{aligned}m \ddot{u}_1 + \frac{6EI}{7l^3} (2u_1 + 3u_2 - 2u_3l) &= 0; \\ m \ddot{u}_2 + \frac{6EI}{7l^3} (3u_1 + 11,5u_2 - 3u_3l) &= 0; \\ \frac{ml^2}{12} \ddot{u}_3 + \frac{6EI}{7l^3} (-2u_1 - 3u_2 + 9u_3l) &= 0.\end{aligned}\tag{2.35}$$

Представим решение уравнений (2.35) в виде

$$u_i = A_i \sin kt.$$

и после введения обозначения (2.13) получим алгебраическую систему

$$\begin{aligned}(84z - 2)A_1 - 3A_2 + 2A_3l &= 0; \\ -3A_1 + (84z - 11,5)A_2 + 3A_3l &= 0; \\ 2A_1 + 3A_2 + (7z - 9)A_3l &= 0.\end{aligned}\tag{2.36}$$

Приравняв нулю определитель однородной системы (2.36)

$$\begin{vmatrix} 84z - 2 & -3 & 2 \\ -3 & 84z - 11,5 & 3 \\ 2 & 3 & 7z - 9 \end{vmatrix} = 0,$$

получим частотное уравнение

$$49392z^3 - 71442z^2 + 9212z - 98 = 0,$$

или после сокращения

$$504z^3 - 729z^2 + 94z - 1 = 0,$$

что совпадает с выражением (2.15).

Теперь обратимся к формуле (2.18) и построим уравнения Лагранжа с помощью обобщенных сил  $Q_i$ .

Вернемся к рисунку 2.4 и вместо сил  $f_1, f_2$  и  $f_3$  приложим обобщенные силы  $Q_1, Q_2$  и  $Q_3$ , соответствующие обобщенным координатам  $u_1, u_2, u_3$  (рисунок 2.14). Совместное действие этих сил вызывает перемещения  $u_1, u_2, u_3$

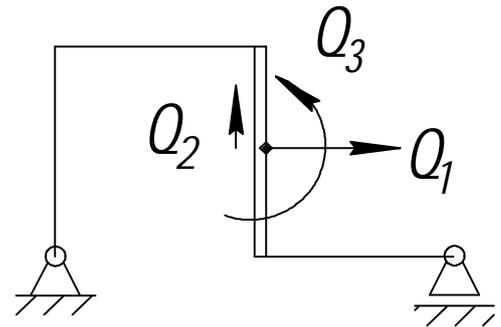


Рис. 2.14

Найдем эти силы как корни системы уравнений "метода сил"

$$\sum_{i=1}^n d_{ij} Q_j = u_i; \quad i = 1, 2, 3.$$

По найденным ранее коэффициентам  $d_{ij}$  строим систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{9l^3}{8EI} Q_1 - \frac{l^3}{4EI} Q_2 + \frac{l^2}{6EI} Q_3 &= u_1; \\ -\frac{l^3}{4EI} Q_1 + \frac{l^3}{6EI} Q_2 + 0 &= u_2; \\ \frac{l^2}{6EI} Q_1 + 0 + \frac{l}{6EI} Q_3 &= u_3; \end{aligned} \right\} \quad (2.37)$$

Решение системы (2.37)

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{6EI}{7l^3} (2u_1 + 3u_2 - 2lu_3); \\ Q_2 &= \frac{6EI}{7l^3} (3u_1 + 11,5u_2 - 3lu_3); \\ Q_3 &= \frac{6EI}{7l^3} (-2u_1 - 3u_2 - 9lu_3). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Как видим, значения обобщенных сил, полученные с помощью канонических уравнений "метода сил", полностью совпадают с выражениями (2.34).

## Лекция 6

### 2.3. Учет массы гибких элементов стержневой системы

Перейдем к более точному решению задачи при определении кинетической энергии системы с учетом инертности гибких стержней.

Кинетическая энергия гибкого стержня определяется по формуле

$$T = \frac{m}{2l} \int_l u^2 dz \quad (2.39)$$

Здесь  $u$  - скорость центра тяжести поперечного сечения, положение которого определяется продольной координатой  $z$ .

При отсутствии продольных перемещений сечений

$$u = \frac{d}{dt} u(z, t),$$

где  $u$  - поперечное перемещение сечения, зависящее от времени и формы стоячей волны. Интуитивное представление формы изогнутого стержня уже использовалось при определении потенциальной энергии упругой деформации стержней АВ, ВС, DE. Она назначалась для каждого стержня исходя из граничных условий. То есть определялась нагрузка, с помощью которой конечные сечения стержня получают заданные перемещения. Затем строилось уравнение упругой линии деформированного стержня, которое мы будем принимать за уравнение стоячей волны.

Поскольку эти уравнения представляются линейными функциями обобщенных координат, то и поперечные скорости сечений представляются такими же линейными функциями обобщенных скоростей.

По уравнению (2.22) упругой линии стержня АВ

$$w = -q_A z - \frac{1}{6EI} X_A z^3. \quad (2.40)$$

Подстановкой выражения (2.40) в формулу (2.39) получим

$$T_{AB} = \frac{m_{AB}}{2} \left( \frac{1}{3} q_A^2 l^2 - \frac{1}{15EI} q_A X_A l^4 + \frac{1}{252(EI)^2} X_A^2 l^6 \right) \quad (2.41)$$

Сечения стержня ВС кроме поперечного смещения получают продольные перемещения со скоростью  $w - \frac{1}{2} l \dot{w}$ . Кинетическая энергия стержня ВС

$$T_{BC} = \frac{1}{2} m_{BC} \left( w - \frac{1}{2} l \dot{w} \right)^2 + \frac{m_{BC}}{2l} \int_l \dot{w}^2 dz. \quad (2.42)$$

В формуле (2.42)  $w$  - перемещение, определяемое формулой (2.24). С учетом выражения (2.24) интеграл формулы (2.42) принимает вид

$$\int_0^l \dot{w}^2 dz = \frac{l^3}{3} \dot{q}_3^2 + \frac{l^5}{20(EI)^2} \dot{M}_B^2 + \frac{l^7}{252(EI)^2} \dot{Y}_B^2 + \frac{l^4}{4EI} \dot{q}_B \dot{M}_B + \frac{l^5}{15EI} \dot{q}_B \dot{Y}_B + \frac{l^6}{36(EI)^2} \dot{M}_B \dot{Y}_B. \quad (2.43)$$

Формулы (2.41) и (2.43) содержат производные по времени. Они выражаются через обобщенные скорости в соответствии с формулами (2.26)

$$\begin{aligned} \dot{q}_A &= \frac{1}{7l} (9\dot{w}_1 + 3\dot{w}_2 - 5,5l\dot{w}_3); \\ \dot{q}_B &= \frac{1}{7l} (-3\dot{w}_1 + 6\dot{w}_2 - 0,5l\dot{w}_3); \\ \dot{X}_A &= \frac{6EI}{zl^3} (2\dot{w}_1 + 3\dot{w}_2 - 2l\dot{w}_3); \\ \dot{Y}_B &= \frac{6EI}{zl^3} (-3\dot{w}_1 - 8\dot{w}_2 + 6,5l\dot{w}_3); \\ \dot{M}_B &= \frac{6EI}{zl^2} (2\dot{w}_1 + 3\dot{w}_2 - 2l\dot{w}_3). \end{aligned} \quad (2.44)$$

После подстановки выражений (2.44) в формулы (2.41) и (2.43) будем иметь:

$$T_{AB} = \frac{m_{AB}}{98} \left( 20,37\dot{w}_1^2 + 0,6857\dot{w}_2^2 + 6,255l^2\dot{w}_3^2 + 6,514\dot{w}_1\dot{w}_2 - 22,54l\dot{w}_1\dot{w}_3 - 3,714l\dot{w}_2\dot{w}_3 \right); \quad (2.45)$$

$$T_{BC} = \frac{m_{BC}}{2} \left( \dot{w}_1 - \frac{1}{2}\dot{w}_3 \right)^2 + \frac{m_{BC}}{98} \left( 0,0857l\dot{w}_1^2 + 21,14\dot{w}_2^2 + 0,5190l^2\dot{w}_3^2 - 1,643\dot{w}_1\dot{w}_2 + 0,3286l\dot{w}_1\dot{w}_3 - 6,007l\dot{w}_2\dot{w}_3 \right). \quad (2.46)$$

Сечения стержня DE получают продольные перемещения со скоростью  $\dot{w}_2 + \frac{1}{2}l\dot{w}_3$  и поперечные перемещения, определяемые формулой (2.29). Кинетическая энергия стержня DE

$$T_{DE} = \frac{1}{2} m_{DE} \left( \dot{w}_2 + \frac{1}{2}l\dot{w}_3 \right)^2 + \frac{m_{DE}}{2} \int_l \dot{w}^2 dz.$$

С учетом выражений (2.30) получим

$$T_{DE} = \frac{m_{DE}}{2} \left( \dot{w}_2 + \frac{1}{2}l\dot{w}_3 \right)^2 + \frac{m_{DE}}{98} \left( 0,4857\dot{w}_2^2 + 0,714l\dot{w}_2\dot{w}_3 + 0,01905l^2\dot{w}_3^2 \right). \quad (2.47)$$

Кинетическая энергия жесткого стержня CD представлена формулой (2.19).

Положим для примера

$$\begin{aligned} m_{CD} &= m_1, & m_{AB} &= 0,25m, \\ m_{BC} &= 0,2m & \text{и} & m_{DE} = 0,1m. \end{aligned} \quad (2.48)$$

После подстановки значений (2.48) в формулы (2.45), (2.46) и (2.47) получим выражение кинетической энергии всей системы.

$$\begin{aligned} T &= T_{AB} + T_{BC} + T_{CD} + T_{DE} = \\ &= \frac{m}{2} (1,454u_1^2 + 1,163u_2^2 + 0,2077l^2u_3^2 + 0,02653u_1u_2 - 0,1637lu_1u_3 - 0,01776lu_2u_3). \end{aligned}$$

Уравнения Лагранжа с учетом формул (2.33) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} m(1,454u_1 + 0,01326u_2 - 0,008485lu_3) + \frac{6EI}{7l^3} (2u_1 + 3u_2 - 2lu_3) &= 0; \\ m(0,01326u_1 + 1,136u_2 - 0,00888lu_3) + \frac{6EI}{7l^3} (3u_1 + 11,5u_2 + 3lu_3) &= 0; \\ m(0,08485u_1 + 0,00888u_2 - 0,2077lu_3) + \frac{6EI}{z l^3} (2u_1 + 3u_2 - 9lu_3) &= 0. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Представив решение уравнений (2.49) в виде

$$u_i = A_i \sin kt$$

с помощью подстановки

$$\frac{ml^3}{72EI} k^2 = z,$$

получим алгебраическую систему

$$\begin{aligned} (122,2z - 2)A_1 + (1,114z - 3)A_2 - (6,874z - 2)lA_3 &= 0; \\ (1,114z - 3)A_1 + (97,67z - 11,5)A_2 - (0,7466z - 3)lA_3 &= 0; \\ - (6,874z - 2)A_1 - (0,7466z - 3)A_2 + (17,45z - 9)lA_3 &= 0. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Приравняв нулю определитель системы (2.50), получим частотное уравнение

$$2077z^3 - 1342z^2 + 131,8z - 1 = 0. \quad (2.51)$$

Решение частотного уравнения (2.51):

$$z_1 = 0,008275; \quad z_2 = 0,1103; \quad z_3 = 0,5275.$$

Этим значениям параметра  $z$  соответствуют циклические частоты:

$$k_1 = 0,772 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}; \quad k_2 = 2,82 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}; \quad k_3 = 6,16 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}.$$

Еще раз заметим, что как и в задаче, рассмотренной в разделе 1.4, повышение инертности системы приводит к снижению частоты свободных колебаний.

## Лекция 7

### 3. ПРИМЕР РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

#### 3.1 Задание

Для изображенной на рисунке 3.1 системы построить упрощенную модель, определить число степеней свободы, резонансные частоты и построить главные формы колебаний.

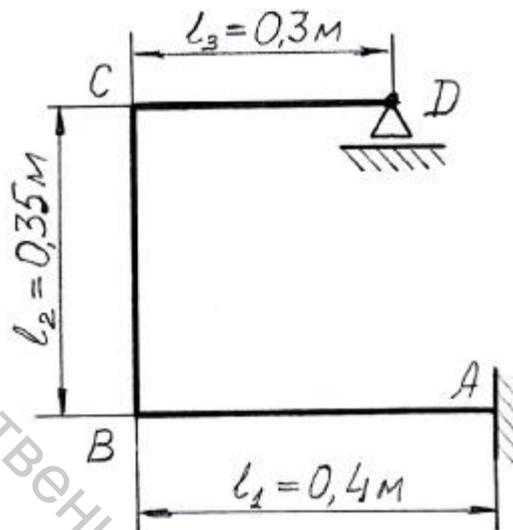


Рис. 3.1

Исходные данные:

$$l_1 = 0,4\text{ м}; \quad l_2 = 0,35\text{ м}; \quad l_3 = 0,3\text{ м}.$$

Сечение стержней АВ и CD (рисунок 3.2).

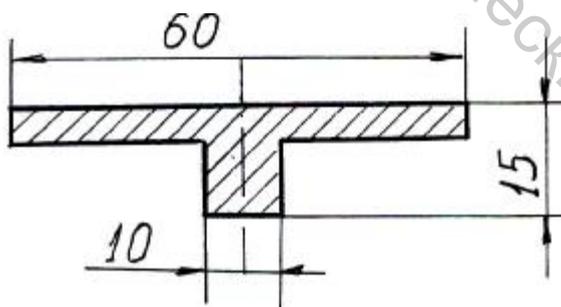


Рис. 3.2

Сечение стержня ВС (рисунок 3.3).

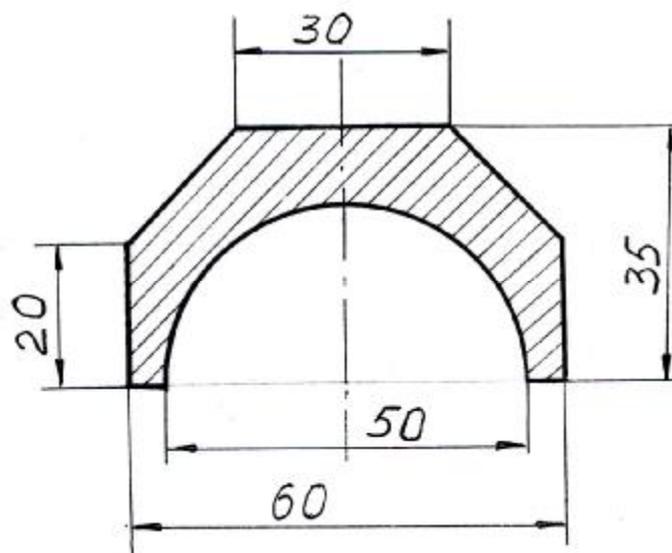


Рис. 3.3

Заданная трехстержневая система имеет бесконечно большое число степеней свободы.

Придав стержням простые деформированные формы, получим упрощенную расчетную модель, положение которой определяется линейными и угловыми перемещениями граничных сечений стержней.

Такая деформированная система изображена на рисунке 3.4.

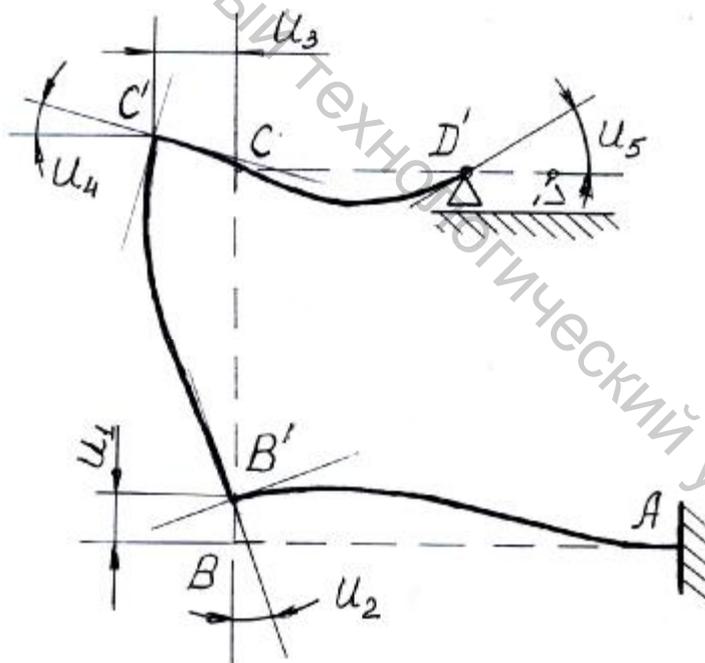


Рис. 3.4

Здесь учтены лишь изгибные деформации. То есть полагается, что вертикальное перемещение сечения С равно вертикальному перемещению сечения В. Так же равны горизонтальные перемещения сечений С и D. Дальнейшее упрощение системы и построение расчетной схемы возможно лишь при анализе инерционных характеристик заданной конструкции и характеристик жесткости ее элементов.

Решение задачи состоит из следующих этапов:



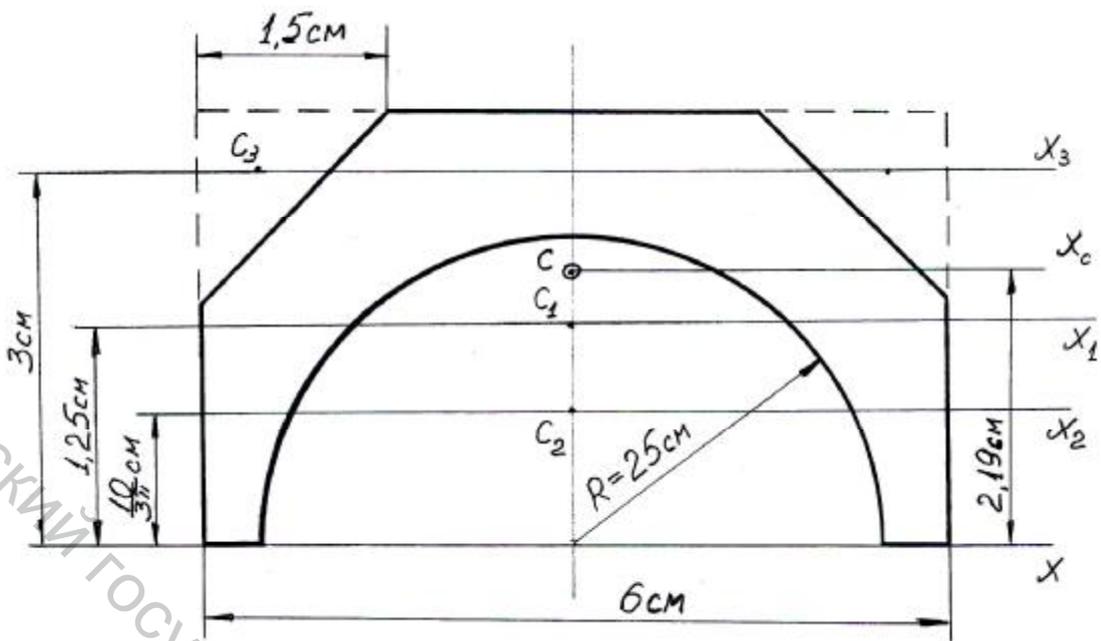


Рис. 3.6

Сечение представляется совокупностью прямоугольника с положительной площадью и полукруга и двух треугольников с отрицательной площадью.

$$A_1 = 6,0 \cdot 3,5 = 21 \text{ см}^2,$$

$$A_2 = -\frac{p \cdot 5^2}{8} = -3,125 \text{ см}^2 = 9,817 \text{ см}^2,$$

$$A_3 = A_4 = -\frac{1}{2} 1,5 \cdot 1,5 = -1,125 \text{ см}^2.$$

Площадь сечения  $A = 21 - 3,125p - 2 \cdot 1,125 = 8,939 \text{ см}^2$ . Центр тяжести полукруга удален от оси X на расстояние

$$y_2 = \frac{2d}{3} \cdot \frac{\sin \frac{p}{2}}{\frac{p}{2}} = \frac{10}{3p} \text{ см.}$$

Ордината центра тяжести составной фигуры

$$y_c = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + 2 A_3 y_3}{A} = \frac{1}{8,933} \left( 21 \cdot \frac{3,5}{2} - 3,125p \cdot \frac{10}{3p} - 2 \cdot 1,125 \cdot 3 \right) = 2,192 \text{ см.}$$

Момент инерции составной фигуры относительно центральной оси

$$\begin{aligned}
 I_{xc} = & \left[ \frac{6 \cdot 3,5^3}{12} + 21 \cdot (1,75 - 2,192)^2 \right] - \\
 & - \left[ \frac{p \cdot 5^4}{128} - \frac{p \cdot 5^2}{8} \cdot \left( \frac{10}{3p} \right)^2 + \frac{p \cdot 5^2}{8} \cdot \left( \frac{10}{3p} - 2,192 \right)^2 \right] - \\
 & - 2 \left[ 1,5 \cdot \frac{1,5^3}{36} + 1,125 \cdot (3 - 2,192)^2 \right] = 6,946 \text{ см}^4.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

### 3.3. Характеристики инертности стержней

Приняв плотность стали  $g = 7,8 \text{ г/см}^3$ , получим массу стержней

$$\begin{aligned}
 m_{AB} &= 7,8 \cdot 4 \cdot 40 = 1248 \text{ г} = 1,24 \text{ кг}, \\
 m_{BC} &= 7,8 \cdot 8,933 \cdot 35 = 2439 \text{ г} = 2,439 \text{ кг}, \\
 m_{CD} &= 7,8 \cdot 4 \cdot 30 = 936 \text{ г} = 0,936 \text{ кг}.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

### 3.4. Построение упрощенной модели

Момент инерции площади сечения стержня BC в 12,2 раза больше момента инерции сечения стержней AB и CD. При этом масса стержня BC почти в 2 раза больше массы стержня AB и в 2,5 раза больше массы стержня CD.

Пренебрегая деформацией стержня BC, получим упрощенную модель системы, состоящей из абсолютно жесткого стержня BC и безмассовых стержней AB и CD. Такая система изображена на рисунке 3.7.

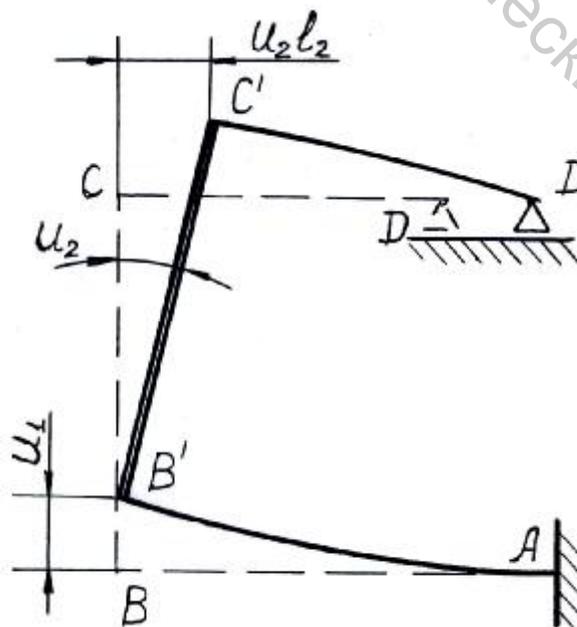


Рис. 3.7

Положение системы определим двумя координатами: вертикальным смещением узла  $B - u_1$  и углом поворота стержня  $BC - u_2$ .

Поскольку стержень BC участвует в плоско-параллельном движении, следует определить момент инерции его массы относительно центральной оси.

Момент инерции массы стержня относительно поперечной оси X

$$I_x^m = \int_m (z^2 + y^2) dm.$$

Здесь элемент массы  $dm = g dV = g dz dA$ .

$$I_x^m = g \int_V (z^2 + y^2) dz dA = gA \int_l z^2 dz + gl \int_A y^2 dA. \quad (3.4)$$

Первое слагаемое суммы (3.4) представляет собой момент инерции массы бесконечно тонкого стержня относительно оси X. Масса его

$$m = g \cdot V = gAl.$$

Если ось X принадлежит конечному сечению стержня, то

$$gA \int_l z^2 dl = \frac{ml^2}{3}.$$

Если ось X проходит через центр массы стержня, то

$$gA \int_l z^2 dl = \frac{ml^2}{12}.$$

Второе слагаемое суммы (3.4) есть момент инерции массы  $m$ , распределенной по бесконечно тонкой пластине, имеющей форму поперечного сечения стержня.

$$gl \int_A y^2 dA = \frac{gV}{A} I_x = \frac{m}{A} I_x.$$

Для стержня BC

$$\begin{aligned} I_{BC}^m &= \frac{m_{BC} l^2}{12} + \frac{m_{BC}}{A} I_{xc} = \frac{2,439}{12} 35^2 + \frac{2,439}{8,933} \cdot 6,946 = \\ &= 250,9 \text{ кгсм}^2 = 0,2509 \cdot 10^{-1} \text{ кгм}^2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

### 3.5. Уравнения упругой линии стержней AB и CD

Деформация стержня AB вызывается действием на него инертного стержня BC.

Положим, что в процессе колебательного движения системы стержень AB принимает форму, совпадающую с формой стержня под статической нагрузкой, вызвавшей вертикальное перемещение сечения  $B - u_1$  и поворот его на угол  $u_2$ . Такая деформация показана на рисунке 3.8.

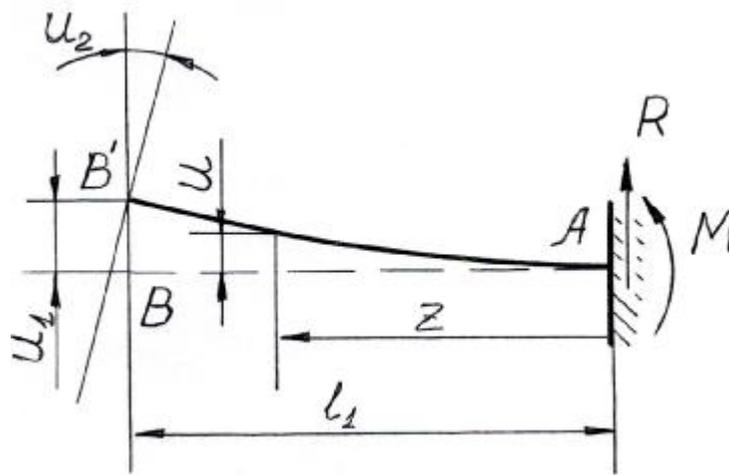


Рис. 3.8

Здесь же показана реакция опоры А. Воспользуемся методом начальных параметров, выбрав в качестве начального сечения А. Тогда  $u_0 = 0$ ,  $q_0 = 0$ . Уравнение упругой линии запишется в виде

$$EIu = \frac{1}{2}Mz^2 + \frac{1}{6}Rz^3. \quad (3.6)$$

По условию

$$u(l_1) = u_1, \quad q(l_1) = u'(l_1) = u_2$$

составим уравнения

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}Ml_1^2 + \frac{1}{6}Rl_1^3 &= EIu_1; \\ Ml_1 + \frac{1}{2}Rl_1^2 &= EIu_2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Решение системы (3.7):

$$\begin{aligned} M &= \frac{2EI}{l_1^2}(3u_1 - l_1u_2); \\ R &= \frac{6EI}{l_1^3}(-2u_1 + l_1u_2). \end{aligned} \quad (3.8)$$

На рисунке 3.9 изображен деформированный стержень CD.

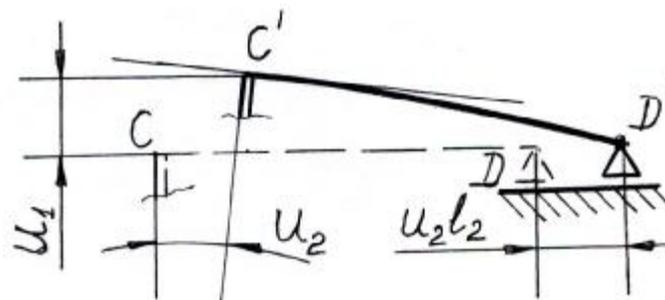


Рис. 3.9

Пренебрегая действием продольных сил положим, что горизонтальные перемещения всех сечений стержня одинаковы и равны  $u_2 l_2$ . Поскольку эти перемещения не влияют на величину потенциальной энергии упругой деформации стержня CD, учтем лишь вертикальные перемещения сечений. Эти перемещения и статическая нагрузка, вызвавшая их, изображены на рисунке (3.10).

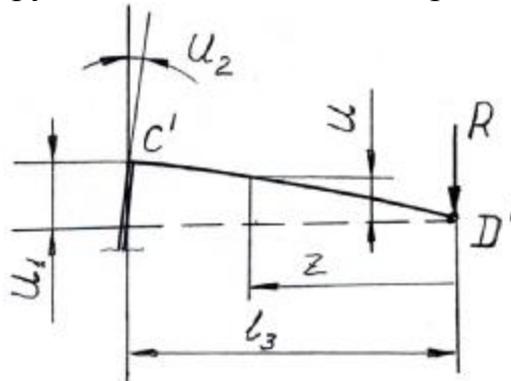


Рис. 3.10

Выбрав в качестве начального сечение D, запишем уравнение упругой линии

$$EIu = EIq_D z - \frac{R}{6} z^3. \quad (3.9)$$

По условию

$$u(l_3) = u_1, \quad u'(l_3) = u_2$$

составим уравнения

$$\begin{aligned} EIq_D l_3 - \frac{1}{6} R l_3^3 &= EIu_1; \\ EIq_D - \frac{1}{2} R l_3^2 &= EIu_2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Решение системы (3.10):

$$\begin{aligned} q_D &= \frac{1}{2l_3} (3u_1 - l_3 u_2); \\ R &= \frac{3EI}{l_3^3} (u_1 - l_3 u_2). \end{aligned} \quad (3.11)$$

### 3.6. Потенциальная энергия упругой деформации

Потенциальная энергия изогнутой балки определяется по формуле

$$\Pi = \frac{EI}{2} \int_l (u'')^2 dz. \quad (3.12)$$

Стержень АВ.

По уравнению (3.6)

$$u'' = \frac{1}{EI}(M + Rz). \quad (3.13)$$

Подставив производную (3.13) в формулу (3.12), получим

$$\Pi_{AB} = \frac{1}{2EI} \int_0^l (M + Rz)^2 dz = \frac{1}{2EI} \left( M^2 l_1 + MRl_1^2 + \frac{1}{3} R^2 l_1^3 \right)$$

С учетом найденных по формулам (3.8) значений М и R

$$\Pi_{AB} = \frac{2EI}{l_1^3} (3u_1^2 - 3l_1 u_1 u_2 + l_1^2 u_2^2). \quad (3.14)$$

Стержень CD.

По уравнению (3.9)  $u'' = -\frac{R}{EI}z$ . Здесь значение R представлено формулой (3.11).

$$\Pi_{CD} = \frac{1}{2EI} \int_0^{l_3} R^2 z^2 dz = \frac{R^2 l_3^3}{6EI} = \frac{3EI}{2l_3^3} (u_1 - l_3 u_2)^2. \quad (3.15)$$

Заметим, что потенциальную энергию деформации стержня CD можно найти, рассматривая его деформацию как деформацию консоли, изогнутой сосредоточенной силой, приложенной к сечению D. По рисунку 3.9 прогиб такой консоли равен

$$f = u_1 - l_3 u_2.$$

Потенциальная энергия деформации консоли

$$\Pi = \frac{2EI}{2l_3^3} \cdot f^2 = \frac{3EI}{2l_3^3} (u_1 - l_3 u_2)^2.$$

Найдем потенциальную энергию упругой деформации всей системы.

Жесткость сечений стержней АВ и CD

$$\begin{aligned} EI &= 2 \cdot 10^4 \cdot 0,5677 = 1,135 \cdot 10^4 \text{ кНсм}^2 = \\ &= 1,135 \cdot 10^4 \cdot 10^3 \cdot 10^{-4} = 1,135 \cdot 10^3 \text{ Нм}^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi &= \Pi_{AB} + \Pi_{CD} = \frac{2EI}{l_1^3} (3u_1^2 - 3l_1 u_1 u_2 + l_1^2 u_2^2) + \\ &+ \frac{3EI}{2l_3^3} (u_1 - l_3 u_2)^2 = \frac{2 \cdot 1,135 \cdot 10^3}{0,4^3} (3u_1^2 - 3 \cdot 0,4 u_1 u_2 + 0,4^2 u_2^2) + \\ &+ \frac{3 \cdot 1,135 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,3^3} (u_1^2 - 2 \cdot 0,3 u_1 u_2 + 0,3^2 u_2^2) = \\ &= (16,95 u_1^2 - 8,042 u_1 u_2 + 1,135 u_2^2) \cdot 10^4. \end{aligned} \quad (3.16)$$

### 3.7. Кинетическая энергия системы

Кинетическая энергия системы - это кинетическая энергия жесткого стержня BC в плоско-параллельном движении.

В соответствии с теоремой Кенига

$$\begin{aligned} T &= T_{BC}^{nocm} + T_{BC}^{ep} = \frac{1}{2} m_{BC} \left( \dot{u}_1^2 + \frac{l_2^2}{4} \dot{u}_2^2 \right) + \frac{1}{2} I^m \dot{u}_2^2 = \\ &= \frac{1}{2} m_{BC} \dot{u}_1^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{m_{BC} l_2^2}{4} + I^m \right) \dot{u}_2^2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Подстановкой в формулу (3.17) значений (3.3), (3.5) и  $l_2$  получим

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \cdot 2,439 \cdot \dot{u}_1^2 + \frac{1}{2} (2,439 \cdot 0,35^2 + 0,02509) \dot{u}_2^2 = \\ &= \frac{1}{2} (2,439 \dot{u}_1^2 + 0,09978 \dot{u}_2^2). \end{aligned} \quad (3.18)$$

### 3.8. Уравнения Лагранжа.

По выражению (3.18)

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial u_1} &= 0; \quad \frac{\partial T}{\partial u_2} = 0; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_1} \right) &= 2,439 \ddot{u}_1; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_2} \right) = 0,09978 \ddot{u}_2. \end{aligned}$$

По выражению (3.16)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial u_1} &= (33,9u_1 - 8,042u_2) \cdot 10^4; \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_2} &= (-8,042u_1 + 2,27u_2) \cdot 10^4. \end{aligned}$$

Уравнения Лагранжа:

$$\begin{aligned} 2,439 \ddot{u}_1 + 33,9 \cdot 10^4 u_1 - 8,042 \cdot 10^4 u_2 &= 0; \\ 0,09978 \ddot{u}_2 - 8,042 \cdot 10^4 u_1 + 2,27 \cdot 10^4 u_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

### 3.9. Частотное уравнение

Решение уравнений (3.19) разыскивается в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= A_1 \sin kt + B_1 \cos kt; \\ u_2 &= A_2 \sin kt + B_2 \cos kt, \end{aligned}$$

где  $k$  - циклическая частота свободных колебаний.

Поскольку оба слагаемых в представлении  $u_1$  и  $u_2$  приводят к идентичным алгебраическим уравнениям, можно ограничиться представлением решения уравнений Лагранжа в виде

$$u_1 = A_1 \sin kt, \quad u_2 = A_2 \sin kt. \quad (3.20)$$

Подстановкой выражений (3.20) в уравнения (3.19) получаем алгебраическую систему

$$(2,439k^2 - 33,9 \cdot 10^4)A_1 + 8,042 \cdot 10^4 A_2 = 0; \quad (3.21)$$

$$8,042 \cdot 10^4 A_1 + (0,09978k^2 - 2,27 \cdot 10^4)A_2 = 0.$$

Приравняв нулю определитель системы (3.21), получим частотное уравнение

$$0,2434k^4 - 8,919 \cdot 10^4 k^2 + 12,28 \cdot 10^8 = 0. \quad (3.22)$$

Решение уравнения (3.22):

$$k_1^2 = 1,433 \cdot 10^4, \quad k_1 = 120c^{-1}; \quad (3.23)$$

$$k_2^2 = 35,21 \cdot 10^4, \quad k_2 = 593c^{-2}.$$

Здесь  $k_1$  - частота основного тона.

По одному из уравнений (3.21), например, по первому, найдем соотношение горизонтального перемещения  $u_2 l_2$  и вертикального перемещения  $u_1$  сечения С при каждом значении  $k$ . Оно равно

$$\frac{u_2 l_2}{u_1} = \frac{A_2 l_2}{A_1} = \frac{33,9 \cdot 10^4 - 2,439k^2}{8,042 \cdot 10^4} \cdot 0,35.$$

При  $k = 120c^{-1}$

$$\frac{A_2 l_2}{A_1} = \frac{33,9 \cdot 10^4 - 2,439 \cdot 1,433 \cdot 10^4}{8,042 \cdot 10^4} = 1,32.$$

При  $k_2 = 593c^{-1}$

$$\frac{u_2 l_2}{u_1} = \frac{A_2 l_2}{A_1} = \frac{33,9 \cdot 10^4 - 2,439 \cdot 35,21 \cdot 10^4}{8,042 \cdot 10^4} = -2,26.$$

Показав на изображенной на рисунке 3.7 деформированной системе координаты  $u_1$  и  $u_2$ , мы тем самым ввели направления отсчета их положительных значений.

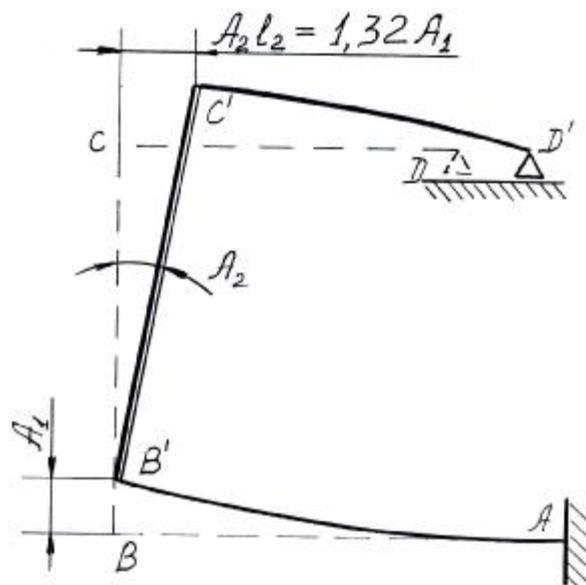


Рис. 3.11

При собственной частоте  $k_1 = 120\text{с}^{-1}$  знаки перемещений  $u_2l_2$  и  $u_1$  совпадают. Эта форма изображена на рисунке 3.11. При частоте  $k_2 = 593\text{с}^{-1}$  положительной координате  $u_1$  соответствует отрицательное значение  $u_2$ . Значит при смещении сечения С вверх оно получит горизонтальное перемещение влево. Эта форма изображена на рисунке 3.12.

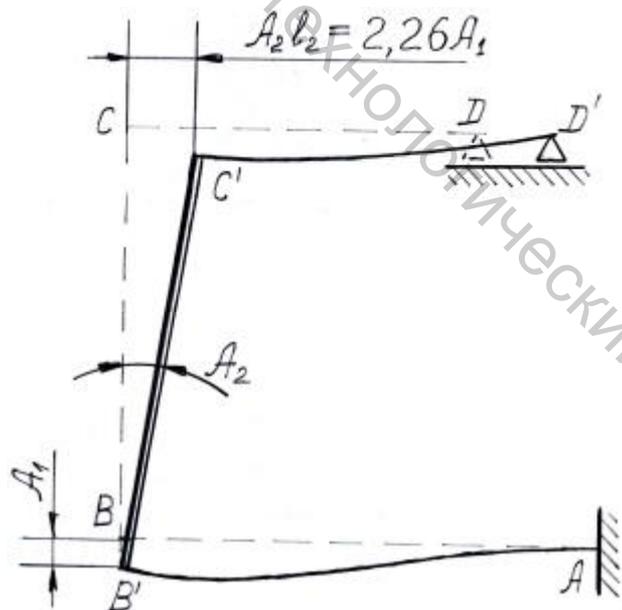


Рис. 3.12

Проверим ортогональность форм, то есть удовлетворение уравнения  $m_1 A_{11} A_{21} + m_2 A_{12} A_{22} = 0$ .

Здесь  $m_1 = 2,439\text{кг}$ ,  $m_2 = 0,09978\text{кгм}^2$ ,

$$A_{12} = \frac{33,9 \cdot 10^4 - 2,439 \cdot 1,433 \cdot 10^4}{8,042 \cdot 10^4} A_{11} = 3,78 A_{11},$$

$$A_{22} = \frac{33,9 \cdot 10^4 - 2,439 \cdot 35,21 \cdot 10^4}{8,042} \cdot A_{21} = -6,463 A_{21}.$$

Скалярное произведение

$$m_1 A_{11} A_{21} + m_2 A_{12} A_{22} = 2,439 \cdot A_{11} \cdot A_{21} + 0,09978 \cdot 3,78 A_{11} (-6,463 A_{21}) =$$

$$= 2,439 A_{11} A_{21} - 2,438 A_{11} A_{21} = 0,001 A_{11} A_{22}.$$

## Лекция 8

### 3.10. Учет массы гибких стержней АВ и CD.

Пренебрегая массой гибких стержней ради упрощения решения задачи, мы несколько занизили кинетическую энергию системы. В результате полученные расчетные значения собственных частот получились завышенными.

Теперь учтем массы стержней АВ и CD и найдем значения их кинетической энергии.

Стержень АВ. (рисунок 3.8)

По уравнению упругой линии (3.6)

$$w = \frac{1}{6EI} (3Mz^2 + Rz^3),$$

Кинетическая энергия

$$T_{AB} = \frac{m_{AB}}{2l_{AB}} \int_0^{l_1} \dot{w}^2 dz = \frac{m_{AB}}{2 \cdot 36(EI)^2 l_1} \int_0^{l_1} (9M^2 z^4 + 6MRz^5 + R^2 z^6) dz =$$

$$= \frac{m_{AB}}{72(EI)^2} \left[ \frac{9}{5} M^2 l_1^4 + MRl_1^5 + \frac{1}{7} R^2 l_1^6 \right]. \quad (3.24)$$

В соответствии с формулами (3.8) производные  $\dot{M}$  и  $\dot{R}$  выражаются через обобщенные скорости  $\dot{w}_1$  и  $\dot{w}_2$ :

$$\dot{M} = \frac{2EI}{l_1^2} (\dot{w}_1 - l_1 \dot{w}_2);$$

$$\dot{R} = \frac{6EI}{l_1^3} (-2\dot{w}_1 + l_1 \dot{w}_2). \quad (3.25)$$

После подстановки выражений (3.25), а также массы  $m_1$  и длины  $l_1$  в формулу (3.24) кинетическая энергия стержня АВ

$$T_{AB} = 0,231 \dot{w}_1^2 - 0,02615 \dot{w}_1 \dot{w}_2 + 0,0009509 \dot{w}_2^2.$$

Стержень CD.

По уравнению упругой линии (3.9)

$$w = \frac{1}{6EI} (6EIq_D z - R z^3).$$

Кинетическая энергия

$$\begin{aligned} T_{CD} &= \frac{m_{CD}}{2l_3} \int_0^{l_3} \dot{w}^2 dz = \\ &= \frac{m_{CD}}{2 \cdot 36(EI)^2 l_3} \int_0^{l_3} \left[ 36(EIq_D)^2 z^2 - 12EIq_D R z^4 + R^2 z^6 \right] dz. \end{aligned}$$

С учетом формул (3.11), значения массы  $m_3$  и длины  $l_3$ , кинетическая энергия стержня CD:

$$T_{CD}^{верт} = 0,2273 \dot{u}_1^2 - 0,02407 \dot{u}_1 \dot{u}_2 + 0,0008023 \dot{u}_2^2;$$

$$T_{CD}^{гор} = \frac{1}{2} m_{CD} l_2^2 \dot{u}_2^2 = \frac{1}{2} 0,936 \cdot 0,35^2 \dot{u}_2^2 = 0,05733 \dot{u}_2^2.$$

Теперь кинетическая энергия системы

$$T_{BC} + T_{AB} + T_{CD} = 1,679 \dot{u}_1^2 - 0,05022 \dot{u}_1 \dot{u}_2 + 0,1090 \dot{u}_2^2.$$

Уравнения Лагранжа:

$$\begin{aligned} 3,358 \ddot{u}_1 - 0,05022 \ddot{u}_2 + 33,9 \cdot 10^4 u_1 - 8,042 \cdot 10^4 u_2 &= 0; \\ -0,05022 \ddot{u}_1 + 0,2179 \ddot{u}_2 - 8,042 \cdot 10^4 u_1 + 2,27 \cdot 10^4 u_2 &= 0. \end{aligned}$$

Подстановкой в уравнения Лагранжа выражений (3.20) построим алгебраическую систему

$$\begin{aligned} (3,359k^2 - 33,9 \cdot 10^4) A_1 - (0,05022k^2 - 8,042 \cdot 10^4) A_2 &= 0; \\ -(0,05022k^2 - 8,042 \cdot 10^4) A_1 + (0,2179k^2 - 2,27 \cdot 10^4) A_2 &= 0. \end{aligned}$$

Частотное уравнение

$$(3,359k^2 - 33,9 \cdot 10^4)(0,2179k^2 - 2,27 \cdot 10^4) - (0,05022k^2 - 8,042 \cdot 10^4)^2 = 0,$$

или

$$0,7294k^4 - 14,204 \cdot 10^4 k^2 + 12,279 \cdot 10^8 = 0. \quad (3.26)$$

Решения уравнения (3.26):

$$k^2 = \frac{1}{0,7294} \left[ 7,102 \cdot 10^4 \pm \sqrt{7,102^2 \cdot 10^8 - 0,7294 \cdot 12,279 \cdot 10^8} \right].$$

$$k_1^2 = 0,9067 \cdot 10^4; \quad k_1 = 95,2c^{-1}.$$

$$k_2^2 = 18,57 \cdot 10^4; \quad k_2 = 431c^{-1}.$$

Сравним эти значения со значениями собственных частот, полученных без учета масс гибких стержней.

$$(k_1 = 120c^{-1}, k_2 = 593c^{-1}). \quad \text{Расхождение составляет 26\% и 37,5\%}.$$

## Лекция 9

### 4. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТРЕЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

Пусть к сечению В рассмотренной в задании системы приложена вертикальная возмущающая сила, меняющаяся по закону

$$P = P_0 \sin wt \quad (\text{рисунок 4.1}).$$

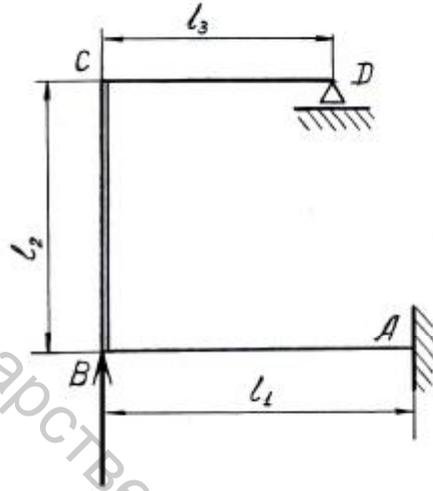


Рис. 4.1

Уравнения Лагранжа принимают вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial u_1} + \frac{\partial \Pi}{\partial u_1} = P_0 \sin wt;$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial u_2} + \frac{\partial \Pi}{\partial u_2} = 0.$$

Пользуясь найденными выражениями (3.16) и (3.18) потенциальной и кинетической энергии, получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} 2,439 \ddot{u}_1 + 33,9 \cdot 10^4 u_1 - 8,042 \cdot 10^4 u_2 &= P_0 \sin wt; \\ 0,09978 \ddot{u}_2 - 8,042 \cdot 10^4 u_1 + 2,27 \cdot 10^4 u_2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Установившееся движение описывается частным решением системы

$$u_1 = B_1 \sin wt, \quad u_2 = B_2 \sin wt. \quad (4.2)$$

Подстановка частного решения (4.2) в дифференциальные уравнения (4.1) приводит к алгебраической системе

$$\begin{aligned} (2,439w^2 - 33,9 \cdot 10^4) B_1 + 8,042 \cdot 10^4 B_2 &= -P_0; \\ 8,042 \cdot 10^4 B_1 + (0,09978w^2 - 2,27 \cdot 10^4) B_2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Определитель системы (4.3)

$$D = 0,2434w^4 - 8,919 \cdot 10^4 w^2 + 12,28 \cdot 10^8. \quad (4.4)$$

Решая систему (4.3) относительно амплитуд вынужденных колебаний  $B_1$  и  $B_2$ , получим:

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{P_0}{D} (2,27 \cdot 10^4 - 0,09978 \cdot w^2); \\ B_2 &= \frac{P_0}{D} \cdot 8,042 \cdot 10^4. \end{aligned} \quad (4.5)$$

По этим формулам строится частотно- амплитудная диаграмма.

Заметим, что при частоте возмущения  $W$ , совпадающей с собственной частотой  $k_1$  или  $k_2$ , определитель (4.4) алгебраической системы (4.3) совпадает с левой частью частотного уравнения (3.22). То есть при  $W = k_1$  или  $W = k_2$   $D=0$ .

В этом случае амплитуды (4.5) становятся неограниченными, то есть имеет место резонанс.

Поэтому собственные частоты упругой системы называются резонансными.

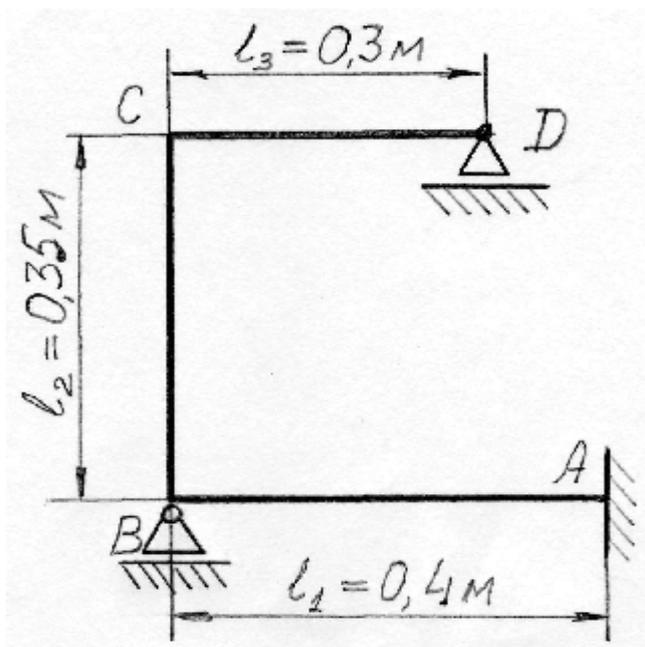
Амплитуда  $B_1$  при определённом значении частоты возмущения  $W$  может оказаться равной нулю, что говорит об отсутствии колебания по координате  $u_1$ . Это явление называется антирезонансом.

Приравняв нулю амплитуду  $B_1$  решения (4.5)

$$2,27 \cdot 10^4 - 0,09978w^2 = 0,$$

найдем частоту антирезонанса

$$w_0 = \sqrt{\frac{2,27 \cdot 10^4}{0,09978}} = 477 \text{ с}^{-1}.$$



Равенство нулю амплитуды  $B_1$  позволяет рассматривать сечение В как закрепленное шарнирно подвижной опорой. Значит, вынужденные колебания исследуемой рамы при частоте антирезонанса аналогичны свободным колебаниям рамы с одной степенью свободы, изображенной на рисунке 4.2.

Рис. 4.2

Подстановкой в формулы (4.5) значения  $w = 0$  получим перемещения  $u_1$  и  $u_2$  при статической нагрузке, равной  $P_0$ .

$$u_{1cm} = \frac{2,27 \cdot 10^4 P_0}{12,28 \cdot 10^8} = 0,1849 \cdot 10^{-4} P_0;$$

$$u_{2cm} = \frac{8,042 \cdot 10^4 P_0}{12,28 \cdot 10^8} = 0,6549 \cdot 10^{-4} P_0.$$

Как и в случае системы с одной степенью свободы найдем динамические коэффициенты:

$$b_1 = \frac{B_1}{u_{1cm}} = \frac{P_0 (2,27 \cdot 10^4 - 0,09978w^2)}{D \cdot 0,1849 \cdot 10^{-4} \cdot P_0} = \frac{12,28 \cdot 10^4 - 0,5396w^2}{D} \cdot 10^4;$$

$$b_2 = \frac{B_2}{u_{2cm}} = \frac{P_0 \cdot 8,042 \cdot 10^4}{P_0 \cdot 0,6549 \cdot 10^{-4} D} = \frac{12,28 \cdot 10^8}{D}. \quad (4.6)$$

Формулы (4.6) позволяют построить диаграмму, аналогичную частотно-амплитудной. Она изображена на рисунке 4.3.

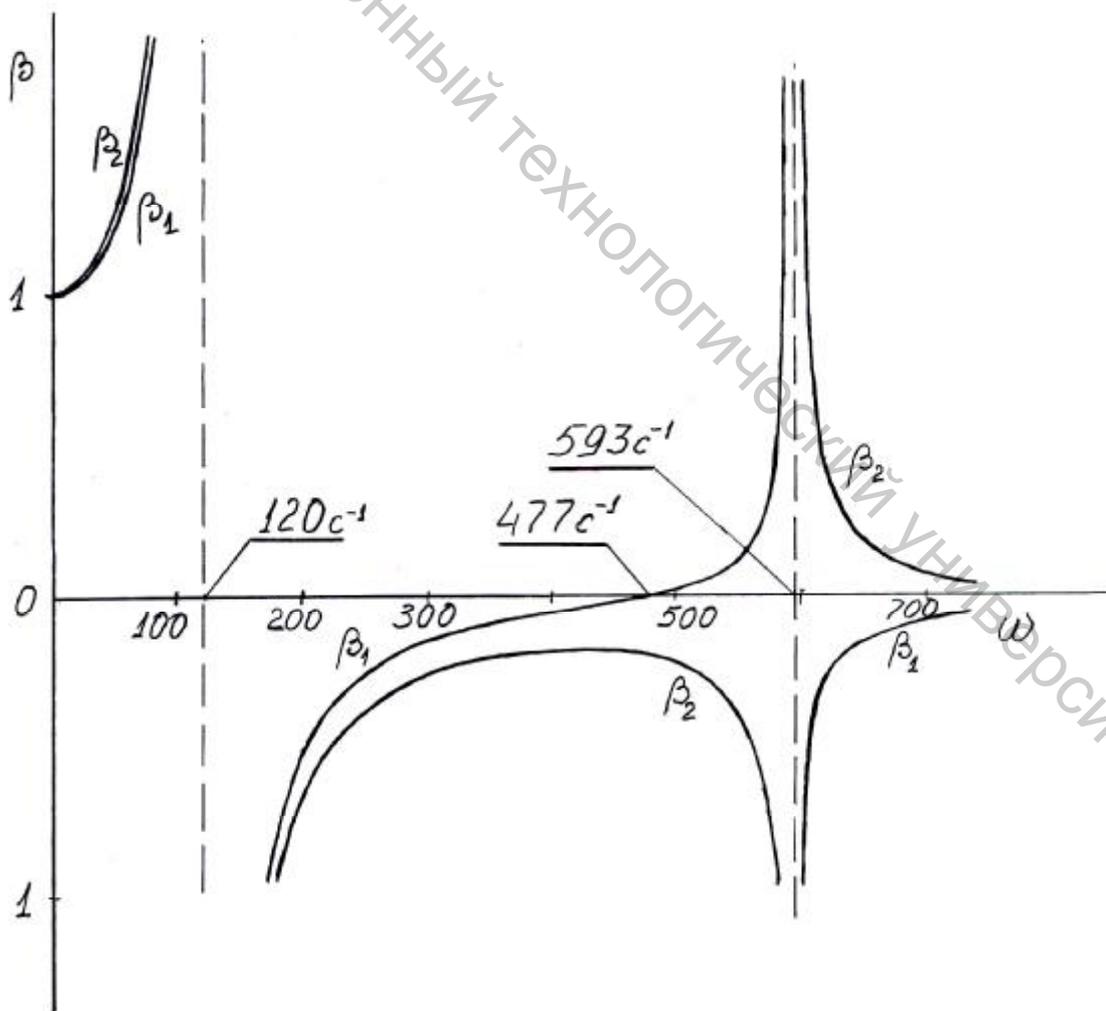


Рис. 4.3

Покажем форму деформированной системы при различных значениях частоты возмущения. Напомним, что направления отсчета положительных значений координат  $u_1$  и  $u_2$  и возмущающей силы  $P$  при  $\sin wt > 0$  показано на рисунках 3.7 и 4.1. Соотношение перемещений  $u_2 l_2$  и  $u_1$  найдем по формулам (4.5)

$$\frac{u_2 l_2}{u_1} = \frac{B_2 l_2}{B_1} = \frac{8,042 \cdot 10^4 \cdot 0,35}{2,27 \cdot 10^4 - 0,9978 \cdot 10^2} \quad (4.7)$$

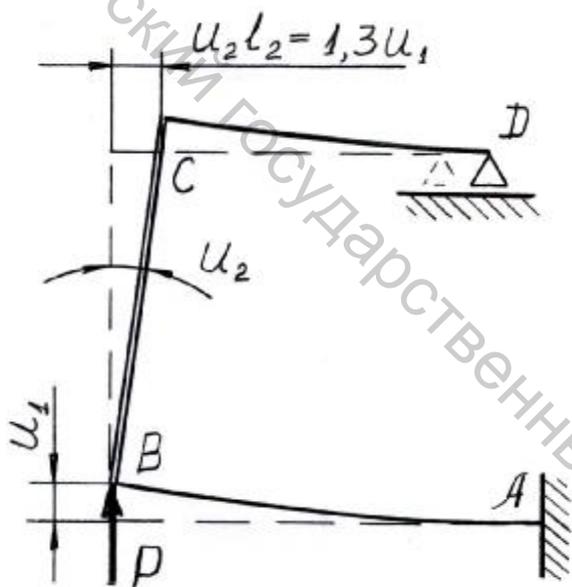


Рис. 4.4

При  $0 < w < k_1 = 120 c^{-1}$  оба значения  $b_1$  и  $b_2$  положительные. Значит при  $P > 0$   $u_1 > 0$  и  $u_2 > 0$ . Взяв для примера  $w = 60 c^{-1}$ , получим

$$\frac{u_2 l_2}{u_1} = \frac{8,042 \cdot 10^4 \cdot 0,35}{2,27 \cdot 10^4 - 0,9978 \cdot 60^2} = 1,3. \quad (\text{рисунок 4.4}).$$

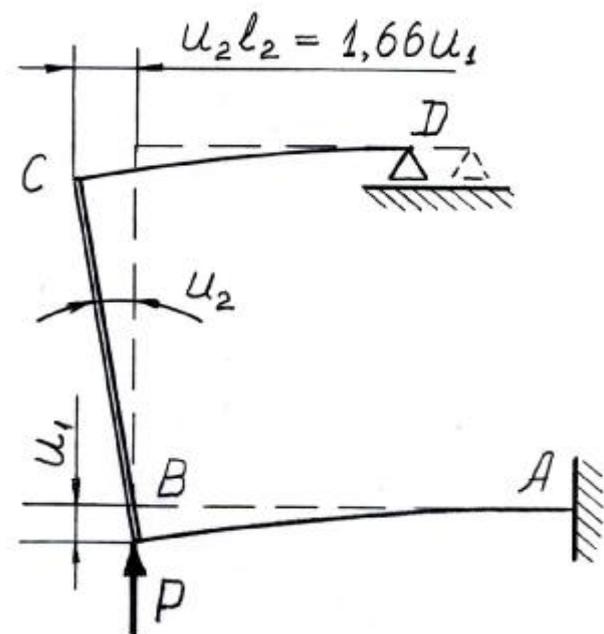


Рис. 4.5

При  $k_1 < w < w_0$ , где  $w_0$  - частота антирезонанса, равная  $477 c^{-1}$ ,  $b_1 < 0$  и  $b_2 < 0$ .

Значит при  $P > 0$   $u_1 < 0$  и  $u_2 < 0$ .

Например,

при  $w = 240 c^{-1}$

$$\frac{u_2 l_2}{u_1} = \frac{8,042 \cdot 10^4 \cdot 0,35}{2,27 \cdot 10^4 - 0,9978 \cdot 240^2} = 1,66. \quad (\text{рисунок 4.5}).$$

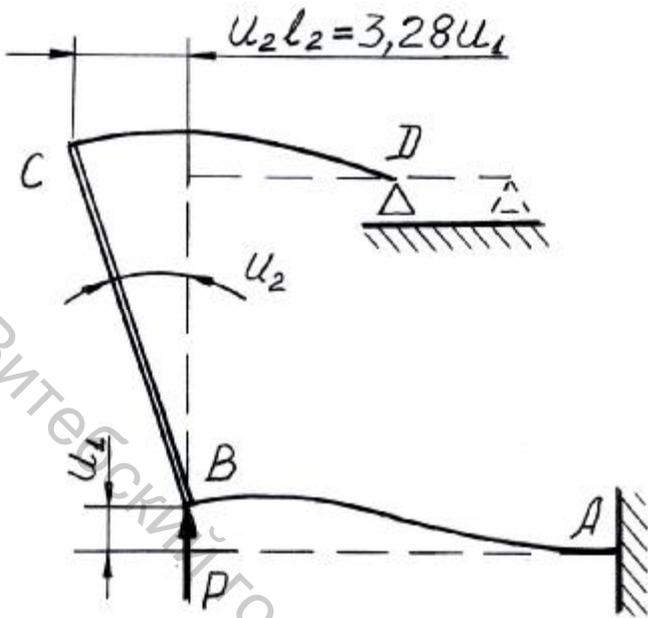


Рис. 4.6

При  $w_0 < w < k_2$   $b_1 > 0$ ,  $b_2 < 0$ .  
 Значит при  $P > 0$   $u_1 > 0$  и  $u_2 < 0$ .  
 Возьмем для примера  $w = 560 \text{ с}^{-1}$

$$\frac{u_2 l_2}{u_1} = \frac{8,042 \cdot 10^4 \cdot 0,35}{2,27 \cdot 10^4 - 0,09978 \cdot 560^2} = -3,28$$

(рисунок 4.6).

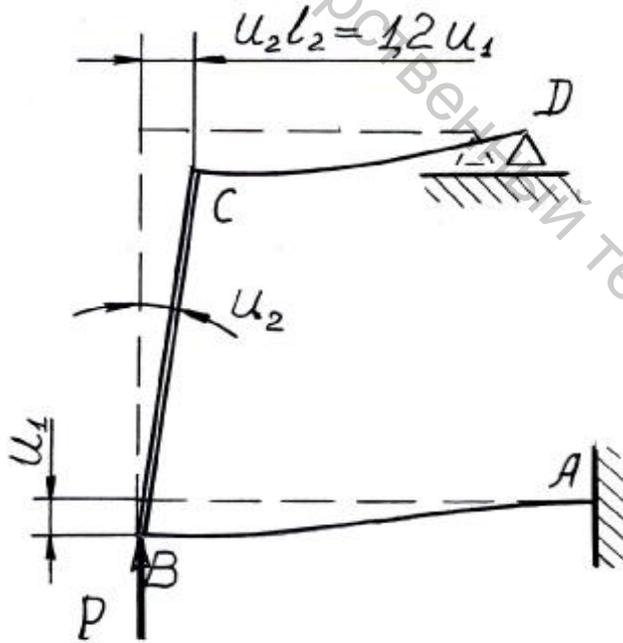


Рис. 4.7

При  $k_2 < w < \infty$   $b_1 < 0$ ,  $b_2 > 0$ .  
 При  $P > 0$   $u_1 < 0$  и  $u_2 > 0$ . При  
 $w = 680 \text{ с}^{-1}$

$$\frac{u_2 l_2}{u_1} = \frac{8,042 \cdot 10^4 \cdot 0,35}{2,27 \cdot 10^4 - 0,09978 \cdot 680^2} = -1,20$$

(рисунок 4.7).

## 5. ЗАДАНИЕ К РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЕ

На рисунках 5.1 и 5.2 представлены схемы упругой системы, состоящие из трех стержней. Варианты поперечного сечения стержня, изображенного двойной линией, представлены на рисунках 5.3 и 5.4. Остальные стержни имеют прямоугольное сечение. К сечению D системы, показанной на рисунке 5.2, прикреплена сосредоточенная масса  $m_0$ . Номер схемы, длины стержней, номер составного сечения, размеры  $a$  и  $c$  сечения и масса  $m_0$  задаются преподавателем. Размер  $b$  составного сечения определяется по формулам:

Сечение 1  $b = 0,6c$ .

Сечение 2  $b = 0,25(a + c)$ .

Сечение 3  $b = \frac{0,7a \cdot c}{\sqrt{a^2 - c^2}}$ .

Сечение 4  $b = 0,4\sqrt{a^2 - c^2}$ .

Сечение 5  $b = 0,5c$ .

Сечение 6  $b = \frac{3a \cdot c}{4a - 3c}$ .

Требуется:

1. Найти моменты инерции сечений стержней, относительно их центральных осей.
2. Сравнить жесткости сечений стержней и, построив упрощенную модель заданной системы, ввести обобщенные координаты.
3. Найти массы и моменты инерции массы стержней, необходимые для определения кинетической энергии системы.
4. Принимая во внимание перемещения крайних сечений стержней, их закрепления и взаимодействия с соседними стержнями, построить уравнения их упругих линий.
5. Найти потенциальную энергию упругой деформации системы, выразив ее через обобщенные координаты.
6. Найти кинетическую энергию системы, выразив ее через обобщенные скорости.
7. Построить уравнения Лагранжа второго рода и частотное уравнение.
8. Найти резонансные частоты и построить главные формы колебаний.

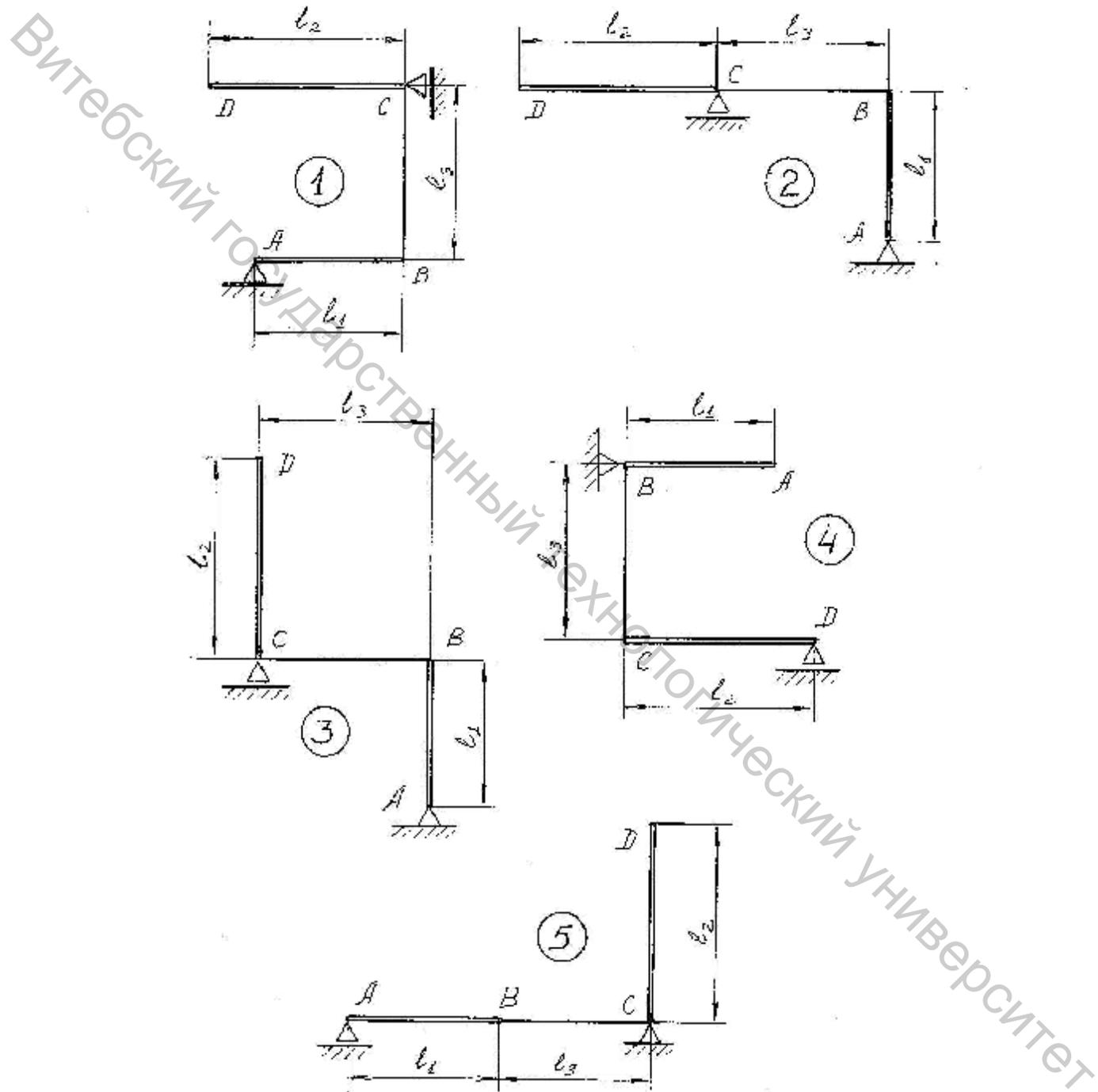


Рис. 5.1

Витебский государственный технологический университет

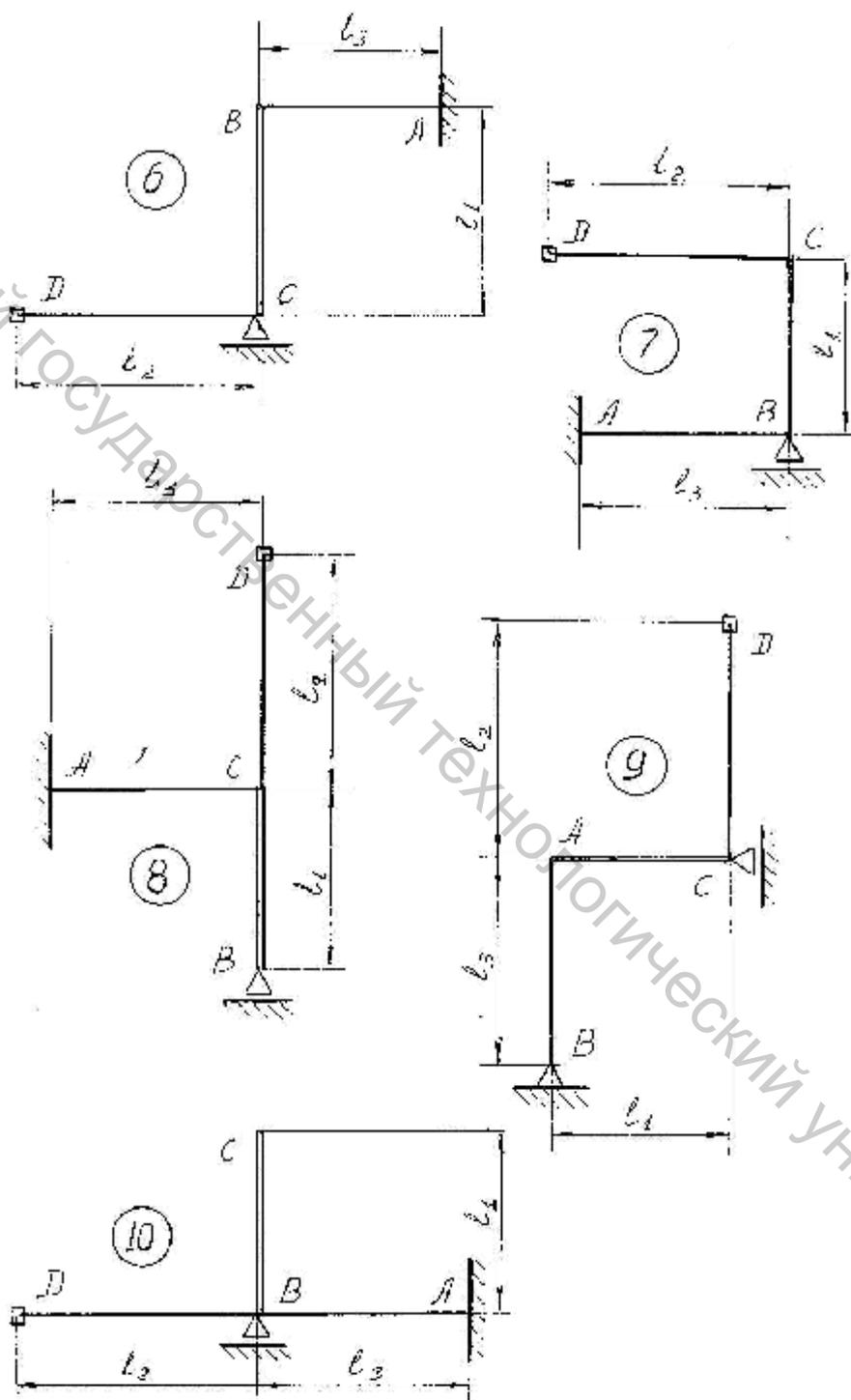


Рис. 5.2

Витебский государственный технологический университет

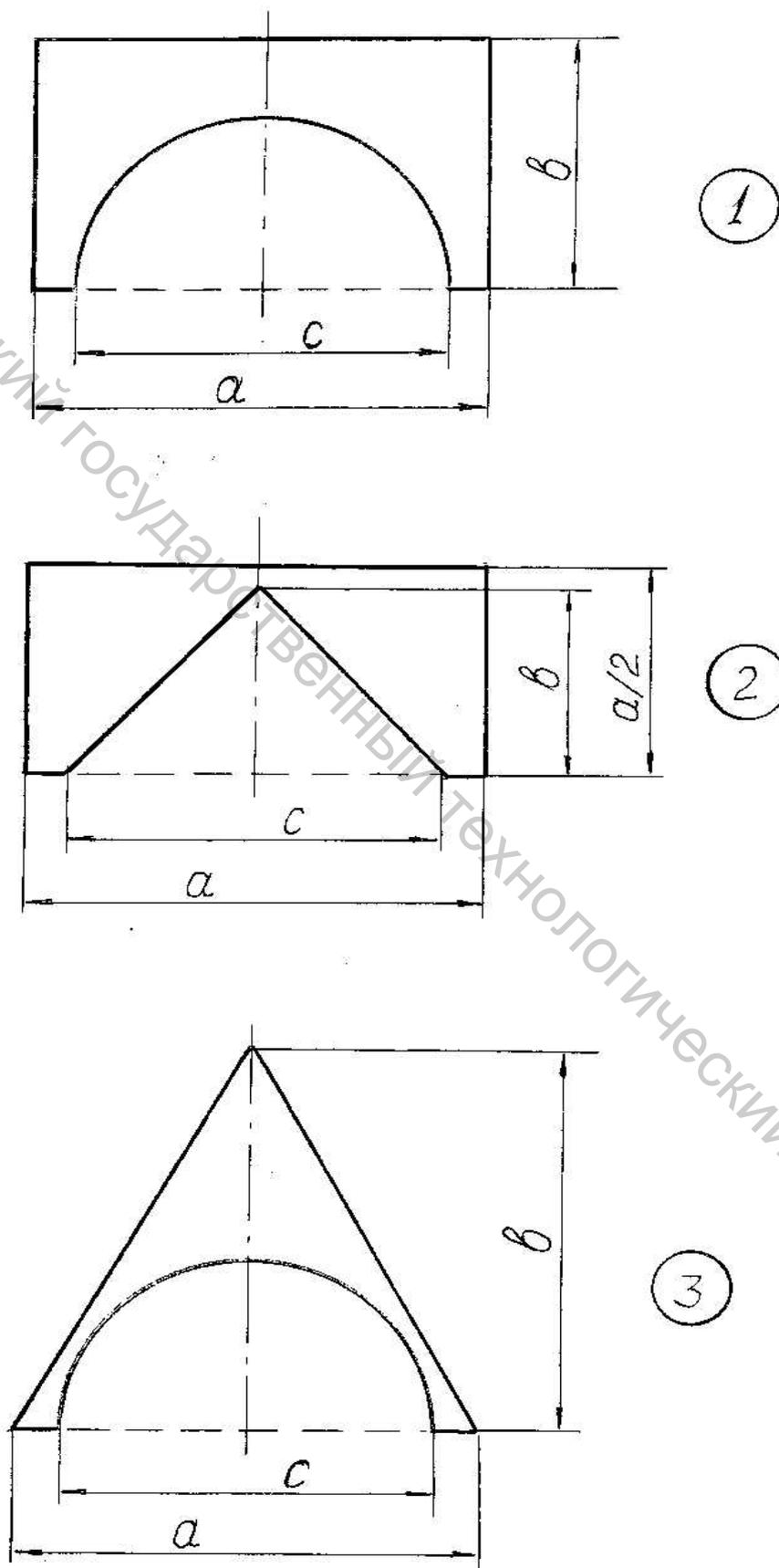
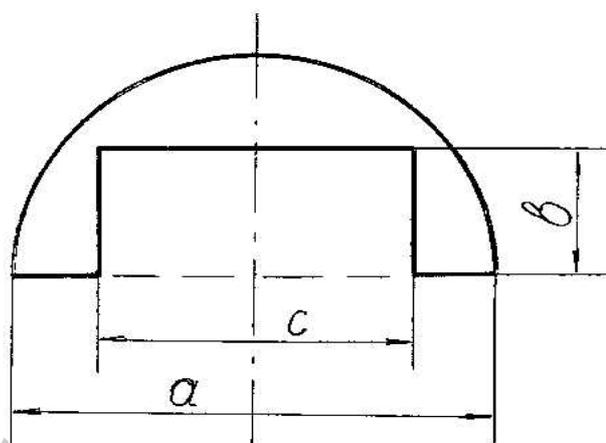
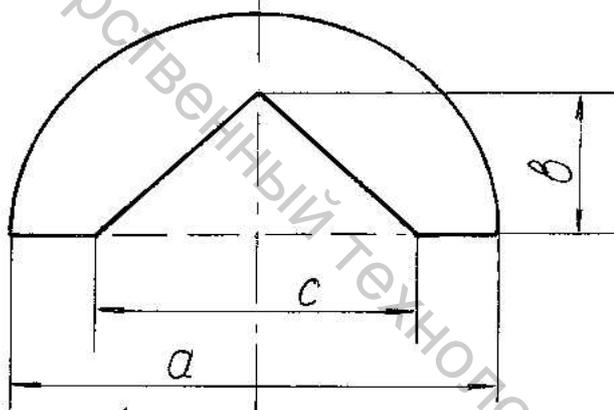


Рис. 5.3

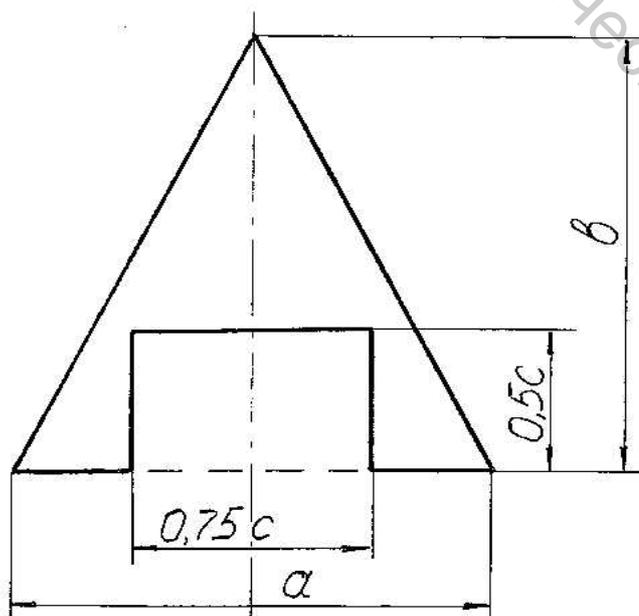
Витебский государственный технологический университет



4



5



6

Рис. 5.4

### Рекомендуемая литература:

1. Пановко, Я. Г. Основы прикладной теории упругих колебаний / Я. Г. Пановко. – Москва : Машиностроение, 1967. – 316 с.
2. Пановко, Я. Г. Введение в теорию механических колебаний : учебное пособие для втузов / Я. Г. Пановко. – Москва : Наука, 1971. – 239 с.
3. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов : учебник для втузов / В. И. Феодосьев. - Москва : Наука, 1986. - 512 с.
4. Свободные колебания стержневых систем : методические указания / сост. А. А. Калинин, Г. Н. Федосеев. – Витебск : ВТИЛП , 1994. - 22 с.
5. Резонанс колебаний : методические указания / сост. А. А. Калинин, Г. Н. Федосеев. – Витебск : ВГТУ, 1996 – 35 с.
6. Расчетно-проектировочная работа по сопротивлению материалов "Колебания корпуса швейного полуавтомата" : методические указания / сост. А. А. Калинин. – Витебск : ВГТУ , 1998 – 15 с.

Витебский государственный технологический университет

Учебное издание

**Калинин Александр Анатольевич**  
**Петухов Виталий Викторович**

**КОЛЕБАНИЯ УПРУГОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ  
СВОБОДЫ**

Курс лекций

Редактор Федосеев Г.Н.  
Технический редактор Германенко Л.Г.  
Корректор Богачёва Е.М.  
Компьютерная верстка Германенко Л.Г.

---

Подписано к печати 30.01.09 . Формат 60x84/1/16. Бумага офсетная №1.  
Гарнитура "Таймс". Усл. печ. листов 4.0 . Уч.-изд. листов 4.3 .  
Тираж \_\_\_ экз. Заказ № 62 .

Учреждение образования "Витебский государственный технологический университет" 210035, г.Витебск, Московский пр., 72.

Отпечатано на ризографе учреждения образования "Витебский государственный технологический университет".  
Лицензия № 02330/0133005 от 01 апреля 2004г.