УДК 519.6

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ АПОЛЛОНИЯ

А.И. Шлупакова, Ю.В. Трубников, Н.Е. Трубникова

УО «Витебский государственный технологический университет»

Задача Аполлония о кратчайшем расстоянии от точки до эллипса, решаемая в ([1], с. 96) методом множителей Лагранжа, приводит к уравнению четвертой степени относительно множителя Лагранжа, что практически имеет мало пользы. В данной работе задача Аполлония решается приближенно методом малого параметра.

Запишем уравнение эллипса в каноническом виде:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Квадрат расстояния r до точек эллипса от точки $M(x_0,\, y_0)$ определяется равенством

$$r^2(x,y)=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2. \tag{1}$$

Записывая уравнение эллипса в параметрическом виде

$x=a\cos t,\quad y=b\sin t \quad (0\le t\le 2\pi),$

получаем зависимость $r^2(t)=(a\cos t-x_0)^2+(b\sin t-y_0)^2$.

Т е о р е м а. Пусть $x_0>0, y_0>0,\ x_0^2/a^2+y_0^2/b^2>0$, тогда точка эллипса, в которой достигается минимальное расстояние от точки $M(x_0,\, y_0)$, имеет координаты

$$x_1=\frac{a}{\sqrt{1+tg^2t}},\quad y_1=\frac{b\,tgt}{\sqrt{1+tg^2t}}, \tag{2}$$

где

$$tgt=\frac{y_0}{x_0}\left[1+\delta\left(1-\frac{l^2}{a^2}\right)\right],\ \delta=\frac{a}{l}-\frac{1}{2},\ l=\sqrt{x_0^2+y_0^2}.$$

Минимальное расстояние находится по формуле

$$r_{\min}=\sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{1+tg^2t}}-x_0\right)^2+\left(\frac{btgt}{\sqrt{1+tg^2t}}-y_0\right)^2}. \tag{3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Найдем производную

$$\frac{dr^2(t)}{dt}=2(a\cos t-x_0)(-a\sin t)+2(b\sin t-y_0)b\cos t=$$

$$=2(b^2-a^2)\cos t\sin t+2ax_0\sin t-2by_0\cos t. \tag{4}$$

Приравнивая выражение (4) к нулю, получаем уравнение

$$(b^2-a^2)\cos t\sin t+ax_0\sin t-by_0\cos t=0. \tag{5}$$

Выражая $\cos t$ и $\sin t$ через tgt по формулам

$$\cos t = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 t}}, \quad \sin t = \frac{tgt}{\sqrt{1+tg^2 t}},$$

приведем уравнение (5) к виду

$$\frac{\left(b^2-a^2\right)g}{1+g^2}+\frac{ax_0 g}{\sqrt{1+g^2}}-\frac{by_0}{\sqrt{1+g^2}}=0, \tag{6}$$

где $g = tgt$. Далее, так как

$a^2 - b^2 = \varepsilon^2 a^2, \quad b = a\sqrt{1-\varepsilon^2},$

где ε–эксцентриситет эллипса $(0 \le \varepsilon < 1)$, и обозначив $\varepsilon^2 = \tau$, приведем уравнение (6) к виду

$$-\frac{\tau a g}{\sqrt{1+g^2}}+x_0 g-\sqrt{1-\tau}\, y_0 = 0. \tag{7}$$

Уравнение (7) определяет неявным образом функцию $g(\tau)$. При $\tau = 0$ из равенства (7) получаем $g(0) = g_0 = y_0 / x_0$, что соответствует случаю окружности.

Далее найдем производную по переменной τ от обеих частей равенства (7):

$$-\frac{ag}{\sqrt{1+g^2}}-\frac{\tau a g'(\tau)}{\sqrt{1+g^2}}+\tau a g\left(1+g^2\right)^{-\frac{3}{2}} g(\tau) g'(\tau)+$$

$$x_0 g'(\tau)+\frac{y_0}{2\sqrt{1-\tau}}=0.$$

При $\tau = 0$ получаем

$$g'(0)=\left(\frac{a}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}-\frac{1}{2}\right)g_0.$$

Таким образом, применяя формулу Тейлора, получаем

$$tgt = g(\tau) \approx g_0 + g_0\left(\frac{a}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}-\frac{1}{2}\right)\varepsilon^2 =$$

$$\frac{y_0}{x_0}\left[1+\delta\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\right],$$

где

$$\delta = \frac{a}{l}-\frac{1}{2}, \quad l = \sqrt{x_0^2+y_0^2}.$$

Равенство (3) очевидным образом вытекает из формулы расстояния между двумя точками в декартовых координатах.

Список использованных источников

1. Алексеев, В. М. Оптимальное управление / В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин – М. : Наука, 1979.