Заключение

Проведен теоретический анализ технологических и механических параметров установки:

- влияния взаимосвязи скоростей вращения заготовки и перемещения нити на физико-механические свойства готового изделия;
- тепловых параметров полимеризации связующего.

Разработаны новые, оригинальные схемы пропитки и натяжения нити на основе результатов проведенного анализа. Разработана конструкция автоматической установки для формования сосудов высокого давления из стеклокомпозита.

Разработанная установка может применятся для формования сосудов высокого давления из стеклокомпозита методом намотки. Установка отличается высокой производительностью (за счет одновременного производства 5-ти сосудов) и универсальностью.

УДК 517.925

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛАХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ С НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ ВЫШЕ КУБИЧЕСКОЙ ПО ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

М.А. Коваленко, А.С. Караваева, Е.В. Назаренко, А.Э. Попова, Ю.И. Салашенко, В.С. Денисов

УО «Витебский государственный технологический университет»

В статье [1] для системы с кубической нелинейностью

$$\frac{dx}{dt} = Ay^3 + By + f(x), \qquad \frac{dy}{dt} = g(x), \qquad A > 0,\ B > 0 \tag{1}$$

найдены достаточные условия существования предельных циклов при нарушении на некотором интервале первого неравенства обобщенных условий Гурвица

$$xf(x) < 0,\ \ xg(x) < 0 \text{ при } x \neq 0,\ \ f(0) = g(0) = 0\,. \tag{2}$$

При значениях $A = 0,\ B = 1$ из (1) получаем систему нелинейных колебаний (систему Льенара).

В данной работе рассматриваются системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = Ay^7 + By^3 + f(x), \qquad \frac{dy}{dt} = g(x), \qquad A > 0,\ B > 0, \tag{3}$$

$$\frac{dx}{dt} = Ay^{11} + By^3 + f(x), \qquad \frac{dy}{dt} = g(x), \qquad A > 0,\ B > 0\,. \tag{4}$$

Для указанных систем найдены условия отсутствия и существования предельных циклов, окружающих начало координат.

Введем функции

$$V(x, y) = \frac{Ay^8}{8} + \frac{By^4}{4} + G(x), \qquad G(x) = \int_0^x -g(s)ds\,, \tag{5}$$

$$V(x, y) = \frac{Ay^{12}}{12} + \frac{By^4}{4} + G(x)\,. \tag{6}$$

Теорема 1. Если выполнены условия (2) и

$$G(x) \to +\infty \text{ при } x \to \pm\infty\,, \tag{7}$$

то семейство кривых $V(x,y)=C$ обладает следующими свойствами:

1) симметричны относительно оси абсцисс;
2) замкнуты и окружают начало координат;
3) кривая $V=C_2$ ограничивает область, внутри которой находится кривая $V=C_1$, если $C_2>C_1$.

Доказательство. Заменой $y^4=z$ уравнение $V=C$, где V имеет вид (6), сводится к неполному кубическому уравнению $z^3+pz+q=0$, которое, согласно [2, с. 47-48], при условии $Q=(p/3)^3+(q/2)^2>0$ имеет один действительный корень и два комплексно-сопряженных. Найдя , действительный корень, видим, что ординаты кривых уровня имеют вид

$$y=\pm\sqrt[4]{\sqrt[3]{\frac{6}{A}\left(C-G(x)\right)+\sqrt{Q}}+\sqrt[3]{\frac{6}{A}\left(C-G(x)\right)-\sqrt{Q}}}\ , \qquad (8)$$

где
$Q=B^3/A^3+36(C-G(x))^2/A^2$.

Для функции $V(x,y)$ вида (5) ординаты кривых $V=C$ имеют вид

$$y=\pm\sqrt[4]{\frac{-B\pm\sqrt{B^2+8(C-G(x))}}{A}}\,. \qquad (9)$$

Из формул (8), (9) следует, что если $C-G(x)>0$, то каждому значению x соответствуют две точки кривой $V=C$, симметричные относительно оси абсцисс. Этим доказано свойство 1). Если $C-G(x)=0$, то каждому такому значению x соответствует одна точка кривой $V=C$, расположенная на оси *ox*. Отсюда и из свойства 1) следует свойство 2). Если $C-G(x)<0$, то нет действительных точек кривой $V=C$. При возрастании C абсолютная величина *y* в формулах (8), (9) возрастает. Из этого следует свойство 3) утверждения теоремы.

Замечание. Теорема остается справедливой и при нарушении первого неравенства условий (2) на интервале (x_1,x_3), расположение которого указано ниже, в условии II теоремы 3.

Теорема 2. Если выполнены условия (2) и (7), то системы (3) и (4) не имеют предельных циклов.

Доказательство. Допустим, что существует предельный цикл $(x=x(t),y=y(t))$. Тогда найдутся значения t_1 и t_2 $(t_2>t_1)$ такие, что точки $M_1(x(t_1),y(t_1))$ и $M_2(x(t_2),y(t_2))$, принадлежащие циклу, совпадают. Тогда и значения функции $V(x,y)$ в них совпадают:

$$V(x(t_1),y(t_1))=V(x(t_2),y(t_2))\,. \qquad (10)$$

Производная функции $V(x,y)$ в силу систем (3), (4) имеет вид

$$\frac{dV}{dt}=-f(x)g(x)$$

и в силу условий (2) $\frac{dV}{dt}\le 0$, что противоречит равенству (10). Теорема доказана.

Обозначим $M = \max\limits_{[0;x_3]} |f(x)|$; $\varphi(x) = \int\limits_0^x -g(s)f(s)ds$, d – действительный корень уравнения $Ay^7 + By^3 - \gamma M = 0$ или $Ay^{11} + By^3 - \gamma M = 0$, где $\gamma > 1$.

Теорема 3. Если выполнены условия:

I. Функции *f(x)* и *g(x)* нечетные;

II. $\exists\, x_1,\ x_3$, такие, что $f(0) = f(x_1) = f(x_3) = g(0) = 0$, $f(x) < 0$ на $(0; x_1)$, $f(x) > 0$ на $(x_1; x_3)$; $g(x) < 0$ на $(0; \infty)$; $G(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$;

III. $\exists \gamma > 1$, $\exists x_2 \in (x_1; x_3)$, такие, что выполнены неравенства

$$\varphi(x_2) \geq 2\varphi(x_1)/(1 - \gamma), \tag{11}$$

$$G(x_3) - G(x_2) \geq Ad^{12}/12 + Bd^4/4 + 2Md, \tag{12}$$

то система (4) в полосе $-x_3 \leq x \leq x_3$ имеет, по крайней мере, один неустойчивый предельный цикл.

Доказательство проводится методом построения кольцевых областей, внутрь которых не входит ни одна траектория системы (4). Построение контуров кольцевой области проводится так же, как в работе [1].

Теорема 4. Если выполнены условия теоремы 3 и при этом вместо неравенства (12) выполняется неравенство

$$G(x_3) - G(x_2) \geq Ad^8/8 + Bd^4/4 + 2Md,$$

то система (3) в полосе $-x_3 \leq x \leq x_3$ имеет, по крайней мере, один неустойчивый предельный цикл.

Пример. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = y^{11} + y^3 - \sin \pi x, \quad \dot{y} = -x^3. \tag{13}$$

Функции $f(x) = -\sin \pi x$ и $g(x) = -x^3$ нечетные и удовлетворяют условию II теоремы 3 при $x_1 = 1$, $x_3 = 2$, *M* = 1. При значении $\gamma = 1$ корень *d* равен 1. При значении $x_2 = 3/2$ неравенства (11) и (12) выполнены, из чего следует, что система (13) в полосе $-2 \leq x \leq 2$ имеет, по крайней мере, один неустойчивый предельный цикл.

Список использованных источников

1. Денисов, В. С. О существовании предельных циклов одной динамической системы с кубической нелинейностью / В. С. Денисов. О. О. Примакова // Дифференц. уравнения и системы компьютерной алгебры : Материалы Междунар. конф. Ч.1. – Мн : БГПУ, 2005. – С. 102-107.
2. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М : «Наука», 1970.