$$\frac{dN}{d\varphi}+\left(\frac{1}{\rho}\cdot\frac{d\rho}{d\varphi}-k\right)\cdot N-A=0. \tag{13}$$

Примем начальные условия на набегающем конце нити:

$$\varphi=0,\quad T=T_0\ ,\ \rho=\rho_0\ ,\ \ N=N_0\,. \tag{14}$$

Проинтегрировав уравнение (13) с начальными условиями (14) на границе, получим:

$$N=\frac{\rho_0\cdot e^{k\varphi}}{\rho(\varphi)}\cdot\left(N_0+\frac{A}{\rho_0}\cdot\int_0^{\varphi}\rho(\varphi)\cdot e^{-k\varphi}\cdot d\varphi\right). \tag{15}$$

Подставив (15) в выражение в (10), получим

$$T-\mu_0\cdot v_0^2\cdot f(T)=e^{k\varphi}\cdot\left(T_0-\mu_0\cdot v_0^2\cdot f(T_0)+A\cdot\int_0^{\varphi}\rho(\varphi)\cdot e^{-k\varphi}\cdot d\varphi\right). \tag{16}$$

Таким образом, натяжение однородной растяжимой гибкой нити при установившемся движении нити по шероховатой направляющей с кулоновым трением находится в общем случае в квадратурах.

Список использованных источников

1. Шербаков, В. П. Прикладная механика нити / В. П. Щербаков. – Москва : РИО МГТУ им. А.Н. Косыгина, 2001.
2. Меркин, Д. Р. Введение в механику гибкой нити / Д. Р. Меркин – Москва : Наука, 1980.

УДК 531.8

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ ПРИ ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

А.С. Соколова, А.В. Локтионов

Рассмотрим диск, который вращается в горизонтальной плоскости вокруг оси *Oz* (рис. 1). Требуется найти, по какому закону будет двигаться вдоль радиуса диска тело массы *m* (точка *M*), помещенного в начальный момент на расстоянии x_0 от точки *O*, и какой момент $M_{вр}$ должен быть приложен к диску, чтобы он при этом вращался равномерно со скоростью ω.

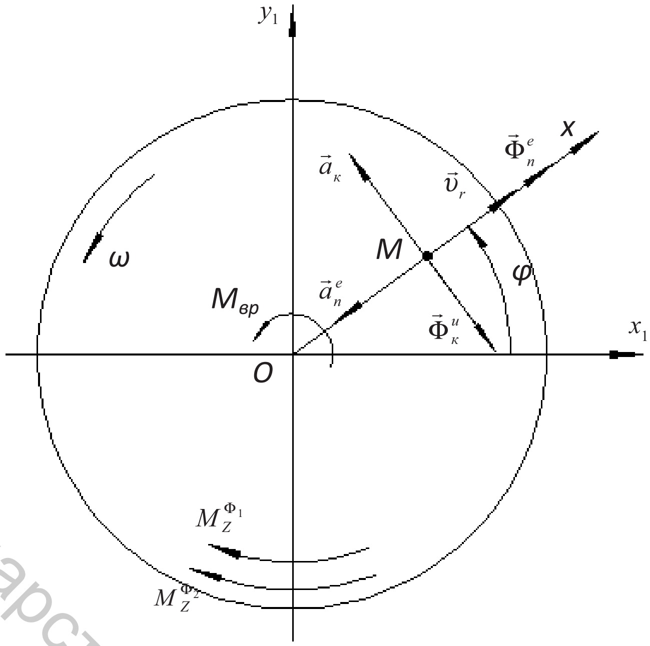

Рисунок 1

Составим дифференциальное уравнение относительного движения тело массы *m* вдоль оси *Ox*

$$m\vec{a}_r = \vec{P}_к + \vec{\Phi}_e^n + \vec{\Phi}_к^и, \tag{1}$$

где *P* = *mg* – сила тяжести; $\vec{\Phi}_e^n$ – центробежная сила инерции; $\vec{\Phi}_к^и$ – кориолисова сила инерции.

В проекции равенства (1) на ось *Ox* получим $m\ddot{x} = (\omega^2 x)\cdot m$, где *x* = *OM.*

Тогда дифференциальное уравнение движения тела будет иметь вид:

$$\ddot{x} - \omega^2 x = 0. \tag{2}$$

Общее решение уравнения будет иметь вид:

$$x = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}. \tag{3}$$

Продифференцируем уравнение (3), получим

$$\dot{x} = c_1 \omega e^{\omega t} - c_2 \omega e^{-\omega t}. \tag{4}$$

Подставив начальные условия ($t = 0$, $x = x_0$, $\dot{x} = 0$) в уравнения (3) и (4), получим $c_1 = c_2 = \frac{x_0}{2}$. Следовательно, тело движется вдоль радиуса диска по закону

$$x = \frac{x_0}{2}\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right). \tag{5}$$

Условие равновесия системы в виде $\Sigma m_z(\vec{F}_k) = 0$ относительно оси *Oz* имеет вид $M_{вр} + M_Z^{\Phi_1} + M_Z^{\Phi_2} = 0$, где для диска $M_Z^{\Phi_1} = -I_Z \varepsilon = 0$, $M_Z^{\Phi_2} = \Phi_к^и x = -2m(\omega\dot{x})\cdot x$. Тогда $M_{вр} - 2m\omega\dot{x}x = 0$. Откуда получим

$$M_{вр} = 2m\omega\dot{x}x. \tag{6}$$

Выразив $\dot{x}$ через x и x_0, получим окончательное выражение для момента $M_{вр}$

$$M_{вр} = 2m\omega^2 x\sqrt{x^2 - x_0^2}\ . \tag{7}$$

Решим задачу, используя уравнения Лагранжа.

Система имеет две степени свободы (перемещение тела вдоль радиуса диска и поворот диска). Выберем за обобщенные координаты угол φ между OM и осью Ox_1 и расстояние $OC = x$ ($q_1 = \varphi$, $q_2 = x$). Уравнения движения системы будут

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_1 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_2 \end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

Найдем обобщенные силы. При повороте диска на угол $\delta\varphi$ приложенный к нему момент совершит элементарную работу $\delta A_1 = M_{вр}\delta\varphi$. При перемещении тела массы m на расстояние δx элементарная работа приложенных сил $\delta A_2 = 0$. Следовательно, $Q_1 = M_{вр}$; $Q_2 = 0$.

Вычислим кинетическую энергию системы, равную сумме кинетических энергий диска и тела, где $T_д = \frac{1}{2} I_O \omega^2$, $T = \frac{1}{2} m\upsilon^2$.В этих формулах I_O – момент инерции диска относительно оси Oz; $\omega = \dot{\varphi}$ – угловая скорость диска; υ – абсолютная скорость тела $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_r + \vec{\upsilon}_e$, где численно $\upsilon_r = \dot{x}$; $\upsilon_e = OM \cdot \dot{\varphi} = x\dot{\varphi}$. Поэтому $\upsilon^2 = \dot{x}^2 + x^2\dot{\varphi}^2$. Окончательно получим следующее выражение кинетической энергии системы $T = \frac{1}{2} I_O \dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + x^2\dot{\varphi}^2\right)$. Вычисляем частные производные, входящие в уравнения (8)

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = I_O\dot{\varphi} + mx^2\dot{\varphi}\ ;\ \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0\ ;\ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}\ ;\ \frac{\partial T}{\partial x} = mx\dot{\varphi}^2\ .$$

Подставляя эти величины и значения Q_1, Q_2 в уравнения (8) и учтя одновременно, что $\dot{\varphi}$ = ω = *const,* получим уравнения, аналогичные (2) и (6) :

$$\ddot{x} - \omega^2 x = 0\ ,\ M_{вр} = 2m\omega\dot{x}x\ .$$

Интегрируя первое из уравнений и определяя постоянные интегрирования по начальным условиям задачи, найдем закон движения тела вдоль оси Ox $x = \frac{x_0}{2}\left(e^{\varpi t} + e^{-\varpi t}\right)$, а $M_{вр} = 2m\omega^2 x\sqrt{x^2 - x_0^2}$, что соответствует формуле (7).

Из равенства (7) следует, что для обеспечения равномерного вращения диска надо по мере продвижения тела вдоль оси Ox увеличить вращающий момент. От момента инерции диска величина $M_{вр}$ в этом случае не зависит.

Исследованиями установлено, что определение закона относительного движения и искомого вращающего момента значительно проще с использованием в расчете сил инерции, чем применение для решения поставленной задачи уравнений Лагранжа.