

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Курс лекций

**Витебск
2011**

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
"ВИТЕБСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ"**

Федосеев Г.Н., Корнеев Д.В., Ильюшенко Е.Н.

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

КУРС ЛЕКЦИЙ

для студентов специальности 1-540101-04
"Метрология, стандартизация и сертификация (легкая промышленность)"
дневной формы обучения

**Витебск
2011**

УДК 531.3 (075.8)
ББК 22.2
Ф 33

Рецензент : Буркин А.Н., кандидат технических наук, заведующий кафедрой "Стандартизация"

Рекомендовано в качестве учебного пособия редакционно-издательским советом УО "ВГТУ", протокол № 4 от 17 июня 2010 г.

Ф 33 Федосеев, Г. Н. Прикладная механика : курс лекций / Г. Н. Федосеев, Д. В. Корнеев, Е. Н. Ильюшенко. – Витебск : УО «ВГТУ», 2010. – 163 с.

ISBN 978 – 985 – 481 – 229 – 8

В курсе лекций приводятся основные положения кинематики и динамики плоских механизмов, расчеты деталей механических передач на прочность, выносливость, износостойкость и долговечность, а также элементарные сведения о нормировании и методах оценки шероховатости поверхностей деталей и о допусках и посадках гладких соединений.

УДК 531.3 (075.8)
ББК 22.2

ISBN 978 – 985 – 481 – 229 – 8

© Федосеев Г.Н., Корнеев Д.В.,
Ильюшенко Е.Н., 2010
© УО "ВГТУ", 2010

Содержание

Лекция 1. Понятие о механизме	7
1.1 Механизм как кинематическая цепь	7
1.2 Классификация кинематических пар	7
1.3 Структурные формулы механизмов	9
Лекция 2. Простейшие движения твёрдого тела	11
2.1 Скорость и ускорение точки	11
2.2 Поступательное движение твёрдого тела	12
2.3 Вращение твёрдого звена вокруг неподвижной оси	13
2.4 Векторы угловой скорости и углового ускорения	16
Лекция 3. Плоскопараллельное движение твёрдого тела	16
3.1 Уравнения движения	16
3.2 Скорость произвольной точки сечения S	18
3.3 Независимость угловой скорости от выбора полюса	18
3.4 Ускорение произвольной точки сечения S	19
Лекция 4. Сложное движение точки	20
4.1 Производная вектора, заданного во вращающейся системе координат	20
4.2 Абсолютное, относительное и переносное движения	22
4.3 Теорема о сложении скоростей	22
4.4 Теорема о сложении ускорений	23
4.5 Кориолисово (поворотное) ускорение	25
Лекция 5. Законы механики	26
5.1 Материальная точка	26
5.2 Инерциальные системы отсчёта (ИСО)	26
5.3 Основной закон механики (второй закон Ньютона)	27
5.4 Сила инерции	29
5.5 Третий закон Ньютона, реакции в кинематических парах	29
Лекция 6. Теоремы об изменении кинетической энергии	31
6.1 Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки	30
6.2 Теорема об изменении кинетической энергии твёрдого тела	32
6.3 Кинетическая энергия твёрдого тела в поступательном движении	34
6.4 Кинетическая энергия во вращении твёрдого тела вокруг неподвиж- ной оси	34
Лекция 7. Уравнения плоско-параллельного движения	35
7.1 Закон поступательного движения твёрдого тела	35
7.2 Центр масс твёрдого тела	36
7.3 Теорема о движении центра масс твёрдого тела	37
7.4 Закон вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси	38
7.5 Закон вращения в плоско-параллельном движении твёрдого тела	40
Лекция 8. Условия равновесия в плоских механизмах	41
8.1 Перенос силы	41

8.2 Приведение произвольной плоской системы сил к центру масс	43
8.3 Условия равновесия	44
8.4 Силы инерции и инерционный момент твёрдого звена механизма .	45
8.5 Динамические реакции в кинематических парах плоских механизмов.....	45
Лекция 9. Электропривод.....	48
9.1 Передаточное число	48
9.2 Коэффициент полезного действия [3]	49
9.3 Выбор электродвигателя привода	50
9.4 Передаточные числа передач привода.....	51
9.5 Мощности на валах привода. Частоты вращения валов. Моменты, вращающие валы	51
Лекция 10. Эвольвентное зацепление.....	52
10.1 Эвольвента круга и её свойства	52
10.2 Передаточное число	53
10.3 Основные размеры эвольвентного колеса	54
10.4 Коэффициент перекрытия	57
Лекция 11. Контактные напряжения в прямозубой передаче.....	58
11.1 Поле зацепления.....	58
11.2 Силы в прямозубом зацеплении.....	59
11.3 Удельная расчётная окружная сила	60
11.4 Формула Герца	61
Лекция 12. Нормальные и касательные напряжения в стержне	63
12.1 Понятие о стержне-брусе	63
12.2 Геометрические характеристики поперечного сечения стержня ...	64
12.3 Напряжённое состояние в точке	66
12.4 Деформации и напряжения при растяжении (сжатии)	67
12.5 Деформации и напряжения при прямом чистом изгибе	69
Лекция 13. Проектный и проверочный расчёт прямозубой передачи	73
13.1 Проектный расчёт на контактную прочность	73
13.2 Проверка контактной прочности	74
13.3 Проверка на прочность при изгибе	74
13.4 Допускаемые напряжения	76
Лекция 14. Кручение круглого стержня.....	79
14.1 Угол сдвига	79
14.2 Закон парности касательных напряжений при кручении	80
14.3 Распределение касательных напряжений при кручении	81
14.4 Моменты инерции круглого сечения.....	83
14.5 Моменты сопротивления при кручении	84
14.6 Расчёт на прочность.....	84
14.7 Расчёт шпонки.....	85
Лекция 15. Изгиб вала.....	86
15.1 Расчётная схема.....	86

15.2 Опорные реакции	87
15.3 Изгибающие моменты	89
15.4 Суммарный изгибающий момент	90
15.5 Нормальное напряжение в поперечном сечении вала	91
15.6 Осевой момент инерции и момент сопротивления круглого сечения	92
Лекция 16. Напряжённое состояние вала	93
16.1 Напряжённое состояния в опасных точках поперечного сечения вала	93
16.2 Упрощённое плоское напряжённое состояние (УПНС)	94
16.3 Чистый сдвиг	96
16.4 Нормальные и касательные напряжения в УПНС	96
16.5 Максимумы и минимумы нормальных и касательных напряжений в УПНС	97
Лекция 17. Проверка вала на выносливость	99
17.1 Прочность при линейном напряжённом состоянии и чистом сдвиге	99
17.2 Критерий прочности Треска-Сен-Венана	99
17.3 Коэффициент безопасности в УПНС	101
17.4 Циклически изменяющиеся нормальные и касательные напряжения в поперечном сечении вала	102
17.5 Предел выносливости при симметричном цикле	104
17.6 Запасы выносливости	105
17.7 Запасы в опасных сечениях вала	106
Лекция 18. Подшипники качения	107
18.1 Основные типы подшипников качения [5]	108
18.2 Серии диаметров и ширин [4]	110
18.3 Точность подшипников качения [4]	110
18.4 Цифровые обозначения подшипников [6]	110
18.5 Выбор типа подшипника [6]	111
18.6 Проверка подшипника на статическую грузоподъёмность [4]	111
18.7 Проверка подшипника на долговечность [4]	111
18.8 Схемы установки подшипников	112
18.9 Смазка подшипников [6]	114
Лекция 19. Ременные передачи [4]	115
19.1 Кинематика ременной передачи	116
19.2 Геометрия ременной передачи	117
19.3 Силы в передаче	118
19.4 Формула Эйлера	118
19.5 Фактор трения	120
Лекция 20. Напряжения в ремне	122
20.1 Напряжения от центробежных сил	122
20.2 Напряжения при изгибе ремня	123
20.3 Напряжения в ремне	124

20.4 Расчёт клиноременной передачи.....	126
20.5 Допускаемое полезное напряжение	126
20.6 Силы, действующие на валы ременной передачи.....	127
Лекция 21. Цепная передача [4].....	128
21.1 Конструкция втулочно-роликовой цепи и звёздочек.....	128
21.2 Передаточное число	130
21.3 Удары в передаче	130
21.4 Износ цепи.....	131
21.5 Оптимальное число зубьев	131
21.6 Давление в шарнирах цепи.....	132
21.7 Допускаемое давление в шарнирах цепи.....	133
21.8 Практический расчёт цепной передачи	134
Лекция 22. Резьбовые соединения.....	135
22.1 Крепёжные и ходовые резьбы	135
22.2 Основные виды резьбовых соединений.....	136
22.3 Амонтоново трение.....	137
22.4 Трение в резьбе	139
22.5 Резьба метрическая.....	140
22.6 Расчёт затянутого болта на прочность.....	142
Лекция 23. Шероховатость поверхностей деталей, допуски и посадки	147
23.1 Высотные параметры шероховатости.....	147
23.2 Обозначение шероховатости на рабочих чертежах	149
23.3 Размеры детали	150
23.4 Допуск и предельные отклонения.....	150
23.5 Посадки подвижные, неподвижные и переходные	151
Лекция 24. Системы отверстия и вала	154
24.1 Система отверстия	154
24.2 Система вала	154
24.3 Обозначение посадок на чертежах.....	156
24.4 Посадки подшипников качения в отверстие корпуса и на вал.....	156
24.5 Посадки призматической шпонки на вал и во втулку	158
24.6 Степени точности и виды сопряжений в цилиндрических зубчатых передачах	159
24.7 Предельные отклонения размеров с неуказанными допусками...	161
Литература.....	162

Лекция 1. Понятие о механизме

1.1 Механизм как кинематическая цепь

Всякий механизм образуется телами-звеньями, способными двигаться относительно друг друга. Силы, действующие на звенья механизма, деформируют их, т.е. изменяют их форму и размеры. Однако эти изменения (деформации) намного меньше первоначальных размеров звеньев – поэтому звенья механизма полагают абсолютно твёрдыми (с неизменными формой и размерами).

Подвижное соединение двух твёрдых звеньев называется кинематической парой. Различают высшие и низшие пары. Звенья первых соприкасаются в точках или по линиям, звенья вторых – по поверхностям.

Последовательность кинематических пар, взятая как целое, называется кинематической цепью. В простых цепях каждое из звеньев входит не более чем в две пары, в противном случае цепь сложная. В незамкнутых цепях имеются цепи, входящие только в одну пару, в противном случае цепь замкнутая.

Механизм – кинематическая цепь, предназначенная для преобразования заданного движения одного или нескольких (ведущих) звеньев в требуемое движение всех остальных (ведомых) звеньев. Все названные движения рассматриваются по отношению к стойке – одному из звеньев, принимаемому за неподвижное.

1.2 Классификация кинематических пар

У свободного твёрдого тела в пространстве шесть степеней свободы: на рисунке 1.1 показаны шесть независимых движений тела вдоль и вокруг взаимно ортогональных осей. Когда два звена образуют подвижное соединение (входят в кинематическую пару), каждое из них ограничивает свободу другого, или, как говорят, налагает связи на соседнее звено.

Число связей (число «запрещённых» независимых относительных движений) определяет класс кинематической пары. На рисунке 1.2 показана высшая пара первого класса – «запрещено» движение вдоль нормали к плоскости. На рисунках 1.3 и 1.4 представлены высшие пары IV класса: колесо на рисунке 1.3 способно вращаться, «буксуя на месте», и способно скользить (не вращаясь) вдоль рельса; аналогичным образом ведут себя зацепляющиеся зубья зубчатых колёс (вычитая из 6 движений на рисунке 1.1 два «разрешённых» движения, найдём 4 связи, налагаемые звеньями пар). Пара IV класса на рисунке 1.5 – низшая. Вращательная (схемы на рис. 1.6) и поступательная (схемы на рис. 1.7) пары – низшие. Винтовая пара («винт-гайка») допускает (рисунок 1.8) относительные движения вдоль и вокруг оси пары, однако одно из этих

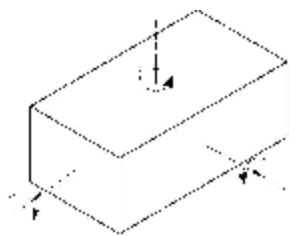


Рисунок 1.1 – Шесть степеней
свободы свободного
твердого тела

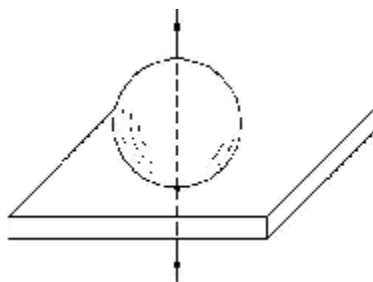


Рисунок 1.2 – «Запрещено»
движение вдоль нормали
к плоскости

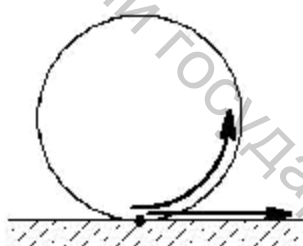


Рисунок 1.3 – Колесо на рельсе



Рисунок 1.4 – Зацепляющиеся
зубья

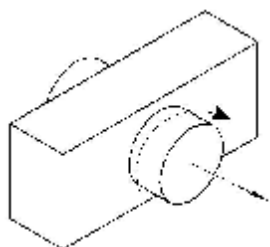


Рисунок 1.5 – Кинематическая
пара IV класса ($6 - 2 = 4$)

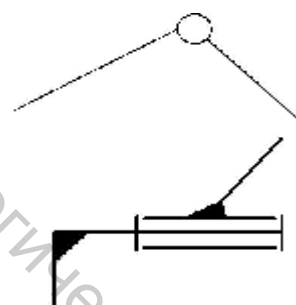


Рисунок 1.6 – Вращательные
пары

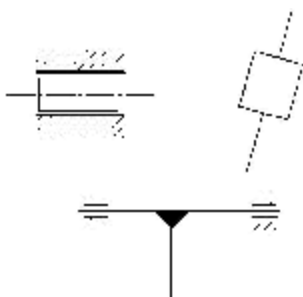


Рисунок 1.7 – Поступательные
пары

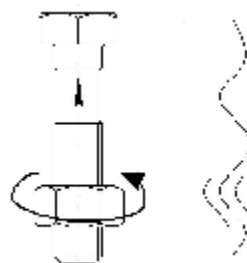


Рисунок 1.8 – Винтовая пара
(«винт – гайка»)

движений всегда следствие другого, независимо только одно движение из двух. Следовательно, пара на рисунке 1.8 относится к V классу: вычитая из 6 движений на рисунке 1.1 одно «разрешённое» движение, найдём 5 связей, налагаемых звеньями пары.

1.3 Структурные формулы механизмов

Если в механизме n подвижных звеньев, то, будучи свободными, они все вместе обладают (рис 1.1) $6n$ степенями свободы. Каждая из кинематических пар k -ого класса налагает на относительное движение звеньев k связей, т.е. все пары k -ого класса числом p_k отнимают от $6n$ возможных степеней свободы kp_k степеней свободы. Число степеней подвижности в наиболее общем случае механизма нулевого семейства (рис. 1.9) находится по формуле Сомова-Малышева [1]:

$$w = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - 1p_1. \quad (1.1)$$

Заметим попутно, что механизм на рис. 1.9 – простая незамкнутая кинематическая цепь (звенья 0 и 1, 3 и 4 входят только в одну пару).

Если все точки механизма движутся в параллельных плоскостях, звеньям механизма «разрешено» перемещаться в двух взаимно перпендикулярных направлениях x и y и вращаться вокруг третьего z , перпендикулярного к первым двум (рис. 1.10). Иными словами, на все звенья механизма наложены 3 связи ($6 - 3 = 3$). Эти 3 общие связи можно «взять» только у пар IV и V классов, налагающих на относительные движения звеньев 4 и 5 связей, отнимая от $6n$ степеней свободы $3n$ степеней свободы («беря» их по три у пар IV и V классов), получим из формулы (1.1) формулу Чебышева [1]:

$$w = (6 - 3)n - (5 - 3)p_5 - (4 - 3)p_4 = 3n - 2p_5 - p_4, \quad (1.2)$$

относящуюся к механизмам 3-его семейства (номер семейства определяется числом общих связей, наложенных на все подвижные звенья механизма). Пример такого (плоского) механизма представлен на рисунке 1.11. На рисунке 1.12 показан плоский клиновый механизм. Его звенья не способны вращаться, на них наложены 4 общие связи. Формула (1.1) дает число [1]

$$w = (6 - 4)n - (5 - 4)p_5 = 2n - p_5, \quad (1.3)$$

т.е. формулу Добровольского для механизма 4-ого семейства.

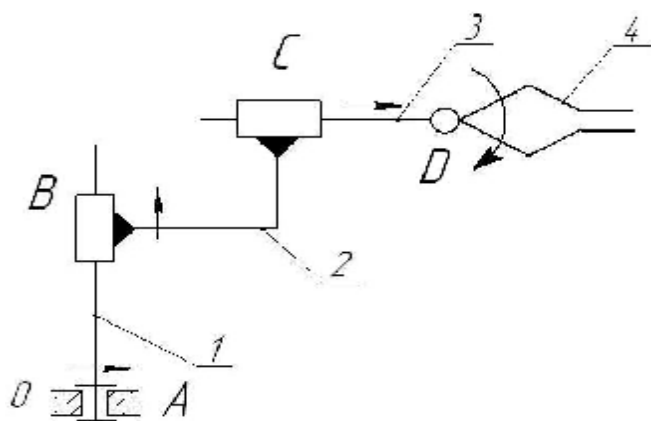


Рисунок 1.9 – Пространственный механизм нулевого семейства: $n = 4$, $p_5 = 4$ (A и D – вращательные пары V класса, B и C – поступательные пары V класса), $w(1.1) = 6 \cdot 4 - 5 \cdot 4 = 4$.

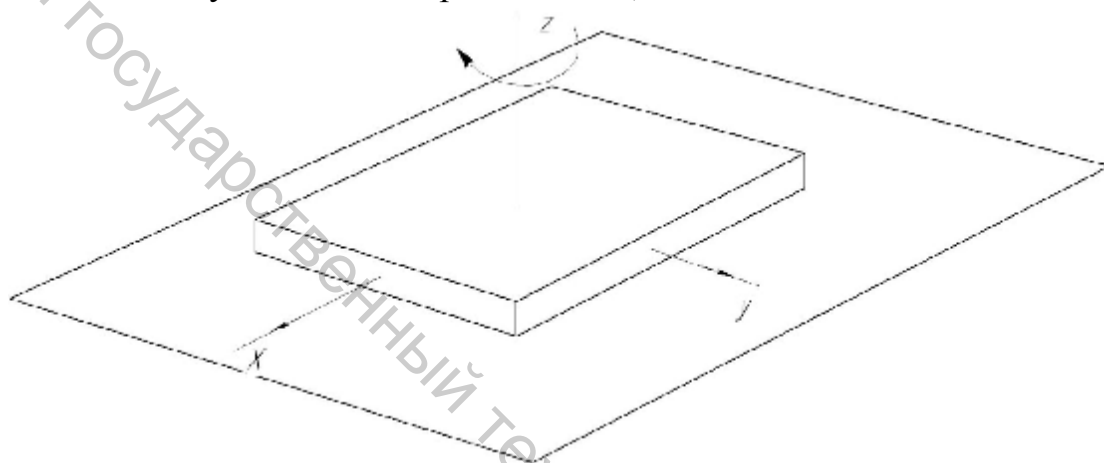


Рисунок 1.10 – Звено плоского механизма

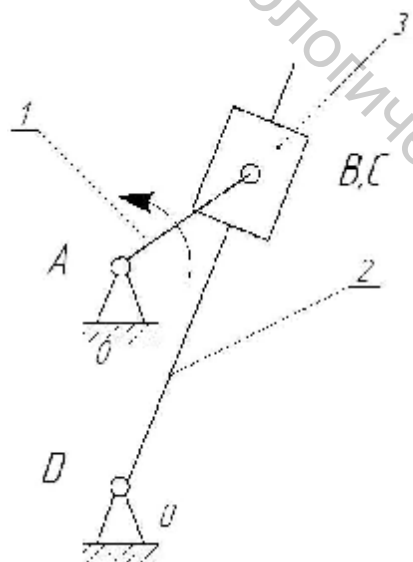


Рисунок 1.11 – Кривошипно-кулисный механизм 3-его семейства (простая замкнутая цепь): $n = 3$, $p_5 = 4$ (A, B и D – вращательные пары, C – поступательная пара), $w(1.2) = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1$

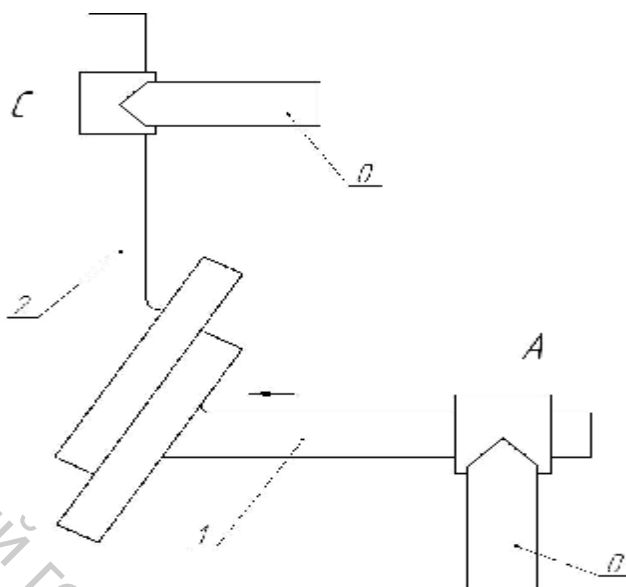


Рисунок 1.12 – Клиновой механизм 4-ого семейства (простая замкнутая цепь): $n = 2$, $p_5 = 3$ (A, B, C – поступательные пары),
 $w(1,3) = 2 \cdot 2 - 3 = 1$

Числа степеней подвижности (1.1 – 1.3) определяют число ведущих звеньев. В случае рисунка 1.9 все звенья ведущие, на рисунках 1.11, 1.12 представлены механизмы с одним ведущим звеном. Ведущие звенья отмечаются на рисунках стрелками, указывающими направление их движения.

Лекция 2. Простейшие движения твердого тела

2.1 Скорость и ускорение точки

Если положение точки M определяется (рис. 2.1) радиусом-вектором $\vec{r}(t)$, скорость точки [2]

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (2.1)$$

Положение точки M может быть задано дуговой координатой s . Координата движущейся точки $s(t)$ – функция времени. Скорость точки (2.1) направлена по касательной к траектории – в сторону отсчёта положительных координат s , если алгебраическая величина скорости

$$V^t = \frac{ds}{dt} > 0, \quad (2.2)$$

в противном случае точка движется в противоположном направлении.

Изменение величины (2.2) характеризуется касательным ускорением [2]

$$a^t = \frac{dV^t}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} . \quad (2.3)$$

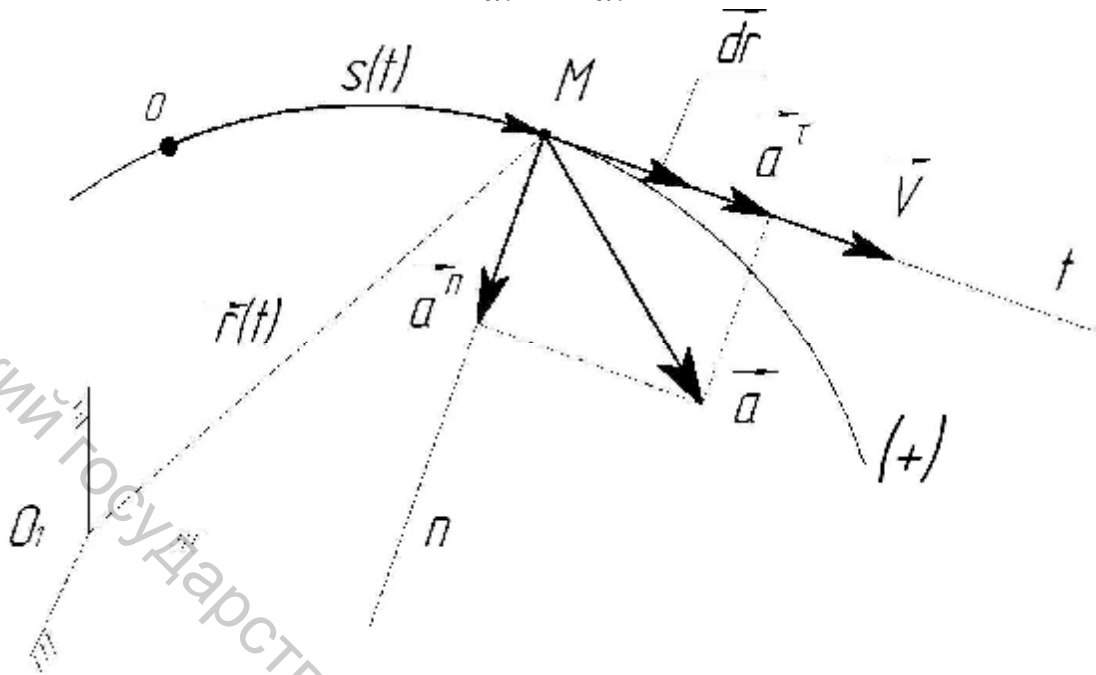


Рисунок 2.1 – Траектория, скорость и ускорения точки

Если знаки величин (2.2, 2.3) одинаковы, модуль скорости (2.1) растёт со временем.

Изменение скорости (2.1) по направлению характеризуется нормальным (центростремительным) ускорением [2]

$$a^n = \frac{V^2}{r} = \frac{(V^t)^2}{r} , \quad (2.4)$$

где r – радиус кривизны траектории. Ускорение (2.4) направлено (рис. 2.1) к центру кривизны траектории (в сторону её вогнутости).

Наконец, ускорение точки – производная скорости (2.1)

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{a}^t + \mathbf{a}^n , \quad (2.5)$$

равно (рис. 2.1) геометрической сумме касательного и нормального ускорений (2.3, 2.4).

2.2 Поступательное движение твердого тела

В поступательном движении всякая прямая, жёстко связанная с телом, движется параллельно самой себе. В частности, величина и направление произвольного вектора \overline{AB} , проведённого внутри тела, не изменяются, т.е. (рис. 2.2)

$$\vec{AB} = \text{const.} \quad (2.6)$$

Если $\vec{r}_A(t)$ и $\vec{r}_B(t)$ - радиусы-векторы точек A и B,

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{AB}. \quad (2.7)$$

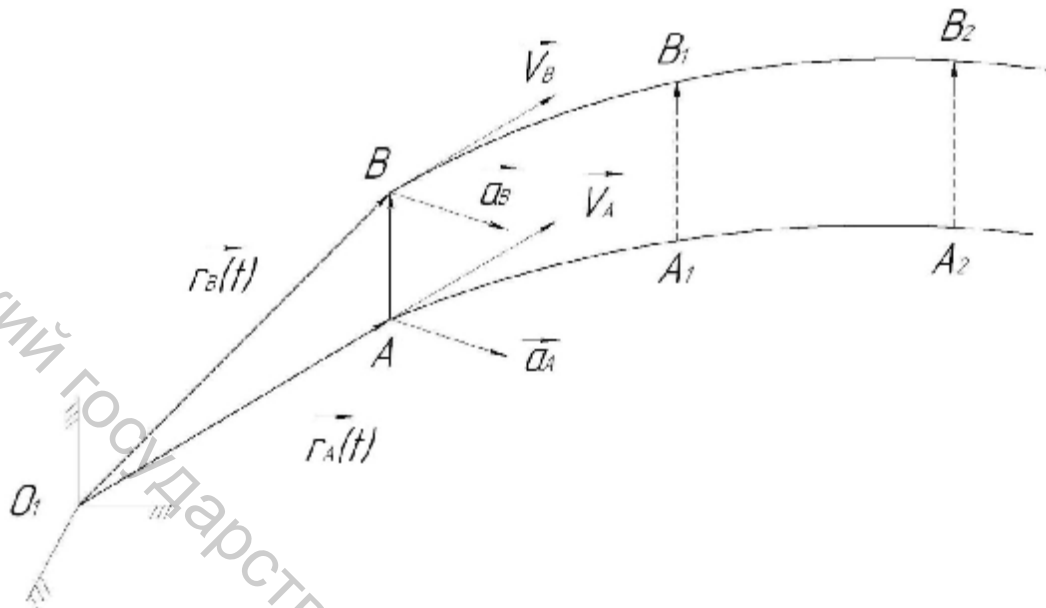


Рисунок 2.2 – Скорости и ускорения всех точек твёрдого звена в его поступательном движении

Скорости и ускорения всех точек твёрдого звена в его поступательном движении одинаковы (рис. 2.2).

Желая найти скорости точек A и B, дифференцируем сумму (2.7) по времени: так как производная постоянного вектора (2.6) равна нулю,

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt}, \quad \vec{V}_B = \vec{V}_A. \quad (2.8)$$

Ускорения:

$$\frac{d\vec{V}_B}{dt} = \frac{d\vec{V}_A}{dt}, \quad \vec{a}_B = \vec{a}_A. \quad (2.9)$$

Заметим: однократное дифференцирование по времени отмечается точкой, поставленной над символом дифференцируемой величины.

Итак, скорости (2.8) и ускорения (2.9) двух произвольных точек твёрдого тела (и, значит, всех точек) в его поступательном движении одинаковы. Траектории точек эквидистантны: все они получаются параллельным переносом одной из них.

2.3 Вращение твёрдого звена вокруг неподвижной оси.

В этом движении [2] имеется прямая, жёстко связанная с телом, неподвижная во всё время движения. Она называется осью вращения. Траектории точек тела – окружности в плоскостях, перпендикулярных к оси вращения, с центрами на оси вращения (рис. 2.3).

Отнесём движение к неподжным осям x_1, y_1, z_1 , совместив ось z_1 с осью вращения z ; подвижные оси x и y свяжем с движущимся телом-звеном. Положение тела в пространстве вполне определяется углом поворота φ , положение точки – дуговой координатой

$$s = j \cdot r, \quad (2.10)$$

где r – радиус круговой траектории точки.

Скорость точки направлена по касательной к её круговой траектории (см. на рисунке 2.3 вид по стрелке A) и находится дифференцированием (2.2) дуговой координаты (2.10): алгебраическая величина скорости

$$V^t = \dot{s} = j \dot{\varphi} \cdot r. \quad (2.11)$$

Производная угла поворота во времени $j \dot{\varphi}$ называется угловой скоростью (ω) твёрдого тела, формула (2.11) приобретает вид:

$$V^t = \omega \cdot r. \quad (2.12)$$

Нетрудно видеть, что скорость (2.12) направлена в сторону вращения тела, так как знаки величины (2.11) и угловой скорости $\omega = j \dot{\varphi}$ совпадают.

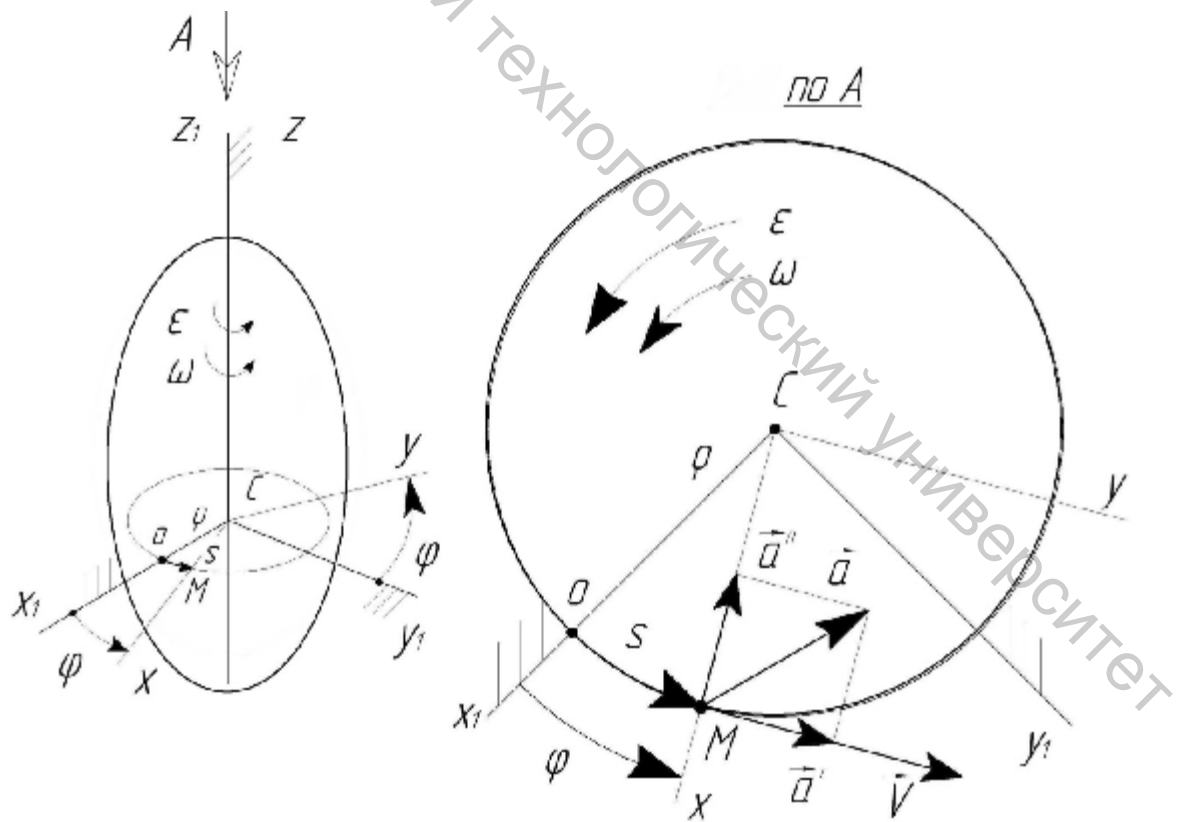


Рисунок 2.3 – Скорость и ускорения во вращении твёрдого тела вокруг неподвижной оси

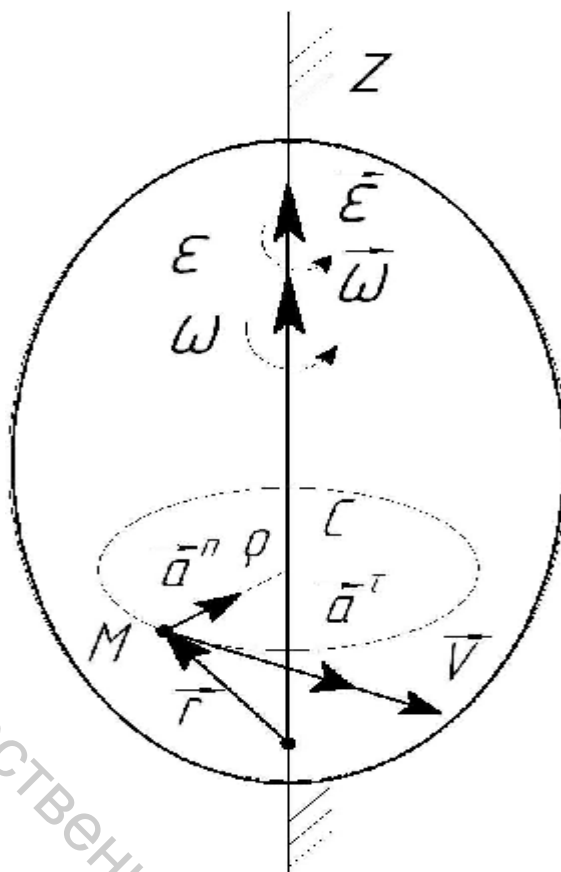


Рисунок 2.4 – Векторы угловых скорости и ускорения, скорости и ускорений точки вращающегося тела

Касательное ускорение (2.3) получается дифференцированием величины скорости (2.12):

$$a^t = \frac{dv}{dt} = \frac{dw}{dt} \cdot r. \quad (2.13)$$

Производная угловой скорости $\frac{dw}{dt} = \frac{d\epsilon}{dt}$ называется угловым ускорением (ϵ) тела, формула (2.13) приобретает вид

$$a^t = \epsilon \cdot r. \quad (2.14)$$

Если знаки углового ускорения $\epsilon = \frac{dw}{dt} = \frac{d\epsilon}{dt}$ и угловой скорости $w = \frac{d\phi}{dt}$ одинаковы, направления скорости (2.12) и касательного ускорения (2.14) совпадают (рис. 2.3).

Нормальное ускорение (2.4), направленное вдоль радиуса круговой траектории точки (к центру траектории):

$$a^n = \frac{(v^t)^2}{r} = \frac{w^2 r^2}{r} = w^2 r. \quad (2.15)$$

Как видим, скорость (2.12) и составляющие ускорения (2.14, 2.15) пропорциональны расстоянию точки от оси вращения r . Их геометрическая сумма (2.5) – ускорение \vec{a} .

2.4 Векторы угловой скорости и углового ускорения

Если ввести вектор угловой скорости (рис. 2.4), направленный вдоль оси вращения z , причём так, что вращение тела наблюдается с конца вектора $\dot{\mathbf{W}}$ происходящим против хода часовой стрелки, скорость (2.1) представится векторным произведением

$$\dot{\mathbf{V}} = \dot{\mathbf{W}} \times \mathbf{r} . \quad (2.16)$$

Дифференцируя скорость (2.16) по времени, найдём ускорение точки:

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{V}} = \dot{\mathbf{W}} \times \mathbf{r} + \mathbf{W} \times \dot{\mathbf{r}} . \quad (2.17)$$

Производная вектора угловой скорости $\dot{\mathbf{W}}$, очевидно, – вектор углового ускорения $\dot{\mathbf{e}}$; производная радиуса-вектора $\dot{\mathbf{r}}$ – скорость (2.16). Сумма (2.17) записывается в виде $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{e}} \times \mathbf{r} + \mathbf{W} \times (\mathbf{W} \times \mathbf{r})$, где векторное произведение представляет касательное ускорение, двойное векторное произведение – нормальное (центростремительное) ускорение, т.е. векторы этих ускорений

$$\mathbf{a}^t = \dot{\mathbf{e}} \times \mathbf{r}, \quad \mathbf{a}^n = \mathbf{W} \times (\mathbf{W} \times \mathbf{r}); \quad (2.18)$$

их модули (см. величины (2.14) и (2.15)):

$$|\mathbf{a}^t| = |\dot{\mathbf{e}}| \cdot r, \quad |\mathbf{a}^n| = w^2 \cdot r . \quad (2.19)$$

Скорость (2.16) и касательное ускорение (2.18) направлены вдоль перпендикуляра к радиусу-вектору \mathbf{r} (и вдоль перпендикуляра к радиусу траектории ρ); нормальное ускорение (2.18) перпендикулярно скорости, его направление получается поворотом скорости на 90° в сторону вращения.

Лекция 3. Плоскопараллельное движение твёрдого тела

3.1 Уравнения движения

В плоскопараллельном движении [2] все точки твёрдого тела звена движутся параллельно некоторой неподвижной плоскости Π , которая, впрочем, может быть выбрана так, что рассечёт (рис. 3.1) тело. Точки сечения S движутся, очевидно, в плоскости Π , а прямые A_1A_2 , B_1B_2 и всякие другие, перпендикулярные плоскости Π , движутся, сохраняя направление, т.е. поступательно.

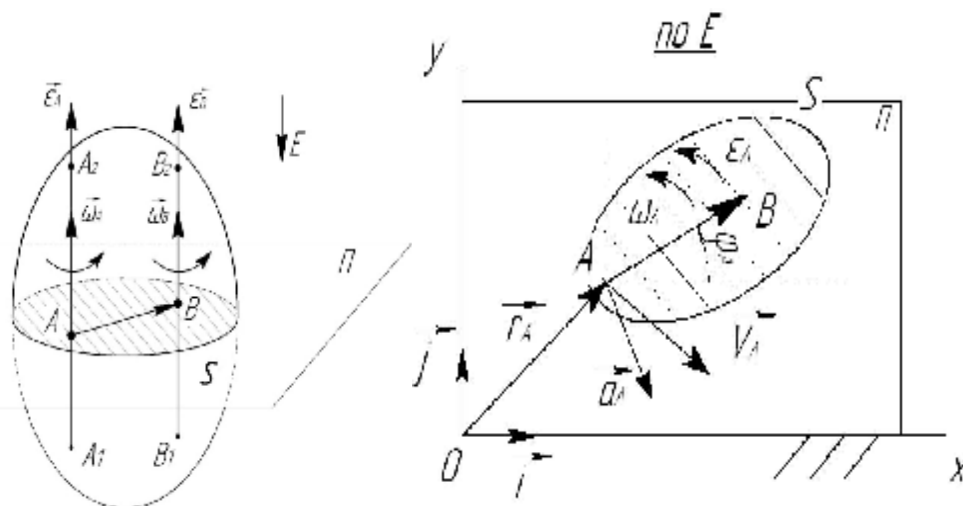


Рисунок 3.1 – Плоскопараллельное движение твёрдого тела: скорость и ускорение полюса, угловые скорость и ускорение плоского сечения тела

Скорости и ускорения всех точек этих прямых одинаковы, такие же, как скорости и ускорения точек A, B, ..., принадлежащих сечению тела S.

Перейдём к изучению движения сечения S в плоскости Π – см. вид по стрелке E на рисунке 3.1. Положение сечения на плоскости вполне определяется, если задан радиус-вектор:

$$\vec{r}_A = x_A \vec{i} + y_A \vec{j} \quad (3.1)$$

(x_A, y_A – координаты полюса A; \vec{i}, \vec{j} – орты координатных осей) и угол поворота сечения вокруг полюса φ_A . В движении сечения S координаты полюса в разложении (3.1) и угол поворота являются функциями времени: уравнения движения сечения:

$$\begin{aligned} \vec{r}_A(t) &= x_A(t) \vec{i} + y_A(t) \vec{j}, \\ \dot{\varphi}_A &= \dot{\varphi}_A(t). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Дифференцируя радиус-вектор и угол поворота (3.2) по времени, найдём скорость полюса A и угловую скорость сечения S во вращении вокруг полюса:

$$\begin{aligned} \vec{V}_A &= \dot{\vec{r}}_A = \dot{x}_A \vec{i} + \dot{y}_A \vec{j}, \\ \omega_A &= \dot{\varphi}_A. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Дифференцируя скорости (3.3), найдём ускорение полюса A и угловое ускорение во вращении сечения вокруг полюса:

$$\begin{aligned} \vec{a}_A &= \dot{\vec{V}}_A = \ddot{x}_A \vec{i} + \ddot{y}_A \vec{j}, \\ \epsilon_A &= \dot{\omega}_A = \ddot{\varphi}_A, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $\ddot{x}_A, \ddot{y}_A, \ddot{\varphi}_A$ – вторые производные координат полюса и угла поворота сечения S.

Заметим, что угловые скорость и ускорение показаны на рисунке 3.1 как векторы.

3.2 Скорость произвольной точки сечения S

На рисунке 3.2 представлена геометрическая сумма

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{AB} . \quad (3.5)$$

Дифференцирование суммы (3.5) даёт скорость

$$\vec{V}_B = \frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{AB}}{dt} , \quad (3.6)$$

где производная $\frac{d\vec{r}_A}{dt}$ – скорость полюса A (3.3), а производная $\frac{d\vec{AB}}{dt}$ – производная вектора, вращающегося вокруг A, определяемая векторным произведением (2.16), т.е. скорость (3.6) записывается в виде

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{AB} . \quad (3.7)$$

Векторное произведение в сумме (3.7) имеет смысл скорости точки B во вращении сечения S вокруг полюса A (вращательной скорости)

$$\vec{V}_{BA} = \vec{\omega}_A \times \vec{AB} , \quad (3.8)$$

она направлена перпендикулярно вектору \vec{AB} в сторону вращения сечения. Складывая геометрически вращательную скорость (3.8) со скоростью полюса A (рис. 3.2), перенесённой в точку B, получим скорость (3.7).

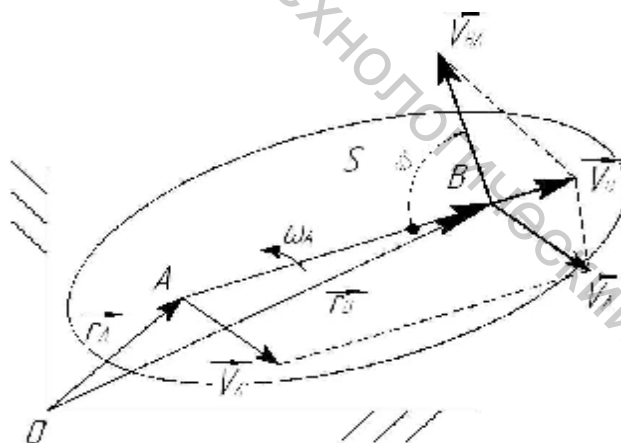


Рисунок 3.2 – Скорость произвольной точки сечения $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$

3.3 Независимость угловой скорости от выбора полюса

Выбрав полюс в точке A, определим скорость точки B (3.7): с учётом выражения (3.8):

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA} , \quad \vec{V}_{BA} = \vec{\omega}_A \times \vec{AB} . \quad (3.9)$$

Выберем полюс в точке B и найдём скорость точки A:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{AB} , \quad \vec{V}_{AB} = \vec{\omega}_B \times \vec{BA} ,$$

или

$$-\vec{V}_B = -\vec{V}_A + \vec{V}_{AB}, \quad \vec{V}_{AB} = -\vec{\omega}_B \times \vec{AB}. \quad (3.10)$$

Сложим равенства (3.9) и (3.10):

$$0 = 0 + \vec{\omega}_A \times \vec{AB} - \vec{\omega}_B \times \vec{AB}, \\ (\vec{\omega}_A - \vec{\omega}_B) \times \vec{AB} = 0. \quad (3.11)$$

Векторные сомножители в произведении (3.11) не коллинеарны, следовательно, $\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_B$, и индекс в обозначении угловой скорости можно опустить – от выбора полюса она не зависит.

Скорости произвольной точки сечения S (3.7, 3.8)

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}, \quad \vec{V}_{BA} = \vec{\omega} \times \vec{AB}, \quad \vec{V}_{BA} = \vec{\omega} \cdot \vec{AB}. \quad (3.12)$$

3.4 Ускорение произвольной точки сечения S

Дифференцируя сумму (3.12), написанную в виде $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB}$, по времени, найдём ускорение точки B:

$$\vec{a}_B = \frac{d\vec{V}_B}{dt} = \frac{d\vec{V}_A}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{AB} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{AB}}{dt},$$

где производные $\frac{d\vec{V}_A}{dt}$ – ускорение полюса A (3.4), производная $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ – вектор углового ускорения (3.4), производная $\frac{d\vec{AB}}{dt}$ определяется векторным произведением (3.8), т.е. ускорение точки B

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\epsilon} \times \vec{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{AB}). \quad (3.13)$$

Векторное произведение в геометрической сумме (3.13) имеет смысл касательного ускорения во вращении сечения S вокруг полюса A, перпендикулярного вектору \vec{AB} , направленного в сторону углового ускорения $\vec{\epsilon}$. В двойном векторном произведении в сумме (3.13) узнаём нормальное (центростремительное) ускорение (2.18) во вращении сечения вокруг полюса, направленное вдоль вектора \vec{BA} , т.е. к полюсу. Геометрическая сумма касательного и нормального ускорений (рис. 3.3) – вращательное ускорение.

Итак, ускорение (3.13) равно геометрической сумме ускорения полюса A и вращательного ускорения во вращении сечения S вокруг полюса:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}. \quad (3.14)$$

В свою очередь, вращательное ускорение в сумме (3.14) равно геометрической сумме касательного

$$\vec{a}_{BA}^t = \vec{\epsilon} \times \vec{AB} \quad (3.15)$$

и нормального (центростремительного) ускорения

$$\vec{a}_{BA}^n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{AB}), \quad (3.16)$$

т.е. вращательное ускорение

$$\vec{a}_{BA} = \vec{a}_{BA}^t + \vec{a}_{BA}^n. \quad (3.17)$$

Модули касательного (3.15) и нормального (3.16) ускорений в сумме (3.17)

$$a_{BA}^t = |\epsilon| \cdot AB, \quad a_{BA}^n = \omega^2 \cdot AB. \quad (3.18)$$

Формулы (3.18), очевидно, повторяют несколько в ином виде формулы (2.19).

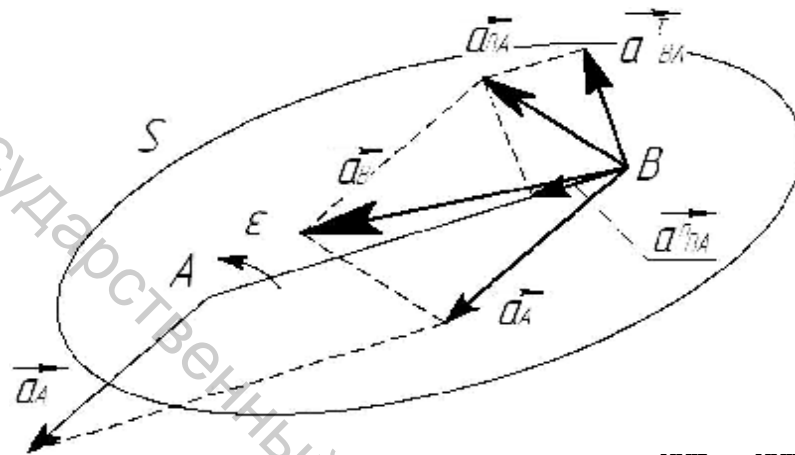


Рисунок 3.3 – Ускорение произвольной точки сечения $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}$,
 $\vec{a}_{BA} = \vec{a}_{BA}^t + \vec{a}_{BA}^n$

Лекция 4. Сложное движение точки

4.1 Производная вектора, заданного во вращающейся системе координат

Пусть имеются две системы координат – одна неподвижная, другая движется (вращаясь) относительно первой. «Подвижный» наблюдатель фиксирует изменение вектора (рис. 4.1)

$$\vec{A}(t) = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j} \quad (4.1)$$

по величине и направлению, т.е. изменение проекций вектора (4.1) на подвижные оси, не замечая вращения ортов \vec{i} и \vec{j} . Производную вектора (4.1), определяемую «подвижным» наблюдателем,

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} \quad (4.2)$$

назовём относительной, или локальной (местной).

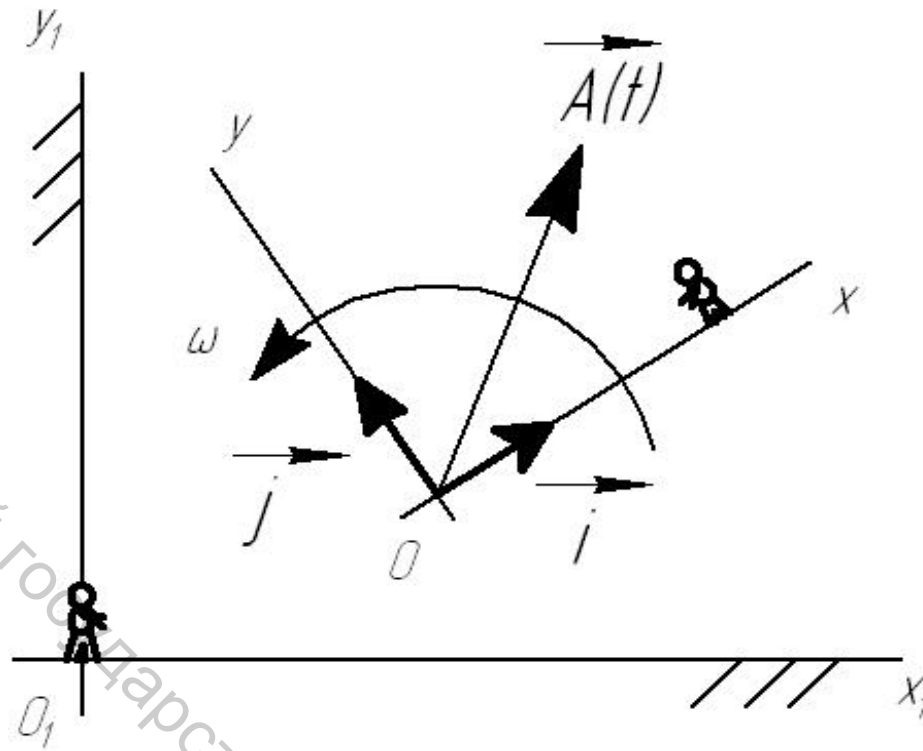


Рисунок 4.1 – Вектор, заданный во вращающейся системе отсчёта

«Неподвижный» наблюдатель фиксирует в разложении (4.1) не только изменение проекций, но и вращение ортов: его производная

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A} = \left(\dot{x} \mathbf{i} + \dot{y} \mathbf{j} \right) + \left[x \dot{\mathbf{i}} + y \dot{\mathbf{j}} \right]. \quad (4.3)$$

Выражение в круглых скобках суммы (4.3) – локальная производная (4.2), а производные ортов в квадратных скобках находятся по формуле (2.16):

$$\dot{\mathbf{i}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}, \quad \dot{\mathbf{j}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}, \quad (4.4)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости подвижных осей координат, перпендикулярный к плоскости рисунка 4.1.

Используя выражение (4.2) и формулы (4.4) в сумме (4.3), найдём абсолютную производную вектора (4.1):

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A} = \frac{d}{dt} \mathbf{A} + \left[\boldsymbol{\omega} \times (x \mathbf{i} + y \mathbf{j}) \right], \quad (4.5)$$

или

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A} = \frac{d}{dt} \mathbf{A} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}.$$

«Неподвижный» наблюдатель добавляет к результату «подвижного» наблюдателя результат вращения вектора \mathbf{A} вместе с подвижными осями.

4.2 Абсолютное, относительное и переносное движения

Пусть движение точки рассматривается двумя наблюдателями – «неподвижным» и «подвижным» (рис. 4.2). Движение точки относительно осей, принимаемых за неподвижные, называется [2] абсолютным, движение относительно подвижных осей – относительным. Движение самих подвижных осей (и воображаемого твёрдого тела с «вмороженными» подвижными осями) – переносное.

Соответственно, скорость и ускорение в абсолютном движении, определяемые «неподвижным» наблюдателем, – абсолютные [2]; скорость и ускорение в относительном движении, определяемые «подвижным» наблюдателем, – относительные [2]. Скорость и ускорение той точки подвижной системы отсчёта (воображаемого твёрдого тела с «вмороженными» подвижными осями), с которой совпадает движущаяся точка, называются переносными [2].

4.3 Теорема о сложении скоростей

Продифференцируем, выступая в роли «неподвижного» наблюдателя, сумму (рис. 4.2)

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{r}}_0 \quad (4.6)$$

по времени: абсолютная скорость точки М

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{r}}_0. \quad (4.7)$$

Движение точки М распространяется в двух системах отсчёта – неподвижной и подвижной. Это составляющие переносной скорости (рис. 4.2).

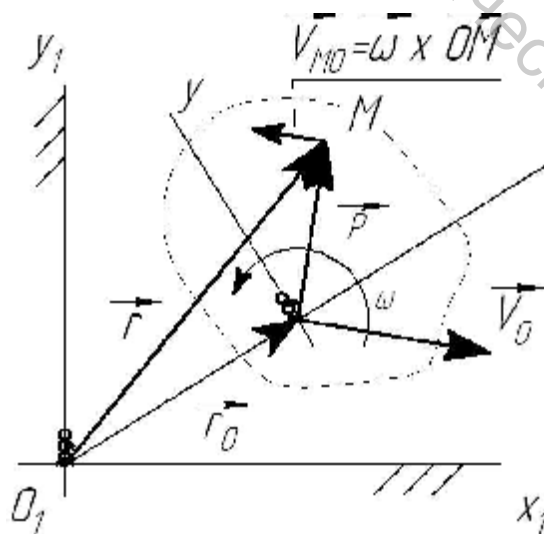


Рисунок 4.2 – Движение точки М в двух системах отсчёта – неподвижной и подвижной

Радиус-вектор \vec{r} в сумме (4.6) «проведён» «подвижным» наблюдателем, т.е. задан в подвижной системе отсчёта, его абсолютная производная в формуле (4.7) находится по правилу (4.5):

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (4.8)$$

где относительная производная радиуса-вектора $\frac{d\vec{r}}{dt}$ (определяемая «подвижным» наблюдателем) – относительная скорость точки М

$$\vec{V}_r = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (4.9)$$

Вторая производная в первой части формулы (4.7) – скорость подвижного начала О относительно неподвижных осей.

Используя производную (4.8) и относительную скорость (4.9) в геометрической сумме (4.7), найдём: абсолютная скорость

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + (\vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (4.10)$$

Выражение в скобках формулы (4.10) можно написать иначе:

$$\vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{OM}. \quad (4.11)$$

Сумма справа в равенстве (4.11) даёт (рис. 4.2) скорость \vec{V}_M (3.12) той точки М воображаемого твёрдого тела с «вмороженными» подвижными осями, с которой совпадает движущаяся точка М, т.е. переносную скорость \vec{V}_e .

Абсолютная скорость (4.10) равна, таким образом, геометрической сумме относительной скорости (4.9) и переносной скорости (4.11):

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e, \quad \vec{V}_e = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{OM}. \quad (4.12)$$

4.4 Теорема о сложении ускорений

Абсолютное ускорение – производная абсолютной скорости (4.12):

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{V}_a}{dt} = \frac{d\vec{V}_r}{dt} + \frac{d\vec{V}_e}{dt}. \quad (4.13)$$

Абсолютная производная относительной скорости в сумме (4.13), заданной в подвижной системе отсчёта (определяемой «подвижным» наблюдателем), находится по формуле (4.5):

$$\frac{d\vec{V}_r}{dt} = \frac{d\vec{V}_r}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{V}_r,$$

где относительная производная относительной скорости – относительное ускорение \vec{a}_r , определяемое «подвижным» наблюдателем, т.е.

$$\frac{d\vec{V}_r}{dt} = \vec{a}_r + \vec{\omega} \times \vec{V}_r. \quad (4.14)$$

Абсолютная производная переносной скорости (4.12)

$$\frac{dV_0}{dt} = V_0 + w \times OM + w \times OM, \quad (4.15)$$

где производная скорости подвижного начала O – его ускорение a_0 ;

производная угловой скорости – угловое ускорение e ; абсолютная производная радиуса-вектора OM , заданного в подвижной системе отсчёта, находится по формуле (4.5):

$$\frac{dOM}{dt} = OM + w \times OM = V_r + w \times OM,$$

ибо относительная производная вектора OM , проведенного «подвижным» наблюдателем, – относительная скорость (4.9). Производная (4.15) принимает вид:

$$\frac{dV_e}{dt} = \left[a_0 + e \times OM + w \times (w \times OM) \right] + w \times V_r. \quad (4.16)$$

Выражение в квадратных скобках формулы (4.16), совпадающее с выражением (3.13), даёт (рис. 4.3) ускорение той точки M воображаемого тела с «вмороженными» подвижными осями, с которой совпадает движущаяся точка M , т.е. переносное ускорение a_e , и производная (4.16).

$$\begin{aligned} V_e &= a_e + w \times V_r, \\ a_e &= a_0 + e \times OM + w \times (w \times OM). \end{aligned} \quad (4.17)$$

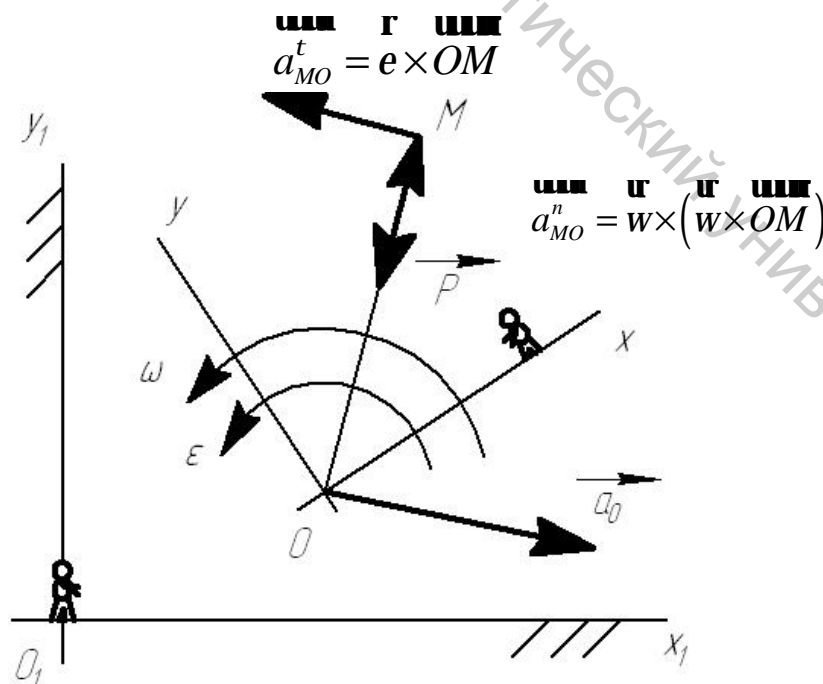


Рисунок 4.3 – Составляющие переносного ускорения

Как видим, производные (4.14) и (4.17) относительной и переносной скоростей отличаются от относительного a_r и переносного a_e ускорений. Эти производные равны соответствующим ускорениям в случае поступательно движущихся осей (когда переносная угловая скорость ω равна нулю).

Итак, абсолютное ускорение (4.13)

$$a_a = a_r + a_e + 2(\omega \times V_r). \quad (4.18)$$

4.5 Кориолисово (поворотное) ускорение

Третье слагаемое в правой части формулы (4.18) появляется как результат вращения подвижных осей – его называют поворотным, или кориолисовым ускорением [2]. Итак, абсолютное ускорение (4.18) равно геометрической сумме относительного ускорения:

$$a_r = V_r, \quad (4.19)$$

переносного ускорения

$$a_e = a_0 + e \times p + \omega \times (\omega \times p), \quad p = OM \quad (4.20)$$

и кориолисова ускорения

$$a_c = 2(\omega \times V_r). \quad (4.21)$$

Направление последнего (4.21) получается по Жуковскому поворотом (рис. 4.4) вектора относительной скорости V_r на 90° в сторону переносного вращения.

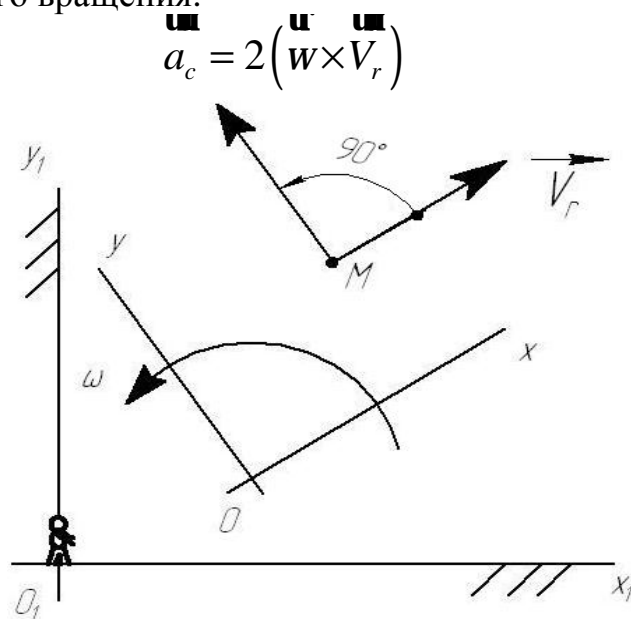


Рисунок 4.4 – Кориолисово ускорение

Лекция 5. Законы механики

5.1 Материальная точка

Объект законов механики – материальная точка – тело исчезающе малых размеров. За материальную точку может быть принято любое тело, размеры которого много меньше размеров траекторий всех его точек. Размеры Земли много меньше размеров её орбиты – Землю в её орбитальном движении вокруг Солнца можно принять за материальную точку. Если рассматривать суточное вращение Земли, размеры круговых траекторий её точек одного порядка с размерами Земли – принять Землю в этом движении за материальную точку нельзя.

5.2 Инерциальные системы отсчёта (ИСО)

Первый закон (Галилея-Ньютона) [2], часто называемый законом инерции, утверждает существование системы отсчёта, такой, что материальная точка, свободная от воздействий других тел, движется относительно её с постоянной скоростью, прямолинейно и равномерно. Эту систему отсчёта называют инерциальной (ИСО).

Пусть выбраны другие оси, движущиеся относительно ИСО поступательно, прямолинейно и равномерно. Абсолютное ускорение свободной материальной точки (относительно ИСО) равно нулю. Относительное ускорение находим по теореме о сложении ускорений (4.18):

$$\mathbf{a}_r = \mathbf{a}_a - \mathbf{a}_e - 2(\mathbf{w} \times \mathbf{V}_r), \quad (5.1)$$

где абсолютное ускорение $\mathbf{a}_a = 0$; переносное ускорение (4.20) равно нулю, ибо начало подвижной системы отсчёта движется по условию прямолинейно и равномерно – с ускорением \mathbf{a}_0 , равным нулю, к тому же подвижные оси движутся поступательно – с угловыми скоростью \mathbf{w} и ускорением \mathbf{e} , равными нулю; кориолисово ускорение (4.21) равно нулю по той же причине. В итоге относительное ускорение (5.1, 4.19) равно нулю, относительная скорость $\mathbf{V}_r = \text{const}$. Иными словами, подвижная система отсчёта тоже ИСО.

Наоборот, пусть система отсчёта, движущаяся относительно первой ИСО, тоже ИСО. Следовательно, абсолютное \mathbf{a}_a и относительное \mathbf{a}_r ускорения равны нулю. Но тогда (по теореме о сложении ускорений) сумма переносного (4.20) и кориолисова (4.21) ускорения

$$\mathbf{a}_0 + \mathbf{e} \times \mathbf{p} + \mathbf{w} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{p}) + 2(\mathbf{w} \times \mathbf{V}_r) = 0. \quad (5.2)$$

Уравнение (5.2) удовлетворяется в произвольном положении движущейся точки, определяемом радиусом-вектором \vec{r} (рис. 4.3), постоянными нулевыми значениями переносной угловой скорости $\vec{\omega}$ (значит, и $\dot{\vec{\omega}} = 0$) и ускорения подвижного начала отсчёта \vec{a}_0 , а это значит, что подвижная система отсчёта движется поступательно, прямолинейно и равномерно (относительно первой ИСО).

Итак, все ИСО движутся относительно друг друга поступательно, прямолинейно и равномерно.

В технических приложениях часто достаточно в качестве ИСО система отсчёта, жёстко связанная с Землёй. Намного лучшие приближения к ИСО геоцентрическая и гелиоцентрическая системы отсчёта, начала которых помещаются в центрах Земли и Солнца, а оси направляются на достаточно удалённые от них («неподвижные») звёзды.

5.3 Основной закон механики (второй закон Ньютона)

Пока материальная точка не взаимодействует с другими телами, она движется относительно ИСО без ускорения. Причина ускорения – силовые воздействия на точку. За направление силы принимается направление ускорения точки, отношения величин различных сил к величинам соответствующих ускорений оказываются для точки одинаковыми, т.е. сила, действующая на точку [2]:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}, \quad (5.3)$$

где m – постоянный коэффициент, называемый массой точки. Так как в ИСО, движущейся относительно другой ИСО, переносное и кориолисово ускорения равны нулю, абсолютное и относительное ускорения равны. Закон (5.3) для всех ИСО один и тот же.

Если закон (5.3) не выполняется, следует искать силы, не учтённые в опыте. На рисунке 5.1 это сила действия нити на точку – реакция нити. Одна сила – равнодействующая

$$\vec{R} = m \cdot \vec{a} \quad (5.4)$$

заменяет действие двух сил – заданной силы \vec{F} и реакции нити \vec{T} , причём равнодействующая (5.4) находится по правилу параллелограмма (треугольника):

$$\vec{R} = \vec{F} + \vec{T}. \quad (5.5)$$

Равнодействующая двух сил находится по правилу параллелограмма, или треугольника: вектор равнодействующей \vec{R} замыкает ломаную, составленную из сил \vec{T} и \vec{F} (рис.5.1).

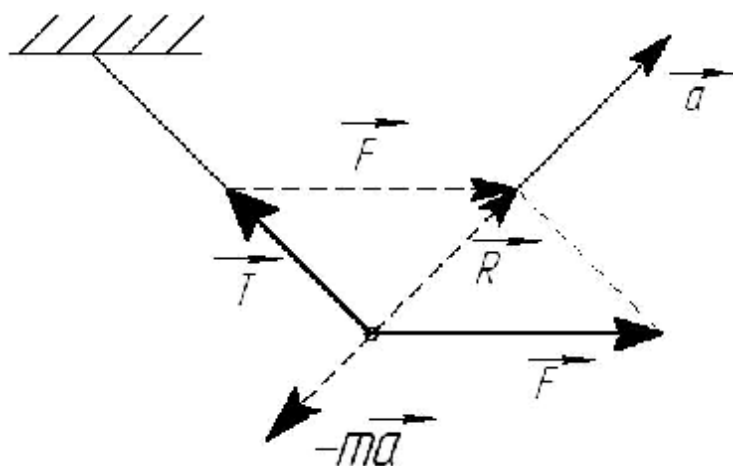


Рисунок 5.1 – Равнодействующая двух сил

Последовательное применение правила (5.5) приводит к сложению нескольких сил по правилу силового многоугольника (рис. 5.2):

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k. \quad (5.6)$$

Используя в правиле (5.6) основной закон (5.4), получим принцип независимости действия сил: ускорение, сообщаемое группой сил,

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_1}{m} + \frac{\vec{F}_2}{m} + \dots + \frac{\vec{F}_n}{m} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n \quad (5.7)$$

равно сумме ускорений, сообщаемых каждой из сил в отдельности.

Силовой многоугольник (5.6) может оказаться замкнутым (рис. 5.3), ускорение (5.7) равно в этом случае нулю. О таких силах говорят, что они уравниваются; любая из сил группы (5.6) уравнивает все другие.

Равнодействующая \vec{R} замыкает ломанную, составленную из сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ (рис. 5.2).

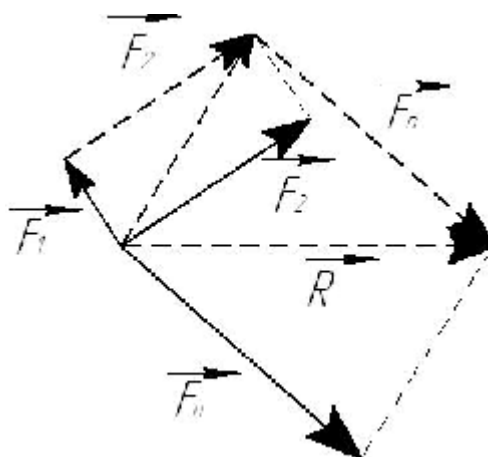


Рисунок 5.2 – Равнодействующая \vec{R}

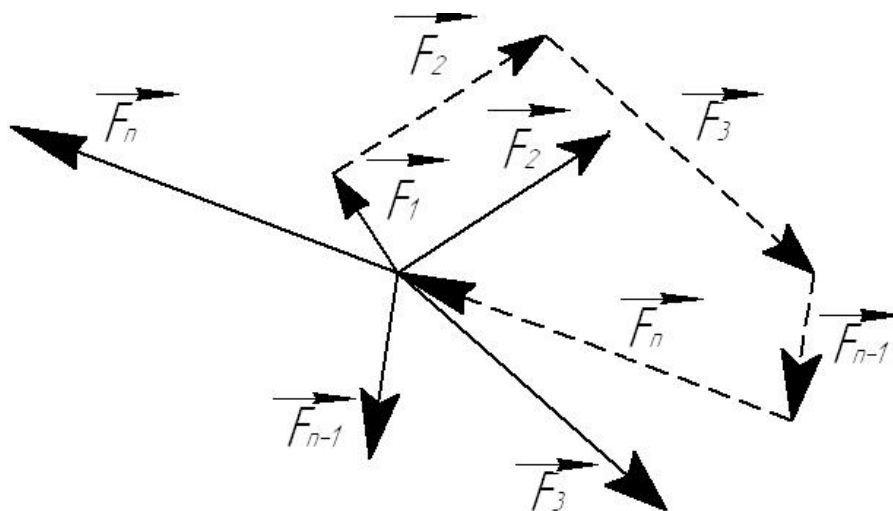


Рисунок 5.3 – Замкнутый силовой многоугольник

5.4 Сила инерции

К силам, действующим на точку, добавим (мысленно!) силу $(-ma)$. Ускорение точки (5.7)

$$\mathbf{a}' = \left(\frac{\mathbf{F}_1}{m} + \frac{\mathbf{F}_2}{m} + \dots + \frac{\mathbf{F}_n}{m} \right) + \frac{(-ma)}{m} = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_n) - \mathbf{a}, \quad (5.8)$$

но сумма в круглых скобках (5.7) равна ускорению \mathbf{a} , следовательно, ускорение (5.8) равно нулю. Сила инерции $(-ma)$ «уравновешивает» заданные силы [2].

Рассматривая аналогичное «равновесие» на рис. 5.1, напишем уравнение

$$\mathbf{F} + \mathbf{T} + (-ma) = 0, \quad (5.9)$$

откуда найдётся реакция нити в движении точки – динамическая реакция.

5.5 Третий закон Ньютона, реакции в кинематических парах

Звенья механизма, соприкасаясь в кинематических парах, действуют друг на друга вдоль одной прямой силами, равными по величине и противоположными по направлению (третий закон Ньютона [2]). На рисунке 5.4 показаны силы взаимодействия звеньев механизма в поступательной кинематической паре, на рисунке 5.5 – силы взаимодействия во вращательной паре. Каждая из сил взаимодействия выступает как реакция одного из звеньев в действии его на другое.

Поскольку силы можно не только складывать по правилу (5.6), но и разлагать по этому же правилу на составляющие, одну из реакций на

рисунке 5.5 можно заменить двумя взаимно перпендикулярными силами – составляющими. Неизвестные реакции определяют из уравнений равновесия заданных сил (в покое звена) или из уравнений «равновесия» заданных сил и сил инерции (в движении звена). Последние аналогичны уравнению (5.9).

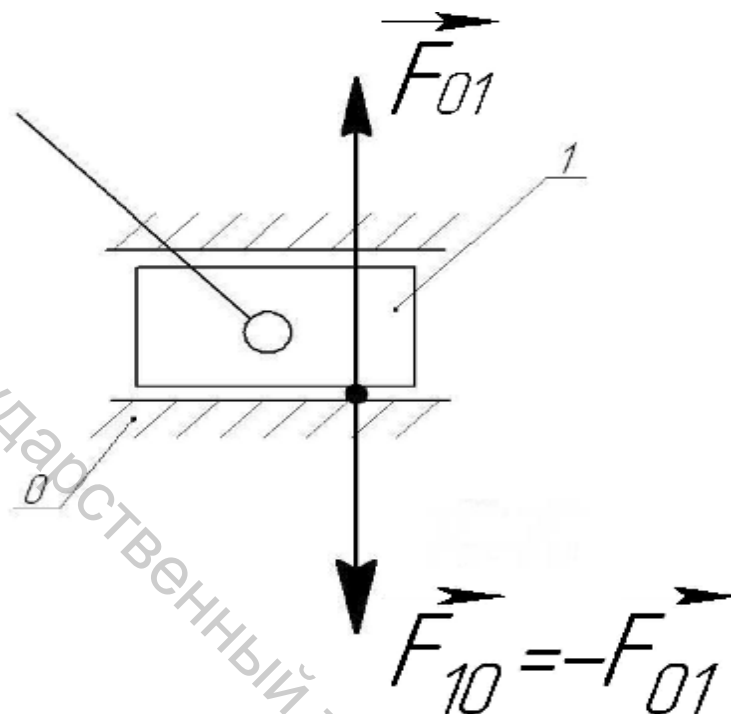


Рисунок 5.4 – Силы взаимодействия в поступательной паре

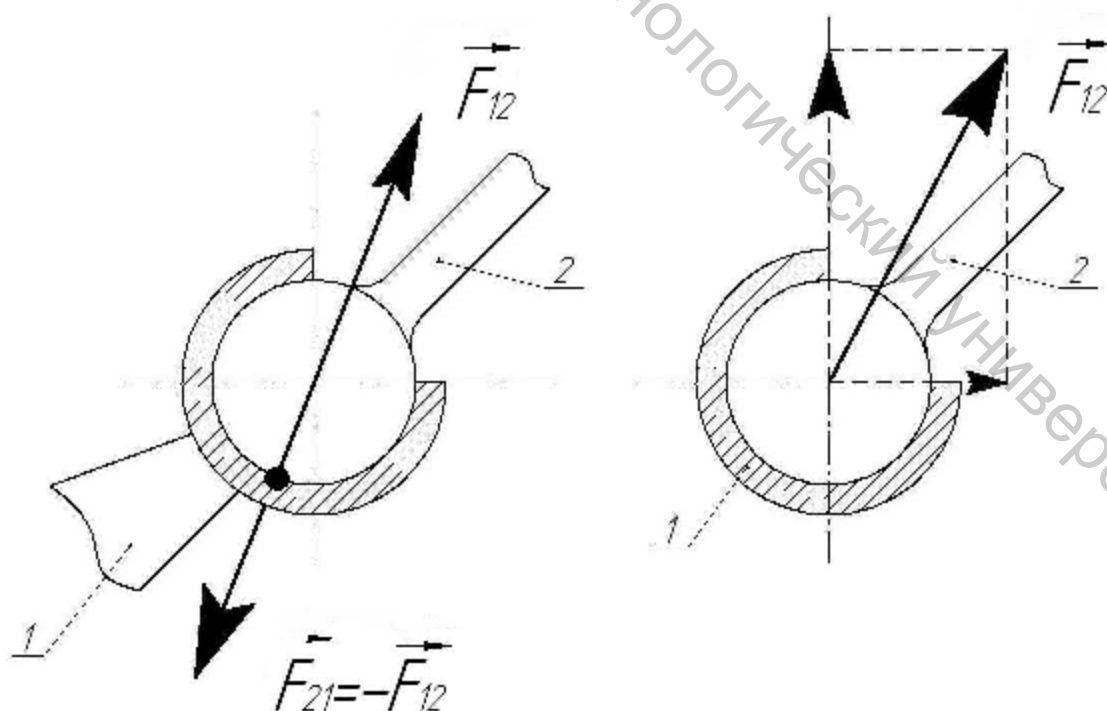


Рисунок 5.5 – Силы взаимодействия во вращательной паре (сила \vec{F}_{12} разложена на составляющие)

Лекция 6. Теоремы об изменении кинетической энергии

6.1 Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки

Исходя из основного закона (5.3), учитывая в нём определение ускорения (2.5), умножим (скалярно) обе части равенства (5.3) на скорость. Получим скалярные произведения:

$$m \frac{d\dot{\mathbf{V}}}{dt} \cdot \dot{\mathbf{V}} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \dot{\mathbf{V}}, \quad (6.1)$$

или, переписывая равенство (6.1),

$$m \dot{\mathbf{V}} \cdot d\dot{\mathbf{V}} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \dot{\mathbf{V}} dt = \dot{\mathbf{F}} \cdot d\dot{\mathbf{r}}. \quad (6.2)$$

Скалярное произведение в левой части равенства (6.2)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}} \cdot d\dot{\mathbf{V}} &= V_x \cdot dV_x + V_y \cdot dV_y + V_z \cdot dV_z = d\left(\frac{V_x^2}{2}\right) + d\left(\frac{V_y^2}{2}\right) + d\left(\frac{V_z^2}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{2} d(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) = \frac{1}{2} dV^2 = V \cdot dV, \end{aligned} \quad (6.3)$$

скалярное произведение в правой части (рис. 6.1):

$$\dot{\mathbf{F}} \cdot d\dot{\mathbf{r}} = F \cdot |d\dot{\mathbf{r}}| \cdot \cos \alpha = F_V \cdot dS \quad (6.4)$$

(так как проекция силы $\dot{\mathbf{F}}$ на направление $d\dot{\mathbf{r}}$ (на направление скорости $\dot{\mathbf{V}}$) $F_V = F \cdot \cos \alpha$, модуль приращения радиуса-вектора $|d\dot{\mathbf{r}}|$ равен элементу дуги траектории dS).

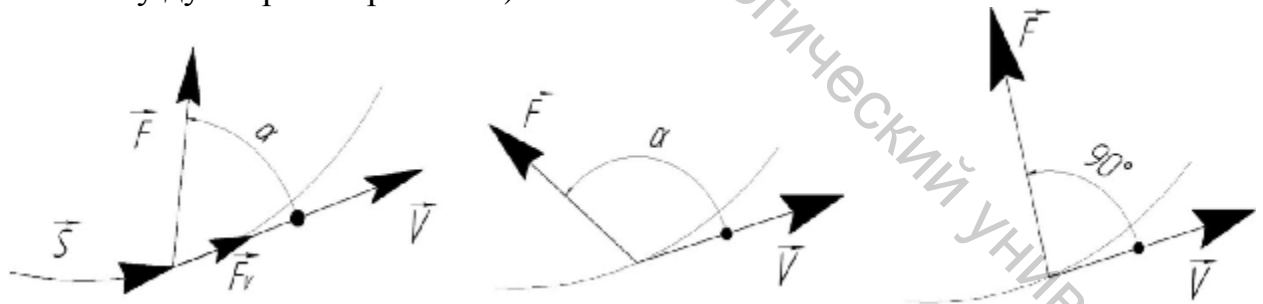


Рисунок 6.1 – Работа силы $\dot{\mathbf{F}}$

Работа силы $\dot{\mathbf{F}}$ положительна, когда угол α – острый; отрицательна, когда угол α – тупой; равна нулю, когда сила и скорость взаимно перпендикулярны

Вводя в рассмотрение кинетическую энергию [2] материальной точки

$$T = \frac{mV^2}{2} \quad (6.5)$$

и называя [2] произведение (6.4)

$$d'A = \dot{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{r} = F_v \cdot dS \quad (6.6)$$

работой силы, действующей на точку, на перемещении $d\mathbf{r}$ (или dS), перепишем равенство (6.2) и получим теорему об изменении кинетической энергии точки

$$dT = d'A. \quad (6.7)$$

Приращение кинетической энергии на перемещении $d\mathbf{r}$ (или dS) равно работе силы, действующей на точку. Кинетическая энергия точки (6.5) нарастает, если работа (6.6) положительна (угол α на рисунке 6.1 острый); убывает, если угол α на рисунке 6.1 тупой, и остаётся постоянной, если сила, действующая на точку, перпендикулярна к скорости (рис. 6.1).

В случае нескольких сил, действующих на точку, их работа (6.6) в теореме (6.7) может быть вычислена как работа равнодействующей (5.6):

$$d'A = \mathbf{R} \cdot d\mathbf{r} = \left(\sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \right) \cdot d\mathbf{r} = \sum_{k=1}^n (\mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^n d'A_k. \quad (6.8)$$

Иначе, работа (6.8) равна сумме работ всех сил, действующих на точку.

Деля равенство (6.7) на dt , найдём, что производная кинетической энергии (6.5) (см. произведение (6.3)) равна:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{m}{2} \cdot 2V \frac{dV}{dt} = mV \cdot \frac{dV}{dt} \quad (6.9)$$

равна работе $d'A/dt$ в единицу времени – мощности силы. Эта другая форма теоремы даётся, как нетрудно видеть, равенством (6.1), левая часть которого – производная (6.9), правая часть – мощность силы.

6.2 Теорема об изменении кинетической энергии твёрдого тела

«Разобьём» тело на достаточно большое число достаточно малых частиц (рис. 6.2) – материальных точек.

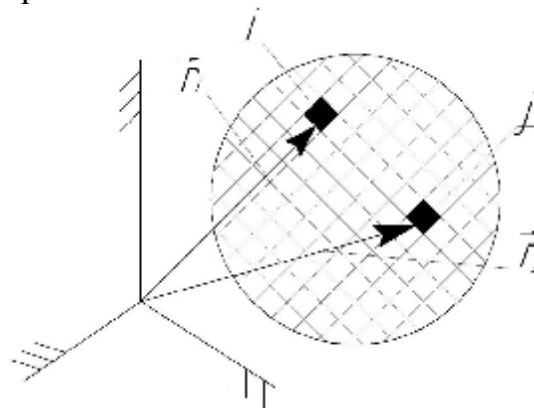


Рисунок 6.2 – Твёрдое тело «разбито» на частицы – материальные точки

На каждую из них действуют внешние силы с равнодействующей $\vec{R}_k^{(e)}$ (со стороны других тел), например, силы тяжести, и внутренние силы с равнодействующей $\vec{R}_k^{(i)}$ (со стороны других точек тела). Внутренние силы – силы взаимодействия, подчиняющиеся третьему закону (см. п. 5.5). Выделим две частицы тела и противоположные силы их взаимодействия $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$ (рис. 6.3).

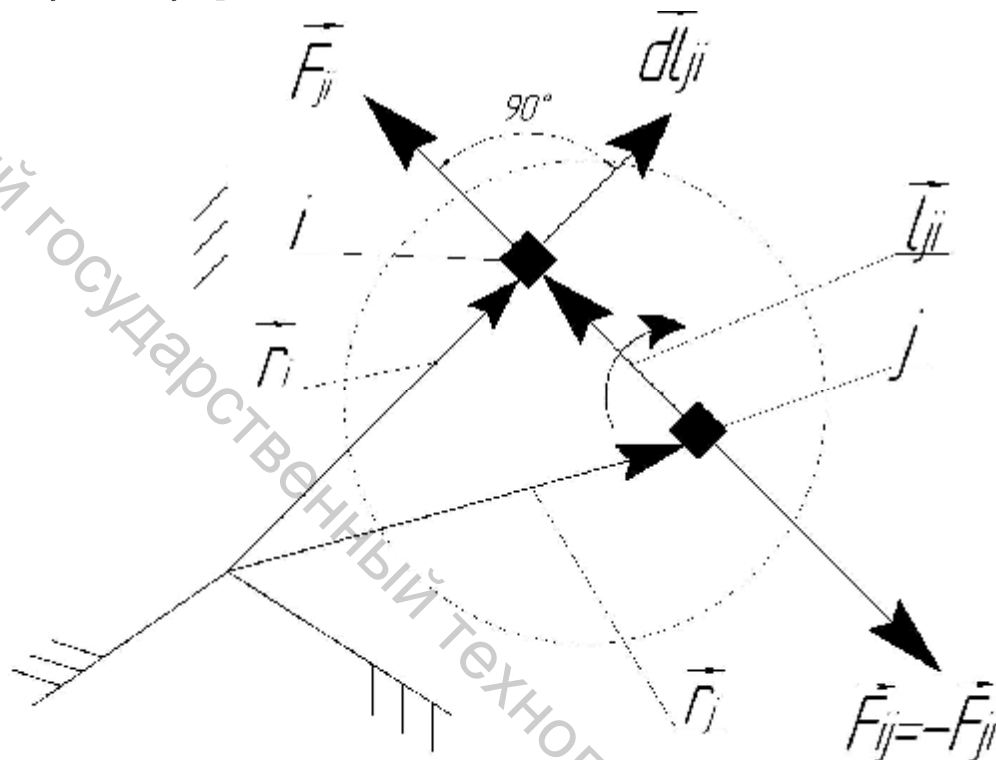


Рисунок 6.3 – К вычислению работы сил взаимодействия в твёрдом теле

Сумма их работ

$$\vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_j = \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_i - \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_j = \vec{F}_{ji} \cdot (d\vec{r}_i - d\vec{r}_j) = \vec{F}_{ji} \cdot d(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{l}_{ji}, \quad (6.10)$$

где \vec{l}_{ji} – вектор в твёрдом теле, неизменный по величине, с началом в j-ой частице и концом в i-ой частице тела. Приращение этого вектора появляется только при его повороте и перпендикулярно к нему, скалярное произведение (6.10) равно нулю. Поскольку все внутренние силы в твёрдом теле представляются совокупностью таких пар, их работа на любом перемещении тела равна нулю.

Приращение кинетической энергии (6.7) k-ой частицы тела

$$dT_k = d'A_k^{(e)} + d'A_k^i, \quad (6.11)$$

$$k = 1, 2, \dots, n,$$

где n – число частиц тела. Суммирование равенств (6.11) по индексу k даёт теорему

$$\sum_{k=1}^n dT_k = d\left(\sum_{k=1}^n T_k\right) = \sum_{k=1}^n d'A_k^{(e)}, \quad (6.12)$$

где $T = \sum_{k=1}^n T_k$ - кинетическая энергия в целом, (6.13)

$$d'A^{(e)} = \sum_{k=1}^n d'A_k^{(e)} \quad (6.14)$$

Это сумма работ равнодействующих внешних сил $\vec{R}_k^{(e)}$, равная, конечно, сумме работ всех внешних сил (без замены их равнодействующими). В обозначениях (6.13, 6.14) теорема (6.12) принимает вид:

$$dT = d'A^{(e)}. \quad (6.15)$$

6.3 Кинетическая энергия твёрдого тела в поступательном движении

Кинетическая энергия (6.13) получается суммированием энергий (6.5) всех частиц тела:

$$T = \sum_{k=1}^n \frac{m_k V_k^2}{2}, \quad (6.16)$$

но скорости всех частиц в поступательном движении твёрдого тела (см. п. 2.2) одинаковы, и кинетическая энергия (6.16)

$$T = \left(\sum_{k=1}^n m_k\right) \frac{V^2}{2}, \quad (6.17)$$

где \vec{V} – скорость любой из точек тела, её можно назвать скоростью тела в целом; а $M = \sum_{k=1}^n m_k$ – масса его. Формула (6.17) приобретает вид:

$$T = \frac{MV^2}{2}. \quad (6.18)$$

Как видим, кинетическая энергия твёрдого тела в поступательном движении (6.18) находится так же, как кинетическая энергия одной материальной точки.

6.4 Кинетическая энергия во вращении твёрдого тела вокруг неподвижной оси

Скорость частицы твёрдого тела в его вращении вокруг неподвижной оси Z определяется формулой (2.12):

$$V_k^t = \omega \cdot r_k,$$

где ω – угловая скорость вращения, r_k – расстояние k -ой частицы тела от оси вращения. Кинетическая энергия (6.16)

$$T = \sum_{k=1}^n \frac{m_k (\omega \cdot r_k)^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n m_k \cdot r_k^2 \right) \omega^2, \quad (6.19)$$

где сумма в скобках

$$I_z = \sum_{k=1}^n m_k \cdot r_k^2 \quad (6.20)$$

зависит от распределения массы твёрдого тела и называется [2] моментом инерции твёрдого тела относительно оси вращения z . Вводя обозначение (6.20) в формулу (6.19), получим кинетическую энергию во вращении:

$$T = \frac{1}{2} I_z \omega^2. \quad (6.21)$$

Если сопоставить выражения (6.18) и (6.21), найдём, что момент инерции тела играет в его вращении роль массы в поступательном движении, а роль скорости тела играет угловая скорость.

Лекция 7. Уравнения плоско-параллельного движения

7.1 Закон поступательного движения твёрдого тела

Работа внешних сил, действующих на твёрдое тело в его поступательном движении (6.14)

$$d' A^{(e)} = \sum_{j=1}^S d' A_j^{(e)}, \quad (7.1)$$

где работа j -ой внешней силы из числа S сил (6.6)

$$d' A_j^{(e)} = \mathbf{F}_j^{(e)} \cdot d\mathbf{r}_j.$$

Здесь $d\mathbf{r}_j$ – перемещение точки приложения j -ой силы, или

$$d' A_j^{(e)} = \left(\mathbf{F}_j^{(e)} \cdot \frac{d\mathbf{r}_j}{dt} \right) dt = \left(\mathbf{F}_j^{(e)} \cdot \mathbf{V}_j \right) dt. \quad (7.2)$$

Выражение в скобках формулы (7.2) – мощность (6.1) силы $\mathbf{F}_j^{(e)}$.

$$P_j^{(e)} = \mathbf{F}_j^{(e)} \cdot \mathbf{V}_j \quad (7.3)$$

Работа (7.1) в обозначениях (7.2, 7.3) приобретает вид:

$$d'A^{(e)} = \left[\sum_{j=1}^S \left(\mathbf{F}_j^{(e)} \cdot \mathbf{V}_j \right) \right] dt = \left[\sum_{j=1}^S P_j^{(e)} \right] dt. \quad (7.4)$$

Производная (6.9) кинетической энергии (6.18) равна (см. теорему (6.15)) работе (7.4), разделённой на dt , – работе в единицу времени – мощности сил, действующих на тело:

$$\frac{dT}{dt} = M \frac{d\mathbf{V}}{dt} \cdot \mathbf{V} = \left[\sum_{j=1}^S \mathbf{F}_j^{(e)} \right] \cdot \mathbf{V} = \left[\sum_{j=1}^S P_j^{(e)} \right] \quad (7.5)$$

В поступательном движении все скорости \mathbf{V}_j одинаковы, равны скорости тела \mathbf{V} . Теорема (7.5) даёт закон поступательного движения тела:

$$M \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \sum_{j=1}^S \mathbf{F}_j^{(e)}, \quad M \mathbf{a} = \sum_{j=1}^S \mathbf{F}_j^{(e)}. \quad (7.6)$$

Как видим, закон (7.6) таков же, как закон движения (5.4, 5.6) одной материальной точки, только в случае одной точки все силы приложены к точке, тогда как в случае тела внешние силы прилагаются в каких угодно точках тела. Можно, однако, утверждать, что силы в сумме уравнения (7.6) приводятся к одной силе – равнодействующей, равной этой сумме – главному вектору внешних сил. Остаётся указать точку приложения этой равнодействующей.

7.2 Центр масс твёрдого тела

Пусть твёрдое тело «разбито» (рис. 6.2) на n достаточно малых частиц. Центром масс тела называется [2] точка C , радиус-вектор которой

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot \mathbf{r}_i}{M}, \quad (7.7)$$

где m_i – масса i -ой частицы, $\sum_{i=1}^n m_i$ – масса M тела в целом. Скорость центра масс получается дифференцированием радиуса-вектора (7.7):

$$\mathbf{V}_C = \frac{d\mathbf{r}_C}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot \mathbf{V}_i}{M}, \quad (7.8)$$

ускорение – дифференцированием скорости (7.8):

$$\mathbf{a}_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot \mathbf{a}_i}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot \mathbf{r}_i}{M}. \quad (7.9)$$

7.3 Теорема о движении центра масс твёрдого тела

Суммируя уравнения движения всех n частиц твёрдого тела (5.4, 5.6):

$$m_i \cdot \mathbf{a}_i = \mathbf{R}_i^{(e)} + \mathbf{R}_i^{(i)},$$

где $\mathbf{R}_i^{(e)}$ – равнодействующая внешних сил, $\mathbf{R}_i^{(i)}$ – равнодействующая внутренних сил, действующих на i -ую частицу тела, найдём

$$\sum_{i=1}^n m_i \cdot \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i^{(e)} + \sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i^{(i)},$$

или, используя определение (7.9), закон

$$M \cdot \mathbf{a}_C = \sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i^{(e)} = \sum_{j=1}^S \mathbf{F}_j^{(e)}, \quad \mathbf{R}^{(i)} = \sum_{j=1}^S \mathbf{F}_j^{(e)} \quad (7.10)$$

(сумма внутренних сил в силу третьего закона (п. 5.5) $\sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i^{(i)} = 0$).

Центр масс твёрдого тела (сравните с законом (5.4, 5.6)) движется как материальная точка, к которой приложены все внешние силы, действующие на тело, приводясь к равнодействующей (5.6). Попутно выясняется, что равнодействующая внешних сил, действующих на твёрдое тело в его поступательном движении, приложена в его центре масс (7.7).

Можно сказать теперь, что теорема (7.10) выделяет из произвольного движения твёрдого тела поступательную составляющую. Закон поступательной составляющей, например, плоско-параллельного движения даётся уравнениями

$$M \cdot \ddot{x}_C = \sum_{j=1}^n F_{jx}^{(e)}, \quad M \cdot \ddot{y}_C = \sum_{j=1}^n F_{jy}^{(e)}. \quad (7.11)$$

В уравнениях (7.11) \ddot{x}_C и \ddot{y}_C – проекции ускорения центра масс \mathbf{a}_C в законе (7.10) на взаимно перпендикулярные оси «неподвижной» ИСО (рис. 7.1); $F_{jx}^{(e)}$, $F_{jy}^{(e)}$ – проекции j -ой внешней силы на те же оси, взятые в плоскости, в которой движется центр масс. Предполагается, что и все внешние силы действуют в той же плоскости.

7.4 Закон вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси

Пусть внешняя сила, действующая на вращающееся твёрдое тело (рис. 7.2), перпендикулярна к оси вращения. Работа её (6.4) (см. рис. 6.1):

$$d'A^{(e)} = F_V^{(e)} \cdot dS = (F^{(e)} \cos a) dS,$$

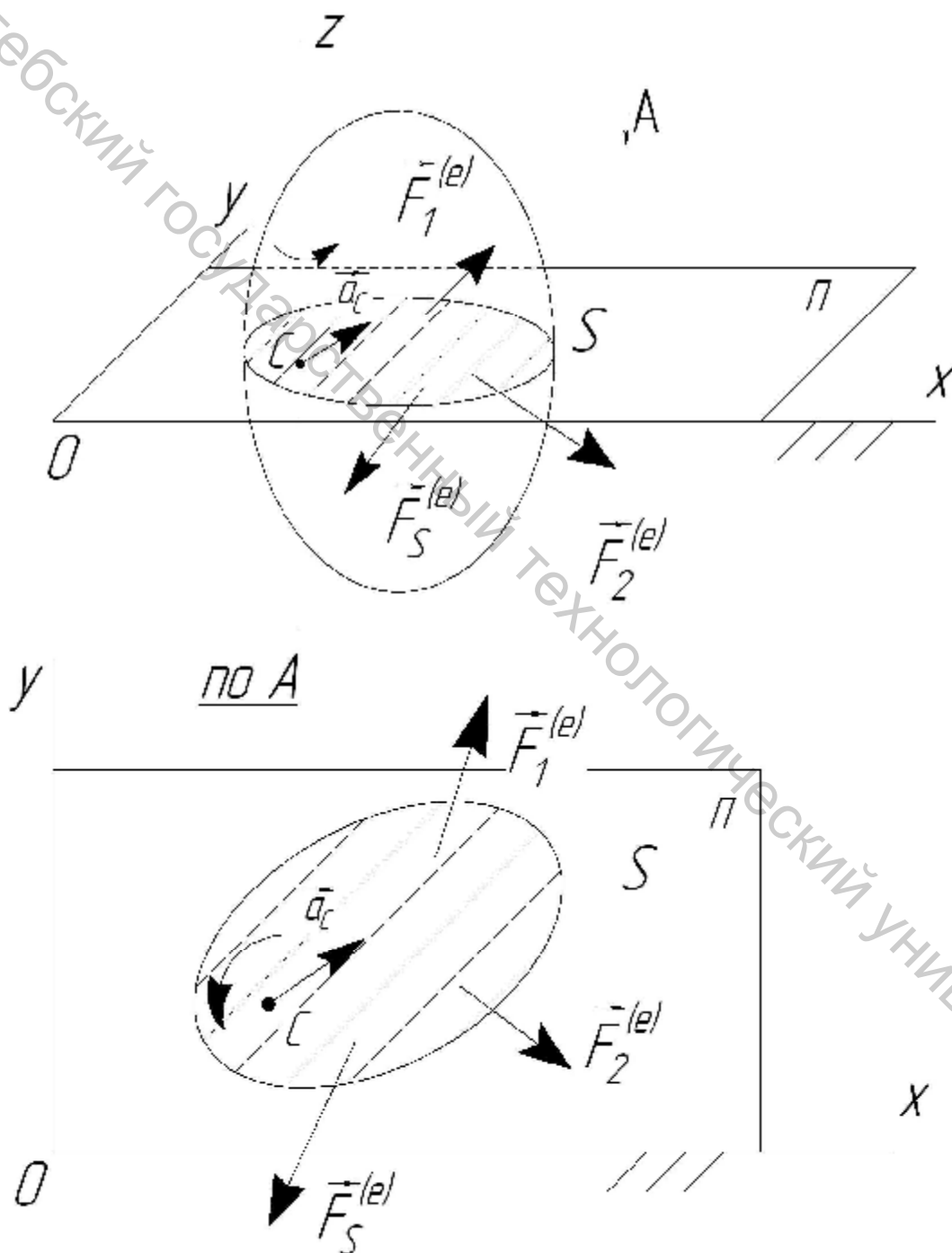


Рисунок 7.1 – Плоско-параллельное движение твёрдого тела под действием плоской системы сил: x и y – координатные оси «неподвижной» ИСО

где элемент дуги траектории $dS = r \cdot dj$, ρ – радиус круговой траектории точки приложения силы, $d\varphi$ – угол поворота тела за время dt , т.е. работа

$$d'A^{(e)} = \left[(F^{(e)} \cos a) r \right] \frac{dj}{dt} dt. \quad (7.12)$$

Выражение в скобках (рис. 7.2)

$$m_z(\vec{F}^{(e)}) = (F^{(e)} \cos a) r = F^{(e)} (r \cdot \cos a) = F^{(e)} h \quad (7.13)$$

называется [2] моментом силы $\vec{F}^{(e)}$ относительно оси вращения z положительным, если сила \vec{F} вращает тело против хода часовой стрелки (при наблюдении с конца оси z). Заметим, что перенос силы \vec{F} вдоль её линии действия не изменяет плеча h , т.е. не изменяет момента (7.13) и работы (7.12), которая запишется в виде:

$$d'A^{(e)} = \left[m_z(\vec{F}^{(e)}) \right] \cdot w dt, \quad (7.14)$$

где введена угловая скорость тела $w = dj / dt$. Работа S сил, перпендикулярных к оси вращения, найдётся суммированием работ (7.14):

$$d'A^{(e)} = \left[\sum_{k=1}^S m_z(\vec{F}_k^{(e)}) \right] \cdot w \cdot dt. \quad (7.15)$$

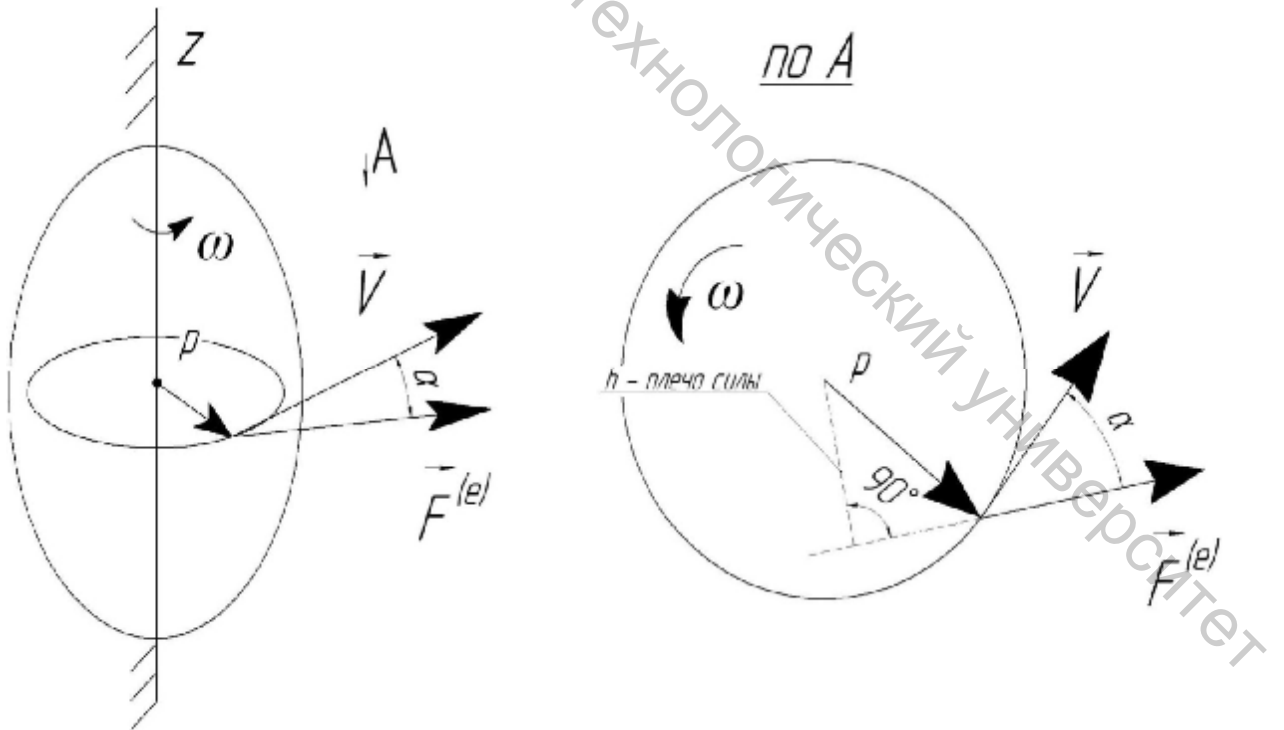


Рисунок 7.2 – Вращение твёрдого тела: к вычислению работы внешней силы, перпендикулярной к оси вращения, и её момента

Производная кинетической энергии (6.21) равна (см. теорему (6.15)) работе (7.15), взятой в единицу времени, – отношению работы (7.15) ко времени dt (мощности внешних сил):

$$P^{(e)} = \left[\sum_{k=1}^S m_z \left(\vec{F}_k^{(e)} \right) \right] \cdot \vec{w}: \quad (7.16)$$

$$\frac{1}{2} I_z 2\vec{w} \frac{d\vec{w}}{dt} = \left[\sum_{k=1}^S m_z \left(\vec{F}_k^{(e)} \right) \right] \cdot \vec{w},$$

что даёт закон вращения

$$I_z \vec{e} = \sum_{k=1}^S m_z \left(\vec{F}_k^{(e)} \right), \quad (7.17)$$

где введено угловое ускорение тела $\vec{e} = d\vec{w} / dt$.

Как видим, моменты сил относительно оси вращения играют в законе (7.17), мощности (7.16) и работе (7.15) роль сил в поступательном движении тела (см. формулы (7.6), (7.3), (7.2)); угловое ускорение и угловая скорость тела – роль ускорения и скорости тела в поступательном движении; момент инерции тела (6.20) – роль массы тела в поступательном движении.

7.5 Закон вращения в плоско-параллельном движении твёрдого тела

Закон (7.10 – 7.11) даёт возможность определить движение центра масс тела в «неподвижной» ИСО. Вращение вокруг центральной оси z (проходящей через центр масс C перпендикулярно (рис. 7.1) плоскости, в которой движется центр масс) определяется законом (7.17), написанным в виде:

$$I_C \vec{\varepsilon} = \sum_{k=1}^S m_C \left(\vec{F}_k^{(e)} \right), M_C^{(e)} = \sum_{k=1}^S m_C \left(\vec{F}_k^{(e)} \right), \quad (7.18)$$

где I_C – момент инерции тела относительно центральной оси Cz ; $\vec{\varepsilon}$ – угловое ускорение тела; ε – вторая производная угла поворота вокруг центральной оси; $m_C \left(\vec{F}_k^{(e)} \right)$ – момент внешней силы $\vec{F}_k^{(e)}$ относительно

но центра масс (рис. 7.3), равный моменту силы $\vec{F}_k^{(e)}$ относительно центральной оси Cz , сумма этих моментов – главный момент системы сил $M_C^{(e)}$ (7.18).

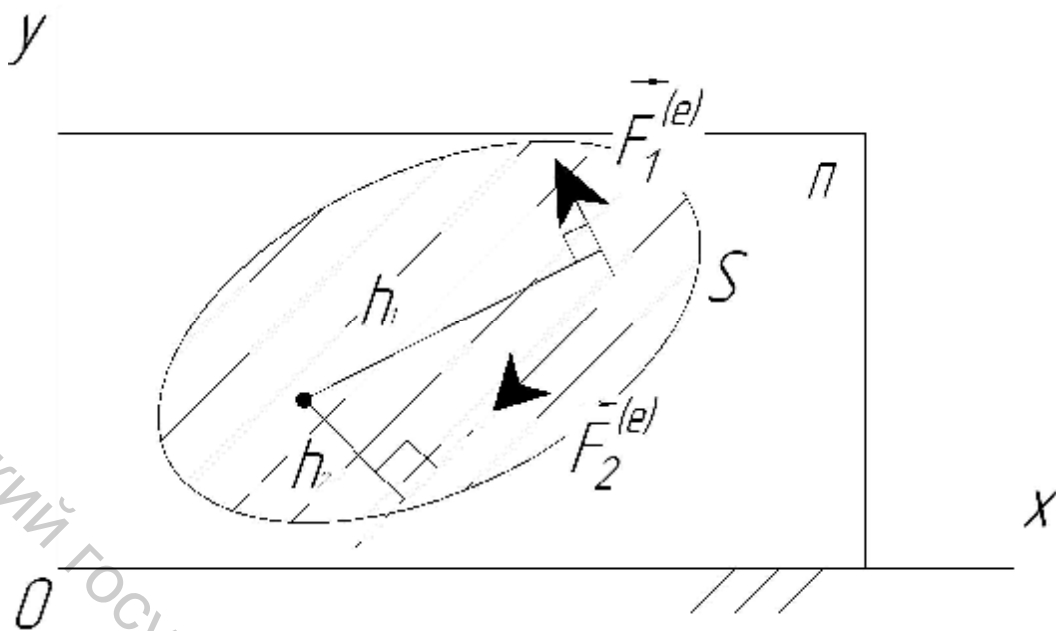


Рисунок 7.3 – Главный момент системы двух сил относительно центра масс (7.18) $M_C^{(e)} = m_C \left(\mathbf{r}_1^{(e)} \right) + m_C \left(\mathbf{r}_2^{(e)} \right) = F_1^{(e)} \cdot h_1 - F_2^{(e)} \cdot h_2$

Лекция 8. Условия равновесия в плоских механизмах

8.1 Перенос силы

Две противоположные силы \mathbf{F} и $\mathbf{F}' = -\mathbf{F}$ (рис. 8.1), действующие вдоль одной прямой, могут быть добавлены к системе сил на рисунке 7.1 (или могут быть выброшены из системы сил). Действительно, сумма этих сил и сумма их моментов относительно центра масс равны нулю. Они не изменяют главного вектора (суммы) действующих сил в законе (7.10) и главного момента (суммы моментов) в законе (7.18) и, следовательно, не влияют на плоскопараллельное движение тела.

Положим, что на тело к его точке А приложена одна сила \mathbf{F}_A . Приложим в точке В прямой АВ, вдоль которой действует сила, (линии действия силы) две силы $\mathbf{F}_B = \mathbf{F}_A$ и $\mathbf{F}_B' = -\mathbf{F}_A = -\mathbf{F}_B$. Две силы \mathbf{F}_A и $\mathbf{F}_B' = -\mathbf{F}_A$ могут быть отброшены. Остаётся одна сила $\mathbf{F}_B = \mathbf{F}_A$, которую можно рассматривать как силу \mathbf{F}_A , перенесённую в точку В.

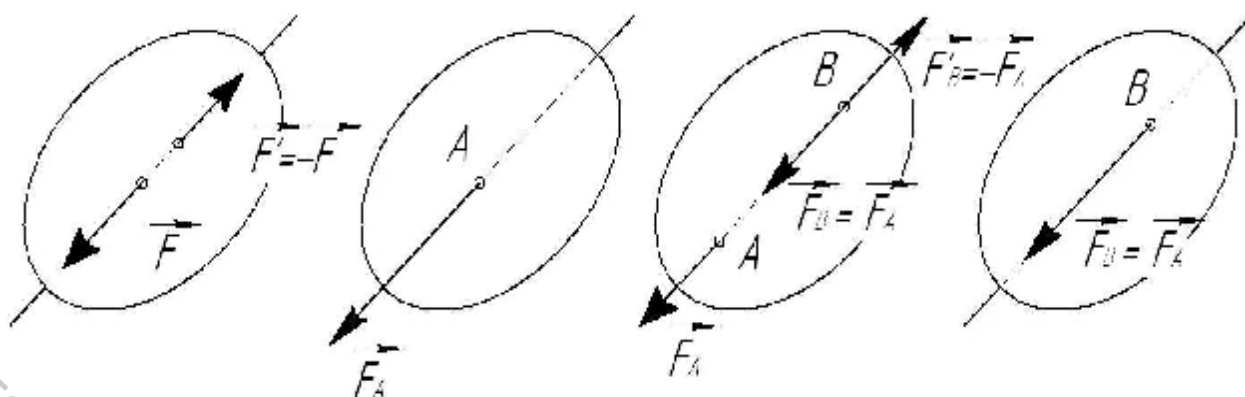


Рисунок 8.1 – Сила – скользящий вектор

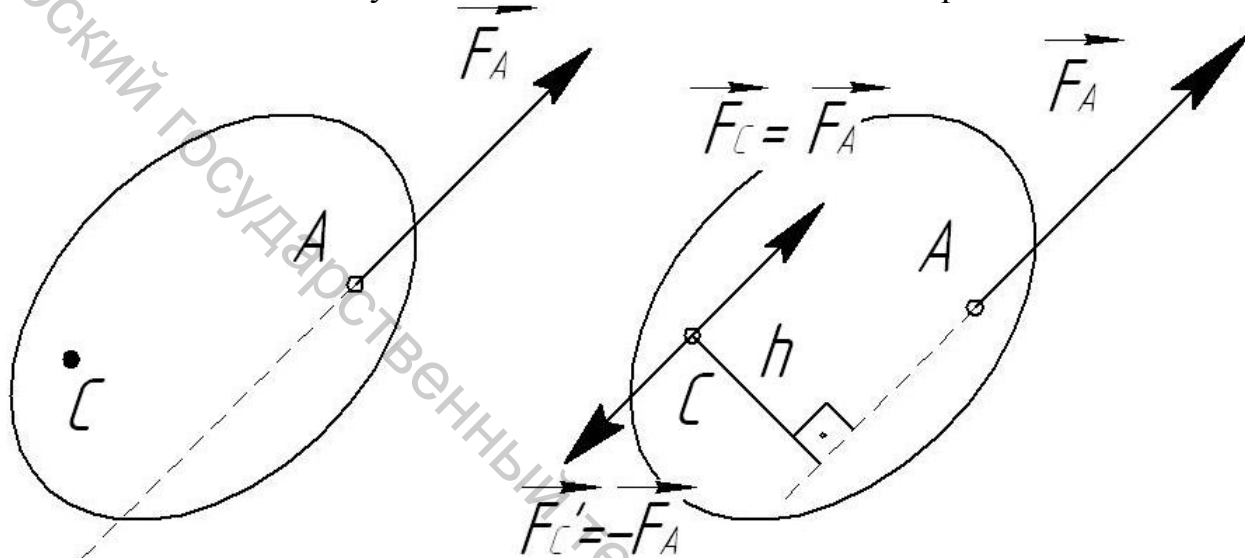


Рисунок 8.2 – Параллельный перенос силы

На рисунке 8.2 действие одной силы \vec{F}_A эквивалентно действию силы $\vec{F}_C = \vec{F}_A$ (силе \vec{F}_A , перенесённой в центр масс) и пары $(\vec{F}_A, \vec{F}'_C = -\vec{F}_A)$.

Итак, сила, приложенная к твёрдому телу, может быть перенесена вдоль её линии действия. Сила – скользящий вектор.

Пусть к твёрдому телу (к его точке A) приложена сила \vec{F}_A . Добавим к ней (рис. 8.2) две силы $\vec{F}_C = \vec{F}_A, \vec{F}'_C = -\vec{F}_A = -\vec{F}_C$, приложив их, например, в центре масс C. Силу \vec{F}_C можно рассматривать как силу \vec{F}_A , перенесённую из точки A в точку C; силы же \vec{F}_A и $\vec{F}'_C = -\vec{F}_A$ образуют пару двух антипараллельных сил. Момент пары

$$m(\vec{F}_A, \vec{F}'_C) = F_A \cdot h = m_C(\vec{F}_A) \quad (8.1)$$

определяется как момент переносимой силы \vec{F}_A относительно точки C. Пару сил можно переносить как угодно в плоскости её действия, можно

изменять величины сил, образующих пару, с одновременным изменением плеча h , оставляющим момент пары (8.1) неизменным.

8.2 Приведение произвольной плоской системы сил к центру масс

Каждую из S сил на рисунке 7.1 и рисунке 8.3 можно перенести в центр масс, добавив соответствующую пару с моментом (8.1). Образуется система сходящихся сил, приложенных к одной точке тела, и система пар. Сходящиеся в центре масс силы могут быть заменены одной силой – равнодействующей (7.10) – приводятся к равнодействующей. Появившиеся пары могут быть заменены одной парой с моментом (7.18).

Итак, произвольная плоская система сил в её приведении к центру масс может быть заменена одной силой \vec{R}_C , равной главному вектору (сумме) всех заданных сил, и одной парой с моментом, равным главному моменту M_C – сумме моментов всех заданных сил относительно центра масс (рис. 8.3).

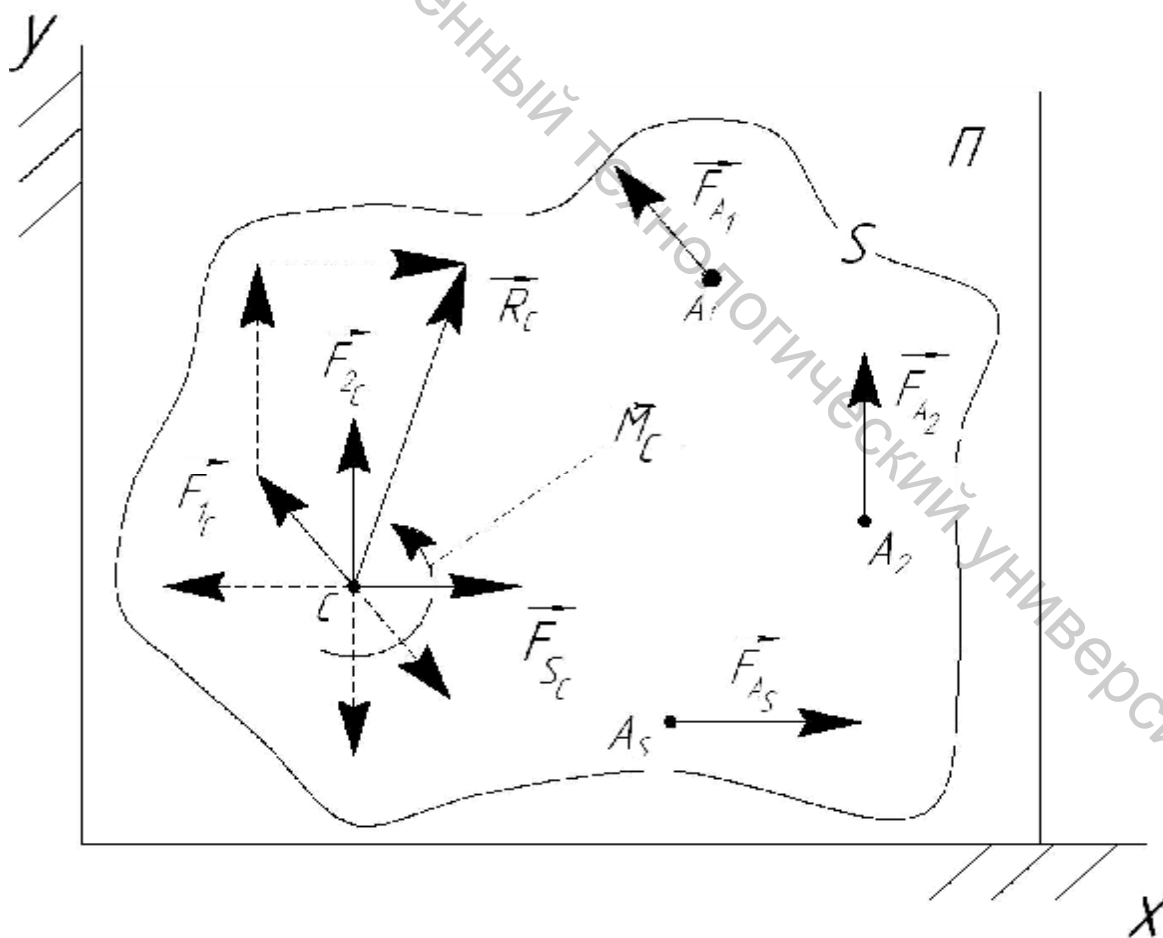


Рисунок 8.3 – Приведение плоской системы сил к центру масс твёрдого тела

На рисунке 8.3 силы заменяются одной силой $\mathbf{R}_C = \sum_{k=1}^S \mathbf{F}_{AK}$ и одной парой с моментом $\mathbf{M}_C = \sum_{k=1}^S m_C (\mathbf{F}_{AK})$.

8.3 Условия равновесия

Если главный вектор – сумма действующих сил (7.10) – равен нулю, центр масс тела движется с ускорением, равным нулю, т.е. с постоянной скоростью; в ИСО, движущейся со скоростью центра масс, покоится. Движение тел в этой ИСО сводится к вращению вокруг центральной оси – под действием пары с моментом (7.18). Эта пара – результат приведения действующих сил к центру масс. Однако, действующие силы можно привести к любой другой точке тела, например, точке О – получится пара с моментом $\mathbf{M}_O = \sum_{k=1}^S m_O (\mathbf{F}_K)$. В силу уравнения (7.18) этот момент равен главному моменту относительно центра масс.

Итак, при условии $\sum_{k=1}^S \mathbf{F}_K = 0$ главные моменты

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_C . \quad (8.2)$$

Если теперь главный момент (8.2) действующих на тело сил (относительно произвольной точки О) равен нулю, угловое ускорение тела в уравнении (7.18) равно нулю, тело вращается с постоянной угловой скоростью.

Пусть тело покоится в некоторой ИСО: скорость и ускорение его центра масс, его угловая скорость и угловое ускорение равны нулю. Следовательно (см. уравнения (7.10, 7.18)), главные вектор и момент действующих сил

$$\sum_{k=1}^S \mathbf{F}_K = 0 , \sum_{k=1}^S m_O (\mathbf{F}_K) = 0 \quad (8.3)$$

Это необходимые условия равновесия твёрдого тела.

Если, наоборот, выполняются условия (8.3), тело, находящееся в покое, не сможет прийти в движение, т.е. условия (8.3) выступают теперь как достаточные условия равновесия тела.

Если рассматривается изменяемая система твёрдых тел, находящаяся в покое-равновесии, её покой не изменится, если вообразить систему тел одним твёрдым телом. В случае равновесия необходимые условия равновесия (8.3) распространяются на изменяемые системы твёрдых тел – группы звеньев механизма. Однако, достаточными условиями равновесия таких систем условия (8.3) уже не являются.

8.4 Силы инерции и инерционный момент твёрдого звена механизма

Мысленно «разобьём» звено механизма на достаточно большое число n достаточно малых частиц (рис. 6.2). Приложим по всем частицам силы инерции $\vec{F}_K^{\text{èi}} = -m_K \vec{a}_K$ (рис. 5.1). Систему сил инерции, как и всякую систему сил, можно привести к любой точке, например, центру масс C , заменяя силы инерции одной силой:

$$\vec{F}_C^{\text{èi}} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_K^{\text{èi}} \quad (8.4)$$

и одной парой с моментом

$$M_C^{\text{èi}} = \sum_{k=1}^n m_K \left(\vec{r}_K^{\text{èi}} \right). \quad (8.5)$$

Силы инерции и действующие силы «уравновешиваются» (см. п. 5.5). Условия равновесия дают суммы:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^S \vec{F}_j + \vec{F}_C^{\text{èi}} &= 0, \\ \sum_{j=1}^S m_C \left(\vec{r}_j \right) + M_C^{\text{èi}} &= 0, \end{aligned} \quad (8.6)$$

в которых использованы результаты (8.4, 8.5).

Перепишем уравнения (7.10, 7.18):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^S \vec{F}_j + (-M \cdot \vec{a}_C) &= 0, \\ \sum_{j=1}^S m_C \left(\vec{r}_j \right) + (-I_C \cdot \vec{e}) &= 0. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Сравнивая уравнения (8.7) с условиями (8.6), найдём силу инерции звена (8.4), приложенную в его центре масс, и инерционный момент (8.5):

$$\vec{F}_C^{\text{èi}} = -M \cdot \vec{a}_C, \quad M_C^{\text{èi}} = -I_C \cdot \vec{e}, \quad (8.8)$$

где I_C – момент инерции звена относительно центральной оси.

8.5 Динамические реакции в кинематических парах плоских механизмов

Согласно Ассуру [1], плоский механизм с низшими кинематическими парами V класса образуется присоединением к механизму I класса (стойке с ведущими звеньями) групп звеньев нулевой подвижности: число степеней подвижности группы Ассура

$$w_r = 3n_r - 2p_{5r} = 0 ,$$

откуда число кинематических пар в группе

$$p_{5r} = 3 \frac{n_r}{2} .$$

Иными словами, число звеньев в группе чётное. В группах второго класса два звена: одна кинематическая пара внутренняя, две пары – внешние (см. рисунок 8.4).

Кривошипно-кулисный механизм на рисунке (1.11) образован присоединением к стойке с одним ведущим звеном группы 2 класса третьего вида.

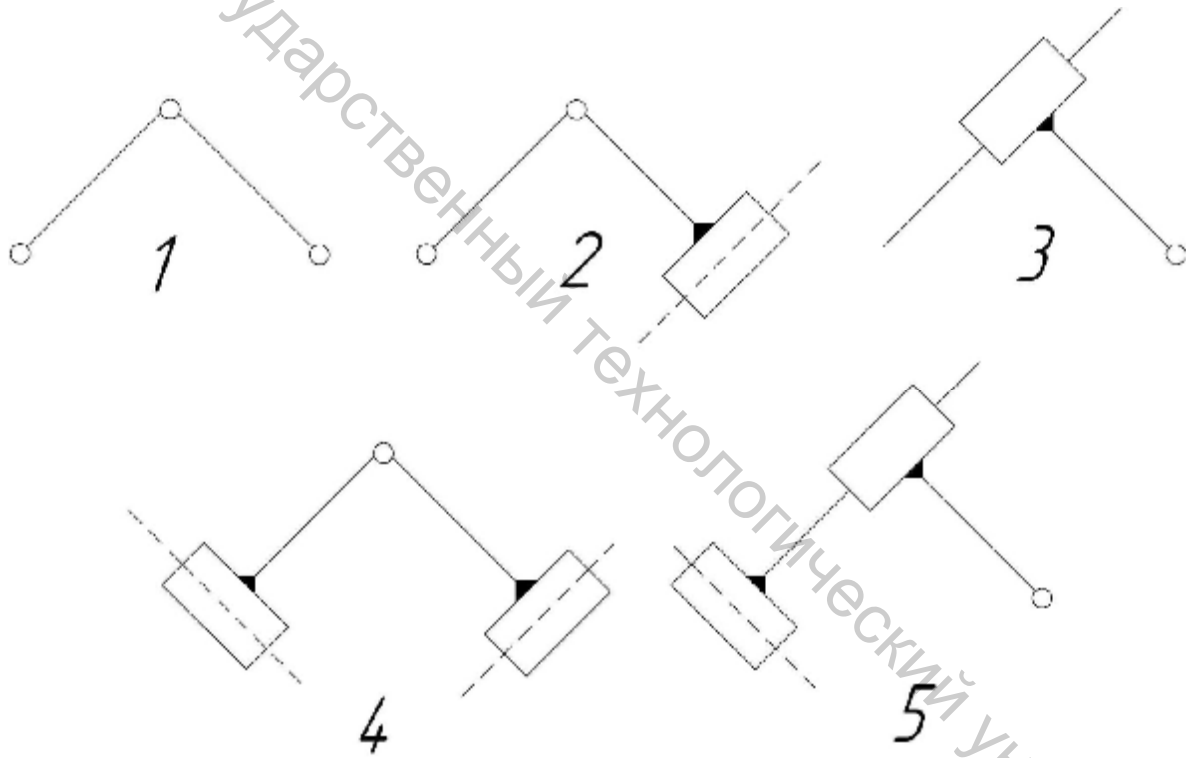


Рисунок 8.4 – Группы Ассура 2 класса пяти видов

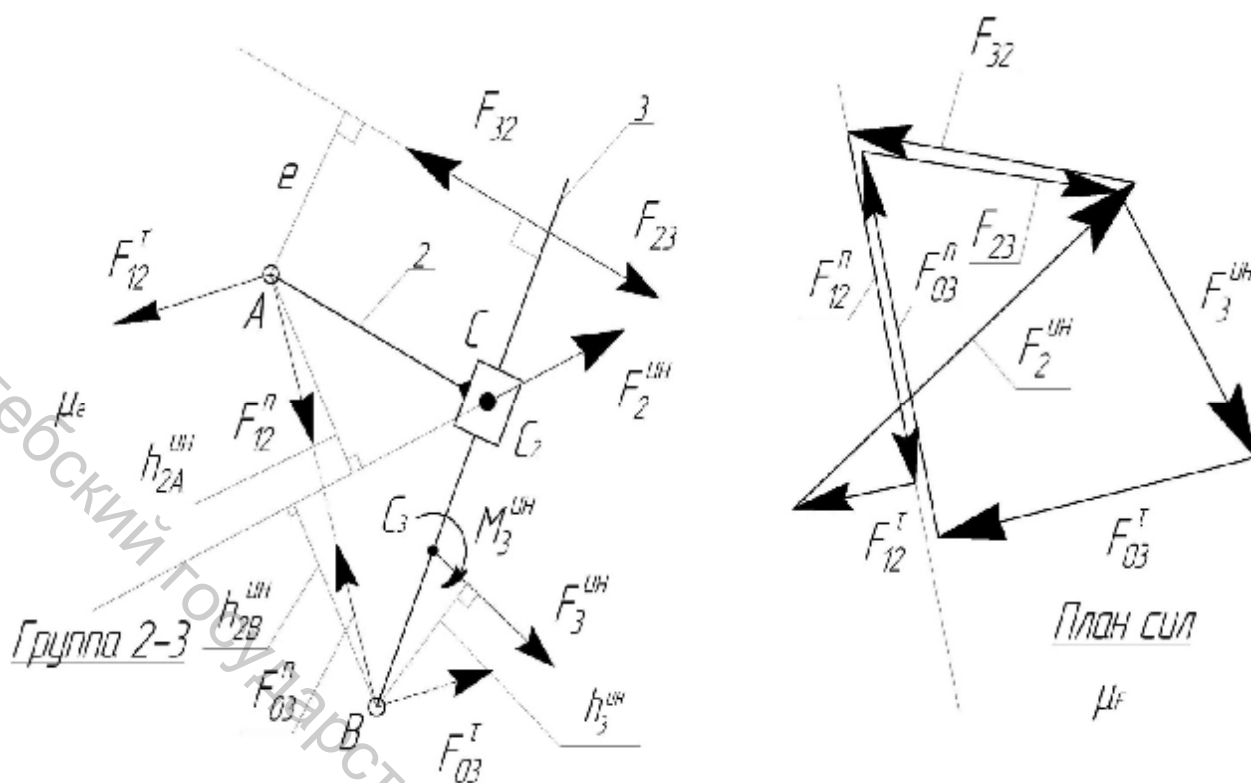


Рисунок 8.5 – План положения (масштаб μ_e) и план сил (масштаб μ_F) группы 2-3

Произведём силовой анализ аналогичной группы (рис. 8.5), образованной внутренней поступательной парой С и двумя вращательными парами А и В – внешними. Приложим к обоим звеньям заданные силы (если они имеются) и инерционные силовые факторы (8.8). Реакции во внешних кинематических парах А и В представлены взаимно перпендикулярными составляющими $\overline{F_{12}^t}, \overline{F_{12}^n}$ и $\overline{F_{03}^t}, \overline{F_{03}^n}$ (при этом полагается, что звено 2 соединяется в паре А с ведущим звеном 1, а звено 3 – со стойкой О). Поскольку силы инерции «уравновешивают» заданные силы и реакции $\overline{F_{12}^t}$ и $\overline{F_{03}^t}$, найдём, например, составляющую $\overline{F_{12}^t}$ из необходимого условия равновесия – уравнения моментов (8.6), вычисляя моменты относительно точки В:

$$\sum m_B = F_{12}^t \cdot (AB) m_e - F_2^{ei} h_{2B}^{ei} \cdot m_e - F_3^{ei} h_3^{ei} \cdot m_e - M_3^{ei} = 0,$$

$$F_{12}^t = \frac{F_2^{ei} h_{2B}^{ei} m_e + F_3^{ei} h_3^{ei} \cdot m_e + M_3^{ei}}{(AB) m_e},$$

где длины отрезков $(AB), h_{2B}^{ei}, h_3^{ei}$ измеряются на плане положения группы, μ_e – масштаб длин.

Реакцию звена 3 во внутренней поступательной (рис. 8.5) паре С F_{32} и составляющую F_{12}^n найдём, строя (рис. 8.5) замкнутый силовой многоугольник $F_{12}^t + F_2^{ei} + F_{32} + F_{12}^n = 0$ (план сил, действующих на звено 2). Продолжая план сил силами $F_{23} = -F_{32}, F_3^{ei}, F_{03}^t, F_{03}^n$, действующими на звено 3, найдём реакции F_{03}^t и F_{03}^n .

Наконец, плечо e реакций F_{23} и F_{32} находится из уравнения моментов сил, действующих, например, на звено 2:

$$\sum m_A = F_{32} \cdot e \cdot m_e + F_2^{ei} \cdot h_{2A}^{ei} \cdot m_e = 0,$$

$$e = -\frac{F_2^{ei} \cdot h_{2A}^{ei}}{F_{32}}.$$

Заметим, что действительные направления силы F_{03}^t и плеча e противоположны показанным на плане положения группы.

Лекция 9. Электропривод

9.1 Передаточное число

Электродвигатели тем легче и дешевле, чем они быстроходнее. В то же время рабочие скорости исполнительных механизмов на один-два порядка меньше. Возникает необходимость в понижающих механических передачах (зубчатых, ременных, цепных).

На рисунке 9.1 представлена схема электропривода, состоящего из электродвигателя (ЭД) 1, открытой (ОП) клиноременной передачи 2, закрытой (ЗП) прямозубой цилиндрической передачи 3, соединительной (СМ) зубчатой муфты 4, приводного (П) вала с барабаном (Б) конвейера 5. Открытая (клиноременная) передача состоит из двух клиновых шкивов 2.1, 2.2 и клиновых ремней 2.3; закрытая передача (прямозубый цилиндрический редуктор) – из шестерни 3.1 и колеса 3.2; соединительная муфта (здесь зубчатая) – из двух полумуфт. Номером 6 обозначен подшипник качения (ПК), номером 7 – шпоночное соединение.

Формула строения привода:

$$\text{ЭД} @ \text{ОП} @ \text{ЗП} @ \text{СМ} @ \text{ПБ}. \quad (9.1)$$

Привод насчитывает четыре вала: вал двигателя Д, быстроходный вал редуктора Б, тихоходный вал редуктора Т и приводной вал конвейера П. Частота вращения (угловая скорость) $n = \frac{30w}{p}$ ведущего шкива 2.1 ОП равна частоте вала двигателя n_d ; ведомый шкив 2.2 и шестерня 3.1

ЗП 3 вращаются с частотой n_B ; колесо 3.2 вращается с частотой n_T , равной частоте n_{II} . Передаточное число электропривода

$$u = \frac{n_{\dot{A}}}{n_{\dot{I}}} = \frac{n_{\dot{A}}}{n_{\dot{A}}} \cdot \frac{n_{\dot{A}}}{n_{\dot{O}}} \cdot \frac{n_{\dot{O}}}{n_{\dot{I}}},$$

т.е. с учетом равенства $n_T = n_{II}$

$$u = \frac{n_{\dot{A}}}{n_{\dot{A}}} \cdot \frac{n_{\dot{A}}}{n_{\dot{O}}} = u_{II} \cdot u_{OT} \quad (9.2)$$

Передаточное число привода равно произведению передаточных чисел механических передач, входящих в его состав.

9.2 Коэффициент полезного действия [3]

Считая в первом приближении, что привод на рисунке 9.1 состоит из твердых тел и нерастяжимых нитей – ремней, напишем теорему (6.15) об изменении кинетической энергии привода в дифференциальной форме:

$$dT = d'A,$$

или, деля все внешние силы, действующие на звенья привода, на силы движущие, силы вредных и полезных (производственных) сопротивлений:

$$dT = d'A_{\dot{a}} - dA'_{\dot{a},\dot{n}} - dA'_{\dot{i},\dot{n}}, \quad (9.3)$$

где представлены работа движущих сил (ускоряющих привод), работа сил вредных и полезных сопротивлений (тормозящих привод).

После интегрирования равенства (9.3) получим теорему в конечной форме:

$$T - T_o = A_{\dot{a}} - A_{\dot{a},\dot{n}} - A_{\dot{i},\dot{n}}, \quad (9.4)$$

где T_o – начальная кинетическая энергия привода, T – она же в произвольный момент времени, справа – работы за истекшее время.

Рабочее время привода состоит из повторяющихся циклов. Кинетическая энергия в начале любого из циклов равна кинетической энергии в конце предыдущего цикла, т.е. приращение кинетической энергии (9.4) за время одного оборота вала двигателя равно нулю, т.е. работа движущих сил за время одного цикла

$$A_{\dot{a}} = A_{\dot{a},\dot{n}} + A_{\dot{i},\dot{n}}. \quad (9.5)$$

Если пользоваться мощностями сил, средними за время цикла, можно написать вместо равенства (9.5) равенство

$$P_{\dot{a}} = P_{\dot{a},\dot{n}} + P_{\dot{i},\dot{n}}. \quad (9.6)$$

Чем больше в равенстве (9.6) мощность сил производственных сопротивлений, тем совершеннее механические передачи, входящие в привод; мера этого совершенства – коэффициент полезного действия (КПД):

$$h = \frac{P_{\dot{i},\dot{n}}}{P_{\dot{a}}}. \quad (9.7)$$

Пусть привод состоит (рис. 9.2) из трех элементов. Угловая скорость вала, “входящего” в любой из них, равна угловой скорости того же вала, “выходящего” из предыдущего элемента. Силы взаимодействия соседних элементов (см. п. 5.5) равны по величине и противоположны по направлению (третий закон Ньютона); иными словами, мощность (7.16) движущих сил на входе в любой из элементов равна мощности сил полезных сопротивлений на выходе из предыдущего элемента. КПД привода (9.7)

$$h = \frac{P_{i,\tilde{n}}}{D_{\tilde{a}}} = \frac{P_{i,\tilde{n}3}}{D_{\tilde{a}1}} = \frac{P_{i,\tilde{n}3}}{D_{\tilde{a}3}} \cdot \frac{P_{i,\tilde{n}2}}{D_{\tilde{a}2}} \cdot \frac{P_{i,\tilde{n}1}}{D_{\tilde{a}1}},$$

или КПД

$$h = h_3 \cdot h_2 \cdot h_1 \quad (9.8)$$

равен произведению КПД элементов, входящих в состав привода.

9.3 Выбор электродвигателя привода

КПД (9.8) привода, изображенного на рисунке 9.1:

$$h = h_{iI} \cdot h_{qI} \cdot h_{nI} \cdot h_{IE}^3.$$

Требуемая мощность электродвигателя (мощность движущих сил), как следует из определения (9.7),

$$P_{\tilde{a}} = \frac{P_i}{h} \quad (9.9)$$

Здесь мощность $P_{п.с}$ равна мощности на приводном валу $P_{п.}$

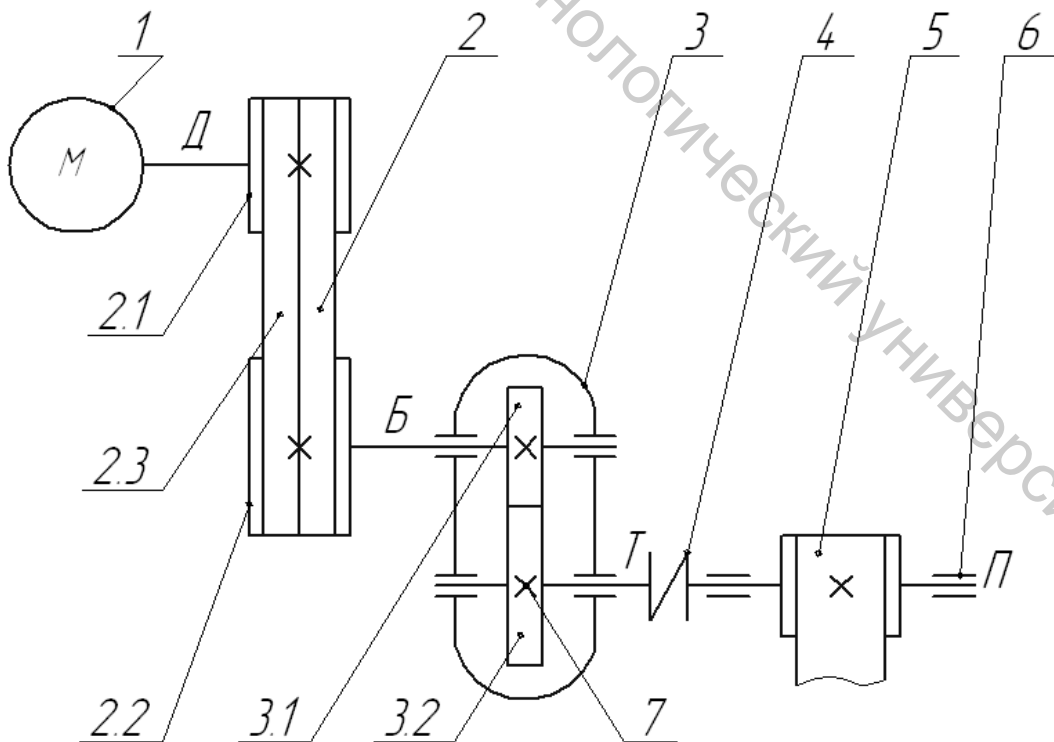


Рисунок 9.1 – Схема электропривода

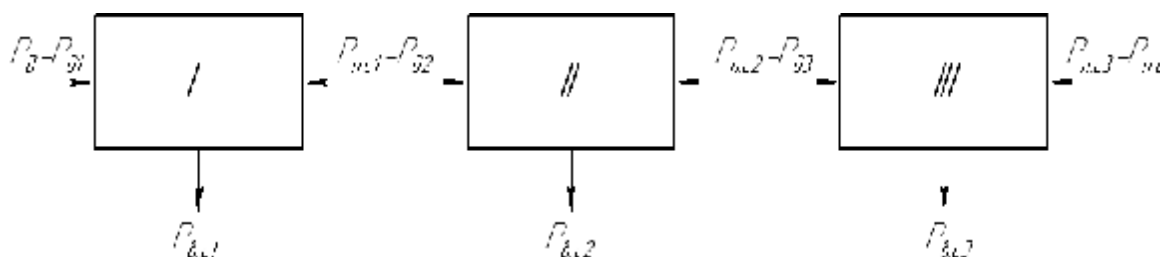


Рисунок 9.2 – Мощности сил взаимодействия элементов привода равны

Требуемая частота вращения вала электродвигателя (см. формулы (9.2)):

$$n_a = n_i \cdot u', \quad (9.10)$$

где передаточное число $u' = u'_{iI} \cdot u'_{qI}$ (штрихом отмечены величины, взятые предварительно).

Мощность (9.9) и частота (9.10) дают возможность выбрать электродвигатель с номинальной мощностью $P_i \geq P_a$ и с частотой вращения вала n_d , близкой к предварительной n'_a .

9.4 Передаточные числа передач привода

Передаточное число привода (9.2)

$$u = u_{iI} \cdot u_{qI}.$$

Приняв передаточное число, например, открытой передачи

$$u_{iI} = u'_{iI},$$

найдем требуемое передаточное число редуктора:

$$u_{qI} = \frac{u}{u_{iI}}.$$

9.5 Мощности на валах привода. Частоты вращения валов. Моменты, вращающие валы

Если известна мощность P (7.16) на валу и частота его вращения n , момент, вращающий вал, и равный ему крутящий момент (закручивающий вал):

$$T = \frac{P(\hat{A}\hat{o})}{w(\tilde{n}^{-1})} = \frac{P(\hat{e}\hat{A}\hat{o}) \cdot 1000}{pn(\hat{i}\hat{a} / \hat{i}\hat{e}\hat{i})},$$

или

$$T(\hat{I} \cdot \hat{i}) = 9550 \cdot \frac{P(\hat{e}\hat{A}\hat{o})}{n(\hat{i}\hat{a} / \hat{i}\hat{e}\hat{i})}.$$

Результаты определения мощностей, частот вращения и моментов представлены в таблице 9.1.

Таблица 9.1 – Мощности, частоты вращения, моменты

Формула (9.1) строения привода (рис. 9.1)			
ЭД→ОП→ЗП→СМ→ПБ			
Валы	Мощности, кВт	Частоты вращения, об/мин	Крутящие моменты, Н·м
Д	P_D	n_D	$T_{\dot{A}} = 9550 \cdot \frac{P_{\dot{A}}}{n_{\dot{A}}}$
Б	$P_B = P_D \cdot \eta_{ОП} \cdot \eta_{ПК}$	$n_{\dot{A}} = \frac{n_{\dot{A}}}{u_{\dot{I} \dot{I}}}$	$T_{\dot{A}} = 9550 \cdot \frac{P_{\dot{A}}}{n_{\dot{A}}}$
Т	$P_T = P_B \cdot \eta_{ЗП} \cdot \eta_{ПК}$	$n_{\dot{O}} = \frac{n_{\dot{A}}}{u_{\dot{C} \dot{I}}}$	$T_{\dot{O}} = 9550 \cdot \frac{P_{\dot{O}}}{n_{\dot{O}}}$
П	$P_{\Pi} = P_T \cdot \eta_{СМ} \cdot \eta_{ПК}$	$n_{\dot{I}} = n_{\dot{O}}$	$T_{\dot{I}} = 9550 \cdot \frac{P_{\dot{I}}}{n_{\dot{I}}}$

Лекция 10. Эвольвентное зацепление

10.1 Эвольвента круга и ее свойства

Если туго натянутую нить сматывать с цилиндрической катушки или наматывать на нее, всякая точка прямолинейного куска нити опишет эвольвенту. Иначе, если провести касательную (рис. 10.1) к окружности (основной окружности) и перекачивать ее по окружности без скольжения, всякая точка касательной опишет эвольвенту этой окружности.

Покажем касательную, например, в двух ее положениях. Если касательная – нить, длина смотанного отрезка нити $A_1A'_1$ равна длине дуги $\overset{\smile}{A\dot{A}}_1$, на которой располагался этот отрезок; то же относится к длинам отрезка $A_2A'_2$ и дуги $\overset{\smile}{A\dot{A}}_2$:

$$\begin{aligned} A_1A'_1 &= \overset{\smile}{A\dot{A}}_1, \\ A_2A'_2 &= \overset{\smile}{A\dot{A}}_2. \end{aligned} \quad (10.1)$$

Если описать окружность радиусом $A_1A'_1$, ее бесконечно малая дуга совпадет с бесконечно малой дугой эвольвенты, т.е. отрезок $A_1A'_1$ – ее радиус кривизны в точке A'_1 , точка A_1 – центр кривизны, а прямая $A_1A'_1$ перпендикулярна к касательной $t-t$, проведенной к эвольвенте в ее

точке A'_1 : чтобы провести нормаль к эвольвенте, например, в ее точке A'_2 , нужно провести из этой точки касательную $A_2A'_2$ к основной окружности.

10.2 Передаточное число

Проведем через точку P на линии центров зубчатых колес O_1O_2 прямую, перпендикулярную к линии центров, а после под углом зацепления α (стандартный угол $\alpha = 20^\circ$) прямую NN . Опустив из центров O_1, O_2 перпендикуляры на прямую NN , проведем две окружности. Прямая NN – общая касательная к ним. Примем эти окружности за основные. Перекатывая прямую NN по ним, построим две соприкасающиеся (зацепляющиеся) эвольвенты, описанные точкой P .

По мере вращения зубчатых колес эвольвентные профили \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 их зубьев перемещаются, скользя друг по другу. Пусть точка K – точка контакта зубьев в некотором их положении. Коль они соприкасаются, можно провести общую касательную к ним, и, следовательно, общую нормаль к эвольвентам \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 . Но нормали к эвольвентам (рис. 10.1) получаются как касательные, проведенные к основным окружностям OO_1 и OO_2 из точки K .

Общая нормаль к эвольвентам получается как общая касательная к этим окружностям – прямая NN . Следовательно, точка K принадлежит прямой NN . По мере вращения зацепляющихся колес точка контакта их зубьев перемещается вдоль прямой NN (прямой зацепления), проходя теоретическую длину зацепления AB .

Покажем вращательные скорости

$$\begin{aligned} V_1 &= w_1 O_1 K, \\ V_2 &= w_2 O_2 K \end{aligned} \quad (10.2)$$

точек зацепляющихся колес, совпадающих в точке контакта K (ω_1 и ω_2 – угловые скорости колес). Проекция этих скоростей на общую нормаль к их эвольвентным профилям – прямую зацепления NN – равны. В противном случае зубья будут удаляться друг от друга или врезаться друг в друга, что невозможно в зацеплении. Заштрихованные треугольники на рисунке 10.2 подобны

$$\frac{V_1}{O_1 K} = \frac{K \ddot{r}}{O_1 \dot{A}},$$

откуда проекция скорости \ddot{V}_1 на прямую NN (см. формулы 10.2):

$$K \ddot{r} = \frac{V_1}{O_1 K} \cdot O_1 \dot{A} = w_1 \cdot O_1 \dot{A} \quad (10.3)$$

Аналогично этому:

$$K \ddot{r} = w_2 \cdot O_2 B. \quad (10.4)$$

Правые части равенств (10.3, 10.4):

$$w_1 \cdot O_1 A = w_2 \cdot O_2 B,$$

откуда передаточное число

$$u = \frac{w_1}{w_2} = \frac{O_2 B}{O_1 A},$$

(в силу подобия треугольников O_1AP и O_2BP)

$$u = \frac{w_1}{w_2} = \frac{O_2 P}{O_1 P}. \quad (10.5)$$

Как видим, передаточное число (10.5) в эвольвентном зацеплении есть величина постоянная, поскольку по построению точка P неподвижна на линии центров O_1O_2 . Попутно получается равенство:

$$w_1 O_1 P = w_2 O_2 P,$$

или равенство вращательных скоростей точек начальных окружностей колес, соприкасающихся в точке зацепления P : начальные окружности колес перекатываются друг по другу без скольжения; полюс зацепления P делит линию зацепления O_1O_2 на части, обратно пропорциональные угловым скоростям.

10.3 Основные размеры эвольвентного колеса

На рисунке 10.3 показаны основная окружность, окружность вершин зубьев и окружность впадин между зубьями: их диаметры d_b , d_a и d_f . Показан шаг зацепления на основной окружности P_b . Длина основной окружности колеса с z зубьями

$$p d_a = P_a z,$$

ее диаметр

$$d_a = \frac{P_a}{p} z = m_a z$$

($m_a = P_a / p$ – модуль зацепления на основной окружности).

Окружность, на которой модуль стандартный, называется делительной; ее диаметр

$$d = m z, \quad (10.6)$$

шаг зацепления на этой окружности (рис. 10.3)

$$P = p m.$$

Если зубчатое колесо нарезается инструментом без его смещения относительно заготовки, оно называется нулевым. Начальные окружности в зацеплении нулевых колес совпадают с делительными, передаточное число (10.5) (см. определение (10.6)):

$$u = \frac{d_2 / 2}{d_1 / 2} = \frac{m z_2 / 2}{m z_1 / 2} = \frac{z_2}{z_1}, \quad (10.7)$$

т.е. равно отношению чисел зубьев. Впрочем, формула (10.7) верна и в общем случае зацепления.

Диаметры окружностей вершин и впадин нулевого колеса

Рисунок 10.2 – Эвольвентное зацепление: OO_1 и OO_2 – основные окружности, HO_1 и HO_2 – начальные окружности, P – полюс зацепления

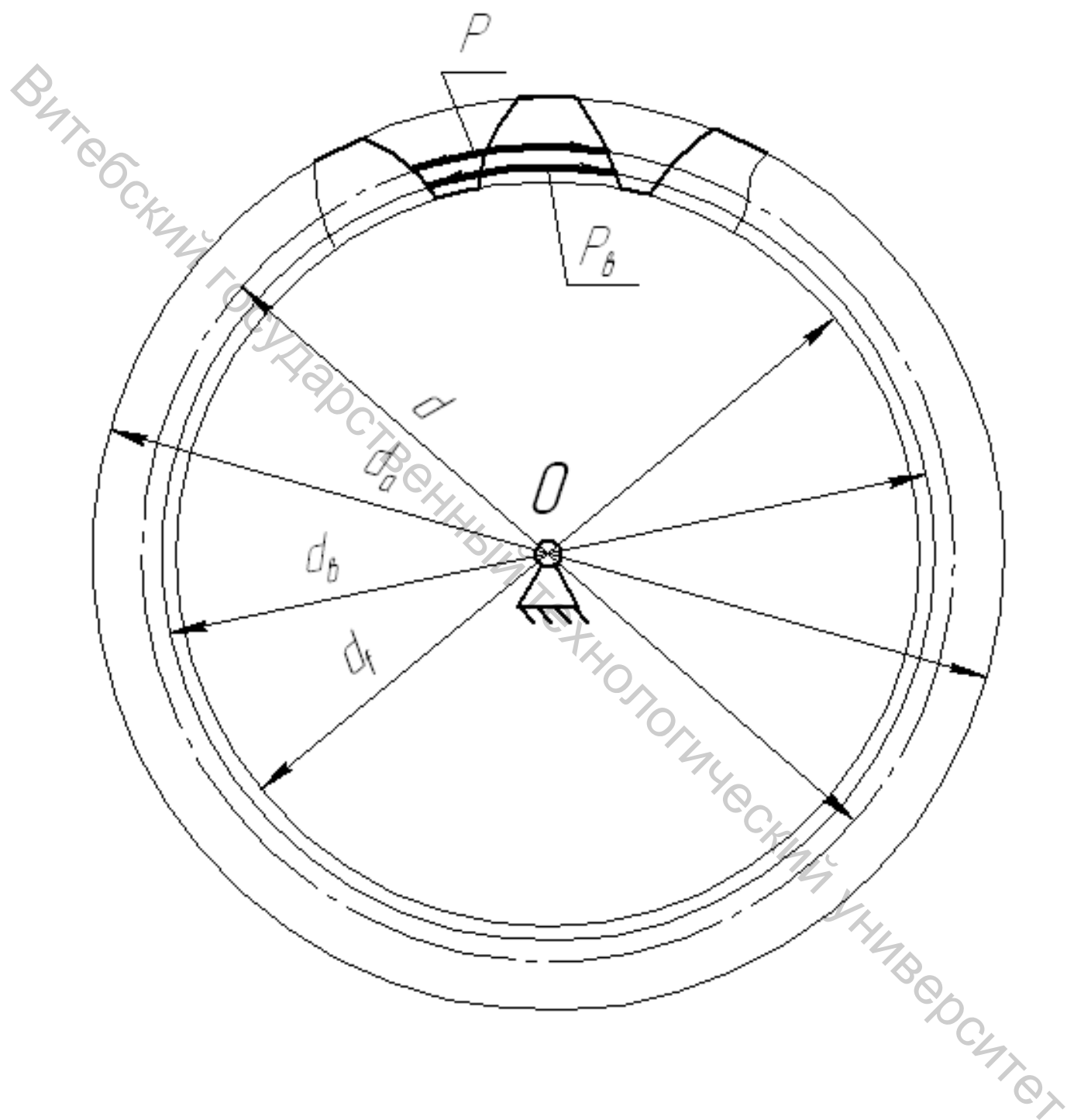


Рисунок 10.3 – Эвольвентное колесо

10.4 Коэффициент перекрытия

Проводя на рисунке 10.4 окружности вершин диаметров (10.8), “вырежем” из теоретической длины зацепления длину $g_a = ab$ – действительную длину зацепления. В точке a оно начинается, в точке b – заканчивается. В силу свойства (10.1) длины отрезков Aa и Ab равны длинам дуг Aa_1 и Ab_1 , т.е. дуга

$$\overset{\smile}{a_1b_1} = ab = g_a,$$

пока точка контакта зубьев пробегает длину отрезка ab (g_a), зуб шестерни (колеса 1) перемещается по дуге основной окружности $\overset{\smile}{a_1b_1}$. Зуб колеса 2 перемещается в то же время по дуге $\overset{\smile}{a_2b_2}$. Имеем равенство:

$$\overset{\smile}{a_1b_1} = g_a = \overset{\smile}{a_2b_2}. \quad (10.9)$$

Зацепление будет непрерывным, если шаг зацепления на основных окружностях зацепляющихся колес будет меньше дуг (10.9) – тем самым будет обеспечено зацепление с перекрытием: зацепляться будет не одна пара зубьев, будут моменты двупарного зацепления.

Коэффициент перекрытия

$$e_a = \frac{g_a}{P_b} > 1. \quad (10.10)$$

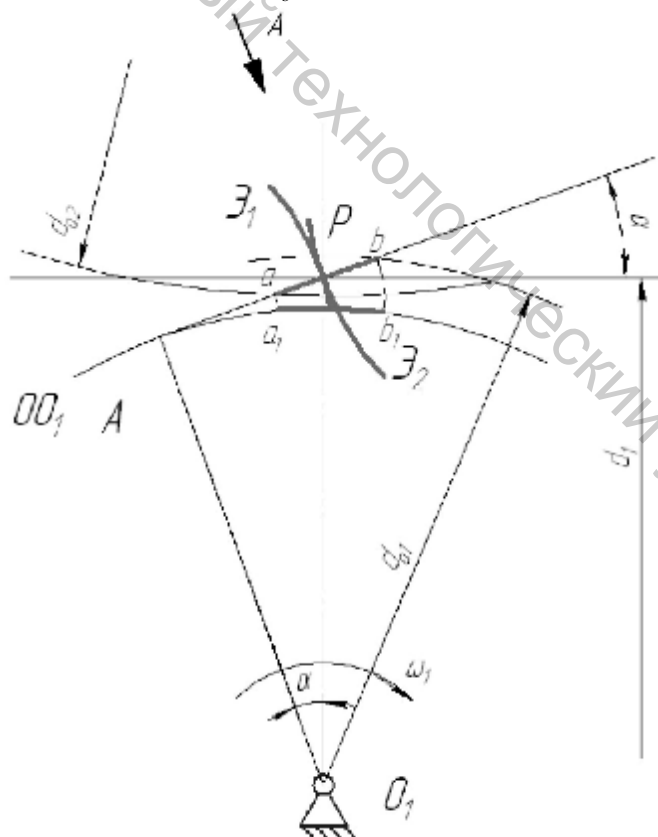


Рисунок 10.4 – Длина зацепления ab равна дуге зацепления $\overset{\smile}{a_1b_1}$ на основной окружности OO_1

Лекция 11. Контактные напряжения в прямозубой передаче

11.1 Поле зацепления

Если смотреть (рис. 10.4) в направлении стрелки А, увидим поле зацепления шириной, равной ширине зацепляющихся колес b (рис. 11.1). Сплошные линии – контактные линии зацепляющихся зубьев в момент, когда зуб 1-1 шестерни вошел в поле зацепления, зуб 2-2 находится в этом поле; зуб 0-0 – за пределами поля. В момент выхода зуба 2-2 из поля зацепления (штриховая линия $2' - 2'$) зуб 1-1 находится в положении $1' - 1'$, зуб 0-0 – в положении $0' - 0'$ (по прежнему за пределами поля).

Находясь в заштрихованной зоне поля зацепления, только зуб 1-1 находится в контакте с зубом колеса – заштрихованная зона – зона однопарного зацепления. Когда зуб 1-1 окажется в зоне $2'2'2'$, зуб 0-0 окажется в зоне $1'1'1'$ – не заштрихованные зоны поля зацепления составят зону двупарного зацепления.

В зоне $1'2'2'1'$ силы взаимодействия зубьев зацепляющихся колес приходятся на одну пару зубьев, в зоне двупарного зацепления – на две.

В косозубом зацеплении на рисунке 11.1 (β – угол наклона зубьев) зацепление всегда двупарное: убыль $3'3''$ контактной линии 33 компенсируется прибылью $1'1''$. Этим объясняется сравнительно большая нагрузочная способность косозубой передачи.

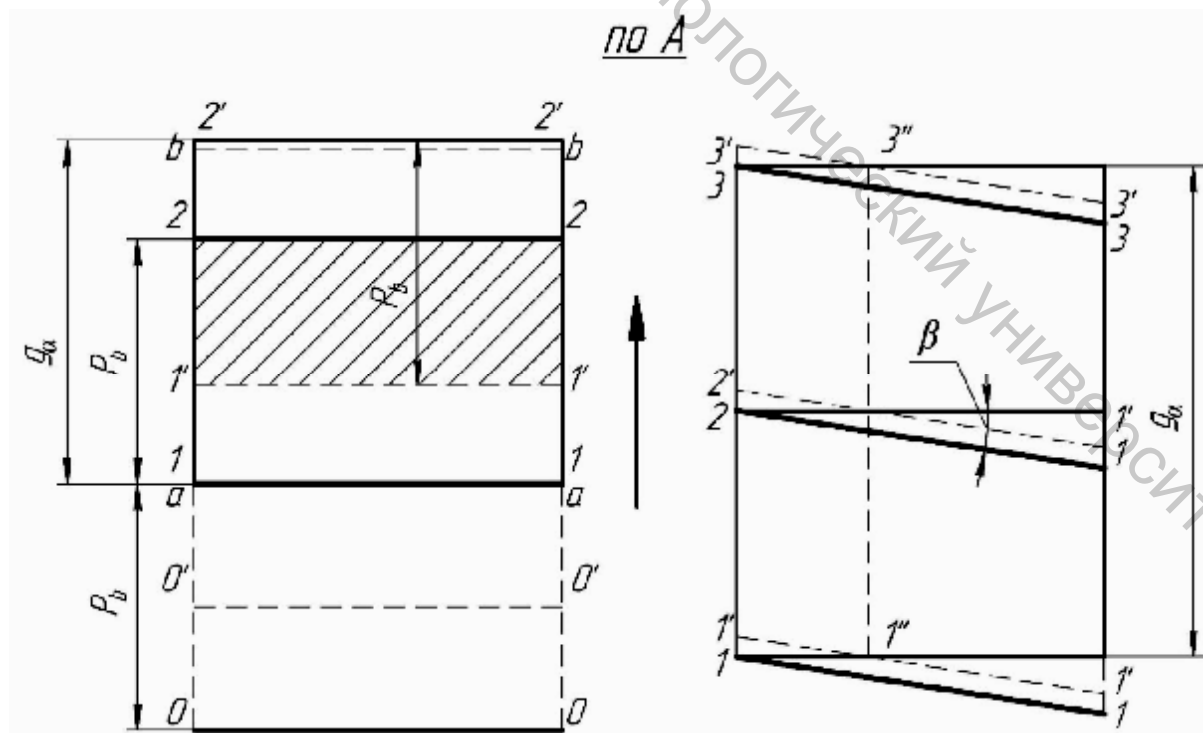


Рисунок 11.1 – Поля зацепления прямозубой и косозубой передач

11.2 Силы в прямозубом зацеплении

На рисунке 11.2 показана нормальная сила давления F_{n1} (в однопарном зацеплении) зуба колеса на зуб шестерни. Ее разлагают на составляющие: радиальную силу F_{r1} и окружную силу F_{t1} . На зуб колеса действуют противоположные силы F_{t2}, F_{r2}, F_{n2} .

Момент окружной силы F_{t1} уравнивает вращающий момент, равный крутящему моменту (табл. 9.1) T_B : величины окружных сил взаимодействия зубьев

$$F_{t1} = F_{t2} = F_t = \frac{2T_B}{d_1}, \quad (11.1)$$

радиальные силы

$$F_{r1} = F_{r2} = F_r = F_t \operatorname{tg} \alpha, \quad (11.2)$$

нормальные силы

$$F_{n1} = F_{n2} = F_n = \frac{F_t}{\cos \alpha}. \quad (11.3)$$

Если направления вращения колес изменяются, направления окружных сил (11.1) изменяются; направления радиальных сил (11.2) не изменяются, они всегда расталкивают зацепляющиеся колеса.

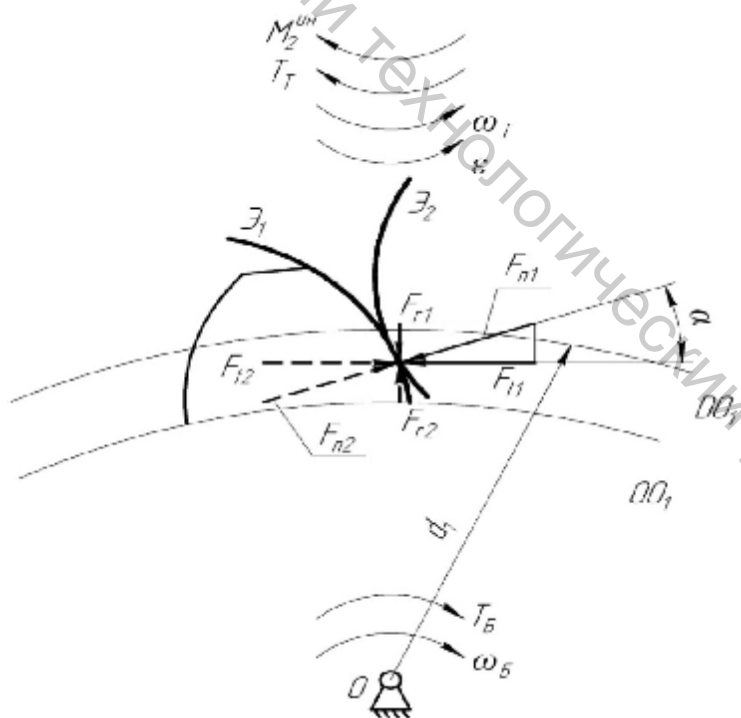


Рисунок 11.2 – Силы в прямозубом зацеплении: сила F_{t1} – сила сопротивления вращению шестерни, сила F_{t2} – сила, вращающая колесо, силы F_{r1}, F_{r2} расталкивают колеса

11.3 Удельная расчетная окружная сила

Нормальная сила (11.3) распределяется вдоль контактной линии – по ширине зуба (рис. 11.3), в идеале, равномерно. Однако валы передачи, несущие на себе шестерню и колесо, изготовлены из реальных материалов, деформирующихся под нагрузкой: валы изгибаются, их оси искривляются, зацепляющиеся колеса поворачиваются, их зубья перекашиваются, давления на зубья оказываются распределенными неравномерно (рис. 11.4).

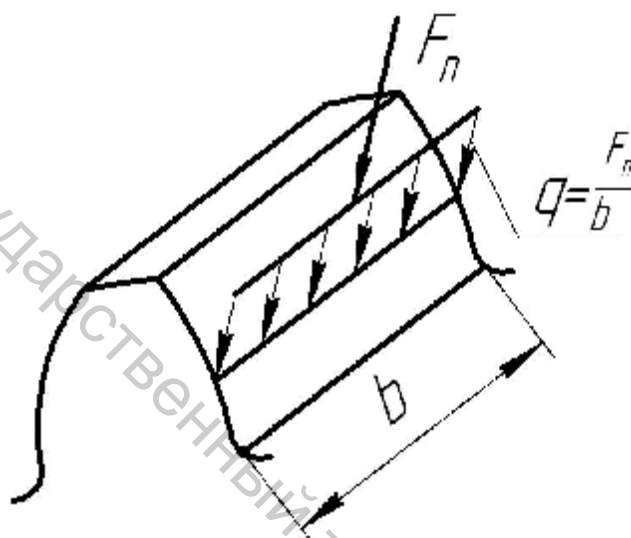


Рисунок 11.3 – Нормальная сила распределена по ширине зуба

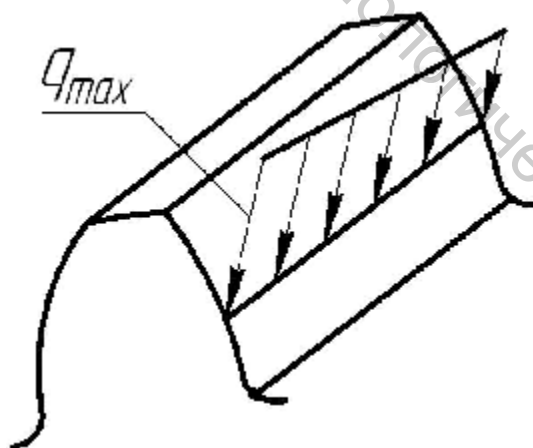


Рисунок 11.4 – Неравномерно распределенная нагрузка на зуб

Есть и другая причина отклонения интенсивности распределенной нагрузки от интенсивности на рисунке 11.3. Эта причина – неточности в изготовлении колес, из-за них передаточное отношение w_1/w_2 изменяется со временем, появляется (при $w_1 = const$) угловое ускорение (рис. 11.2) колеса и, следовательно, инерционный момент (8.8):

$$M_2^{ин} = -I_{o_2} e$$

(считаем, что центр масс колеса находится на оси вращения O_2), приводящий к дополнительной нагрузке на зацепляющиеся зубья.

Обе причины учитываются коэффициентом неравномерности распределения нагрузки K_b и динамическим коэффициентом K_v : наибольшая интенсивность нормальной нагрузки на зацепляющиеся зубья

$$q_{max} = \frac{F_n}{e} K_b K_v. \quad (11.4)$$

Коэффициент K_b тем больше, чем шире зацепляющиеся колеса; коэффициент K_v тем больше, чем ниже точность их изготовления и чем они массивнее (чем больше модуль m).

Используя в формуле (11.4) выражение (11.3), получим:

$$q_{max} = \left(\frac{F_t}{e} K_b K_v \right) \frac{1}{\cos a},$$

где выражение в скобках дает удельную расчетную окружную силу:

$$W_t = \frac{F_t}{e} K_b K_v. \quad (11.5)$$

Интенсивность (11.4) принимает, при учете формулы (11.5), вид:

$$q_{max} = \frac{W_t}{\cos a}. \quad (11.6)$$

11.4 Формула Герца

Зубья, давящие друг на друга, деформируют друг друга – линия контакта на рисунках 11.3 и 11.4 является в действительности узкой площадкой контакта.

Пусть на малую площадку DA (фрагмент площадки контакта) действует нормальная сила DF_n (рис. 11.5). Отношение

$$s_{нсп} = \frac{DF_n}{DA}$$

называется средним контактным напряжением на площадке DA . Если ее контур стягивать к точке, получим в пределе контактное напряжение в этой точке:

$$s_n = \lim_{DA \rightarrow 0} \frac{DF_n}{DA}. \quad (11.7)$$

Наибольшее напряжение (11.7) действует на оси площадки контакта и определяется по формуле Герца:

$$s_n = \sqrt{\frac{q_{max}}{r_{np}} \cdot \frac{E}{2p(1-m^2)}}, \quad (11.8)$$

где наибольшая интенсивность распределенной вдоль контактной линии нагрузки дается формулой (11.6)

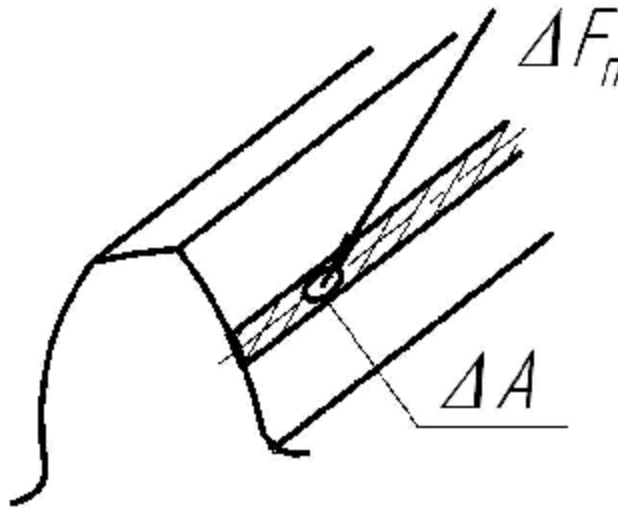


Рисунок 11.5 – К определению контактного напряжения

$$q_{max} = \frac{W_{nt}}{\cos a}, \quad a = 20^\circ. \quad (11.9)$$

С добавлением индекса n , соответственно, коэффициенты в формуле (11.4) получают обозначения K_{nb} , K_{nv} . Приведенная кривизна соприкасающихся профилей зубьев

$$\frac{1}{r_{np}} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}, \quad (11.10)$$

где r_1 и r_2 – радиусы кривизны эвольвент \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 (рис. 10.2) в точке контакта, E и m – упругие константы материала колес (для стальных колес модуль Юнга и коэффициент Пуассона:

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad m = 0,25). \quad (11.11)$$

Предполагая, что зубья колес соприкасаются в полюсе P (рис. 10.2), найдем (см. п. 10.1 и рис. 10.2) радиусы кривизны их профилей в формуле (11.10):

$$r_1 = AP = O_1 P \sin a, \quad r_2 = BP = O_2 P \sin a,$$

или, если учесть, что диаметры начальных окружностей HO_1 и HO_2 в зацеплении нулевых колес равны (см. п. 10.3) их делительным диаметрам d_1 и d_2 ,

$$r_1 = \frac{d_1}{2} \sin a, \quad r_2 = \frac{d_2}{2} \sin a;$$

приведенная кривизна (11.10) (см. передаточное число (10.7)):

$$\frac{1}{r_{np}} = \frac{2}{d_1 \sin a} + \frac{2}{d_2 \sin a} = \frac{2}{d_1 \sin a} \left(1 + \frac{d_1}{d_2} \right) = \frac{2}{d_1 \sin a} \cdot \frac{1+u}{u}. \quad (11.12)$$

Подставим величины (11.9, 11.11, 11.12) в формулу Герца (11.8).
Контактное напряжение

$$s_n \frac{H}{\text{мм}^2} = Z_n \cdot Z_m \cdot \sqrt{\frac{W_{nt} \frac{H}{\text{мм}}}{d_{l\text{мм}}} \cdot \frac{1+u}{u}}, \quad (11.13)$$

численные коэффициенты $Z_n = 1,77$, $Z_m = 275 \text{ МПа}^{1/2}$.

Лекция 12. Нормальные и касательные напряжения в стержне

12.1 Понятие о стержне-брусе

Стержень-брус – протяженное тело, поперечные размеры которого много меньше его длины.

Пусть дана прямая (или кривая), называемая продольной осью бруса, и плоская фигура, называемая его поперечным сечением. "Проколем" поперечное сечение в его центре тяжести продольной осью (центр тяжести сечения совпадает с центром масс тонкого диска, совпадающего с сечением при их наложении) и переместим (рис. 12.1) сечение вдоль продольной оси, "поставив" ее нормально к плоскости сечения. Сечение опишет объем стержня-бруса.

Размеры сечения могут изменяться по мере продвижения вдоль оси (на рис. 12.2 изображен пример такого стержня – ступенчатый вал редуктора). Вторым примером может служить зуб зубчатого колеса (рис. 11.3 – 11.5).

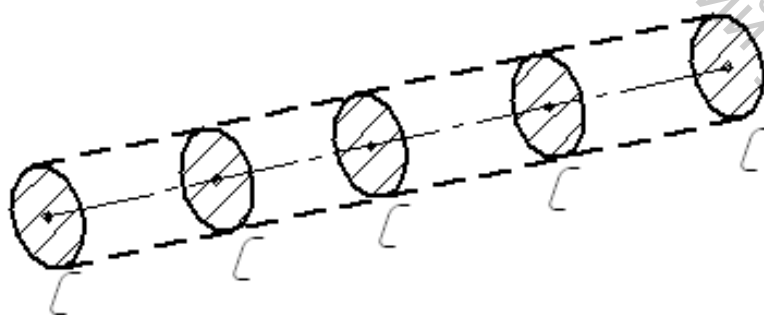


Рисунок 12.1 – Брус-стержень

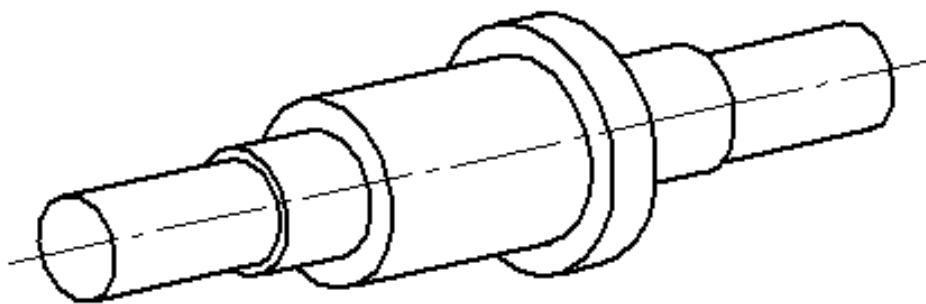


Рисунок 12.2 – Ступенчатый вал редуктора

12.2 Геометрические характеристики поперечного сечения стержня

К геометрическим характеристикам сечения относятся (рис. 12.3):

– его площадь:

$$A = \int_A dA \quad (12.1)$$

– статические моменты площади (12.1):

$$S_x = \int_A y dA, \quad S_y = \int_A x dA \quad (12.2)$$

(моменты (12.2) равны нулю, если оси x и y – центральные, т.е. проведены в сечении через его центр тяжести C);

– осевые моменты инерции площади (12.1):

$$I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA \quad (12.3)$$

– центробежный момент инерции площади (12.1)

$$I_{xy} = \int_A xy dA \quad (12.4)$$

Если момент (12.4) равен нулю, оси x и y называются главными.

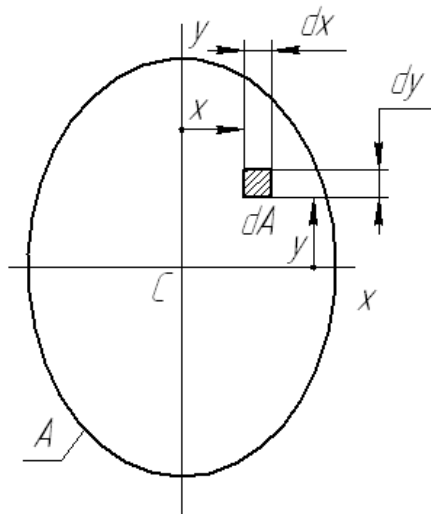


Рисунок 12.3 – К определениям геометрических характеристик поперечного сечения

В случае симметричного сечения (рис. 12.4) его центр тяжести принадлежит оси симметрии. Действительно, статический момент (12.2) тонкой полоски площадью dA относительно оси симметрии y равен:

$$dS_o = \int_{-a}^{+a} x dx d\phi = (d\phi) \frac{x^2}{2} \Big|_{-a}^{+a} = 0.$$

Следовательно, статический момент S_y всей площади (сумма моментов dS_y) равен нулю. В то же время ось симметрии y – главная ось:

$$dI_{xy} = \int_{-a}^{+a} xy dx dy = (y dy) \int_{-a}^{+a} x dx = 0,$$

$$I_{xy} = \int_A dI_{xy} = 0.$$

Другая главная ось перпендикулярна первой. Центральная ось x – тоже главная ось.

Главные центральные оси x и y вкупе с продольной осью z называются естественными осями координат бруса (стержня). Не трудно найти, например, главный центральный осевой момент инерции (12.3) прямоугольника (рис. 12.5):

$$dI_x = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} y^2 dx dy = (y^2 dy) \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dx = b(y^2 dy),$$

$$I_x = \int_A dI_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} b y^2 dy = b \frac{y^3}{3} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{12}. \quad (12.5)$$

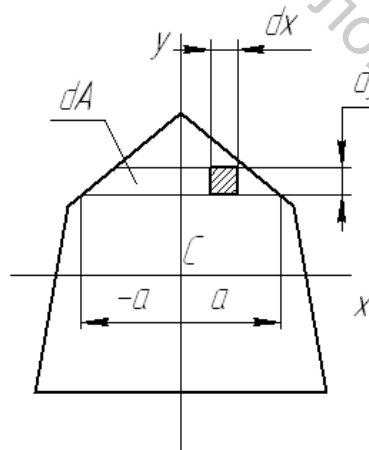


Рисунок 12.4 – Главные центральные оси симметричного сечения

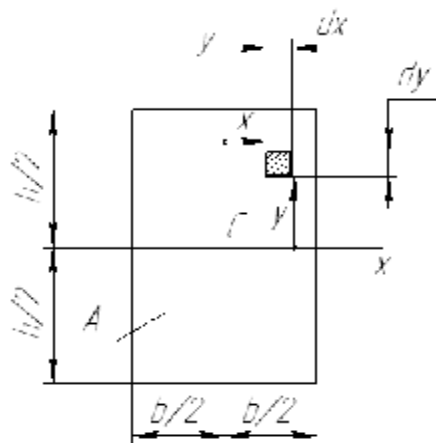


Рисунок 12.5 – Прямоугольное поперечное сечение

Второй главный центральный момент инерции

$$I_y = \frac{bh^3}{12}.$$

Формулу (12.5) можно написать иначе:

$$I_x = (bh) \frac{h^2}{12} = \frac{Ah^2}{12}.$$

Рассматривая наряду с прямоугольником твердый стержень массой M и длиной l (с равномерным распределением массы по длине, подобным равномерному распределению площади по высоте прямоугольника), найдем по аналогии его момент инерции (6.20) во вращении стержня вокруг центральной оси:

$$I_c = \frac{Ml^2}{12}.$$

12.3 Напряженное состояние в точке

Пусть стержень (рис. 12.6) находится в равновесии. Мысленно рассечем стержень плоскостью, проходящей через точку A . На бесконечно малую площадку dA ($DA \rightarrow 0$), взятую в этой плоскости, включающую в себя точку A , действует, например, со стороны левой части бесконечно малая внутренняя сила dF ($DF \rightarrow 0$).

Напряжением в точке A называется предел, аналогичный пределу (11.7):

$$P_A = \lim_{DA \rightarrow 0} \frac{DF}{DA} = \frac{dF}{dA}. \quad (12.6)$$

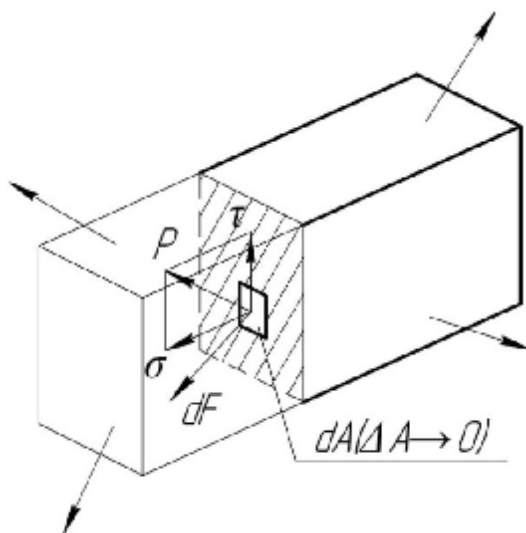


Рисунок 12.6 – Внутренние силы, действующие на площадку ΔA , и напряжения на ней

Разложим (рис. 12.6) напряжение (12.6) на составляющие – нормальное напряжение σ , перпендикулярное к площадке $dA (DA \rightarrow 0)$ и касательное τ , принадлежащее площадке. Первое (положительное) появляется, если левая часть стержня "пытается" оторваться от правой части, и отрицательное – если "пытается" нажать на правую часть, второе появляется при сдвиге левой части вдоль плоскости, разделяющей левую и правую части стержня.

Если провести через точку A другую плоскость, напряжение (12.6) и его составляющие σ и τ станут другими. Совокупность всех напряжений на всех площадках, проходящих через точку A , называется напряженным состоянием в точке.

Разумеется, внутренние силы в стержне – силы взаимодействия, равные по величине и противоположные по направлению (см. п.5.5). В точке A левой части действуют такие же напряжения σ и τ , но противоположные по направлению.

12.4 Деформации и напряжения при растяжении (сжатии)

На рисунке 12.7 изображен стержень с продольными и поперечными линиями на его поверхности. Внутри стержня выделен бесконечно малый "кирпичик" – элемент.

Рассмотрим деформацию стержня, при которой его продольная ось, оставаясь прямолинейной, удлиняется (или укорачивается), а его поперечные сечения, оставаясь плоскими и перпендикулярными к оси, удаляются друг от друга (или приближаются друг к другу). На рисунке 12.7 показан деформированный стержень и новые размеры его элемента. Относительные удлинение и сужение размеров элемента

$$e = \frac{D(dz)}{dz} > 0, \quad e' = \frac{\Delta(d\phi)}{d\phi} < 0. \quad (12.7)$$

Коэффициент Пуассона материала стержня (11.11)

$$m = \frac{e'}{e}.$$

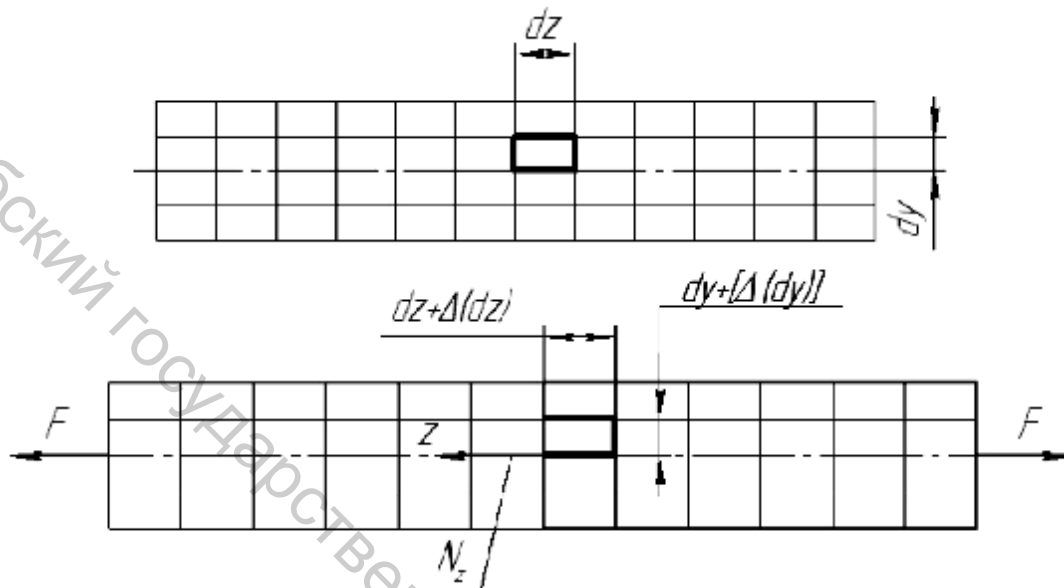


Рисунок 12.7 – Растяжение стержня

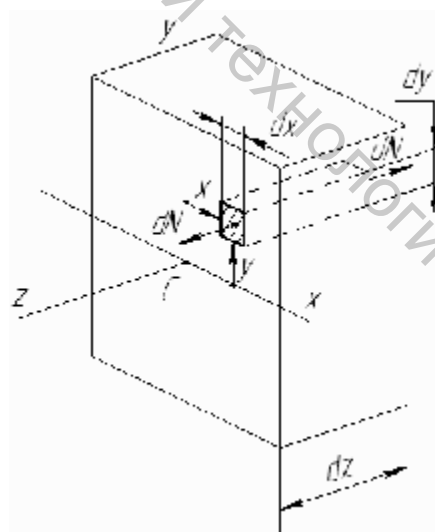


Рисунок 12.8 – Внутренняя сила на торце элемента стержня

На рисунке 12.8 показан деформированный фрагмент стержня длиной dz . Все элементы, заключенные между его торцами, удлиняются (укорачиваются) одинаково, т.е. относительное удлинение (12.7) $e = const$. Удлинению фрагмента (удалению его торцов друг от друга) отвечают нормальные напряжения s на торцах любого из его элементов. По закону Гука

$$s = Ee, \quad (12.8)$$

E – модуль Юнга (11.11), $s = const$.

Внутренние силы, действующие со сторон левой и правой частей стержня, из которого "вынут" фрагмент (рисунок 12.8):

$$dN = s dA \quad (12.9)$$

См. определение (12.6).

Приведем все внутренние силы (12.9) к центру тяжести поперечного сечения C : сила в центре тяжести равна главному вектору (рис. 8.3), т.е. сумме всех внутренних сил:

$$N = \int_A dN = s \int_A dA = sA \quad (12.10)$$

См. определение (12.1). Момент пары сил в главной плоскости инерции yz (или изгибающий момент, положительный, если первая координатная четверть сечения сжимается) равен главному моменту – сумме моментов всех внутренних сил:

$$M_x = - \int_A (dN)y = -s \int_A y dA = 0. \quad (12.11)$$

См. определение (12.2). Второй изгибающий момент

$$M_y = - \int_A (dN)x = -s \int_A x dA = 0. \quad (12.12)$$

Итак, внутренние силы (12.9) на рисунке 12.8 приводятся к одной силе – равнодействующей (12.10), показанной на рисунке 12.7. Разумеется, к этой же силе приводятся внешние силы, действующие на левую часть стержня.

Случается это тогда, когда они могут быть заменены одной силой F , действующей на левый торец стержня. Такая же сила, только противоположная по направлению, действует на правый торец. Напряжения при растяжении (сжатии), см. формулу (12.10):

$$s = \frac{N_z}{A} = \frac{F}{A}. \quad (12.13)$$

12.5 Деформации и напряжения при прямом чистом изгибе

На рисунке 12.9 показана деформация стержня, при которой его продольная ось не удлиняется и не укорачивается, но искривляется в одной из главных плоскостей инерции – на рисунке в плоскости yz . Поперечные сечения стержня, оставаясь перпендикулярными к искривленной оси, сверху сближаются друг с другом, внизу удаляются друг от друга. Соответственно, верхние элементы фрагмента на рисунке 12.10 сжимаются, нижние растягиваются. Слой, включающий в себя продольную ось, не удлиняется и не укорачивается – он называется нейтральным.

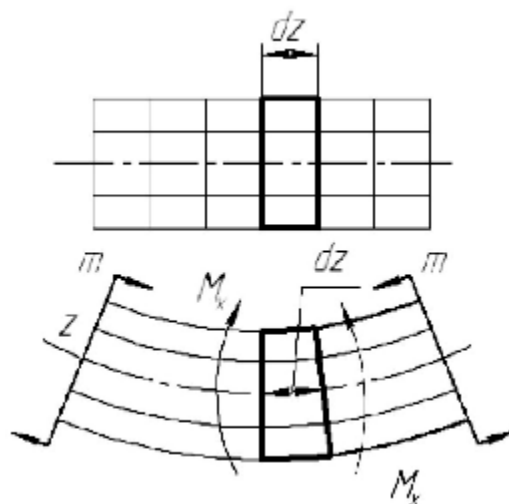


Рисунок 12.9 – Прямой чистый изгиб

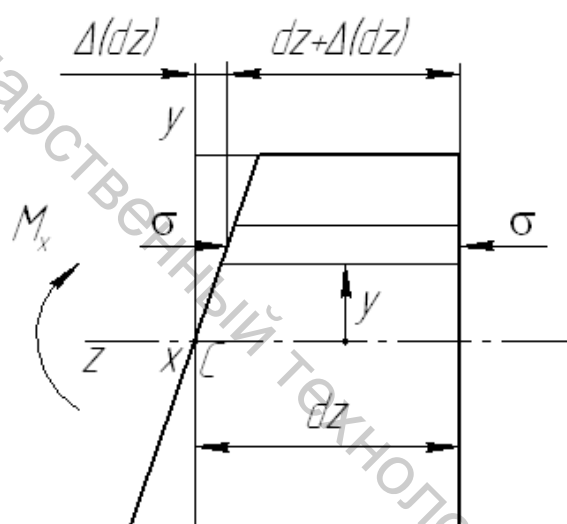


Рисунок 12.10 – Левый торец фрагмента

Левый торец фрагмента поворачивается относительно правого (рис. 12.10).

На рисунке 12.10 видно, что элемент, взятый над нейтральным слоем, укорачивается на $D(dz)$, укорочение это прямо пропорционально ординате элемента y ; следовательно, относительное укорочение элемента (12.7):

$$e = -Ky, \quad (12.14)$$

где K – неизвестный пока коэффициент пропорциональности. Используя деформацию (12.14) в законе Гука (12.8), получим нормальное напряжение:

$$s = -EKy. \quad (12.15)$$

Приведем внутренние силы (12.9) к центру тяжести сечения C . Сила в центре тяжести (12.10)

$$N = \int_A s dA = -EK \int_A y dA = 0$$

См. определение (12.2). Изгибающий момент в плоскости изгиба yz (12.11)

$$M_x = -\int_A (dN)y = +EK \int_A y^2 dA = EKI_x \quad (12.16)$$

См. определение (12.3). Второй изгибающий момент (12.12)

$$M_y = -\int_A (dN)x = EK \int_A xy dA = EKI_{xy} = 0$$

См. определение (12.4).

Итак, внутренние силы на рисунке 12.10 приводятся к паре с моментом, равным изгибающему моменту (12.16). К этому же моменту приводятся и внешние силы, действующие на левую часть. Случается это тогда, когда левые внешние силы приводятся к паре с моментом m . Такой же момент, но противоположного направления, действует на правую часть (рис. 12.9).

Неизвестный коэффициент в формуле (12.15) находится из формулы (12.16):

$$K = \frac{M_x}{EI_x},$$

нормальные напряжения (12.15)

$$s = -\frac{M_x}{I_x} y = -\frac{m}{I_x} y. \quad (12.17)$$

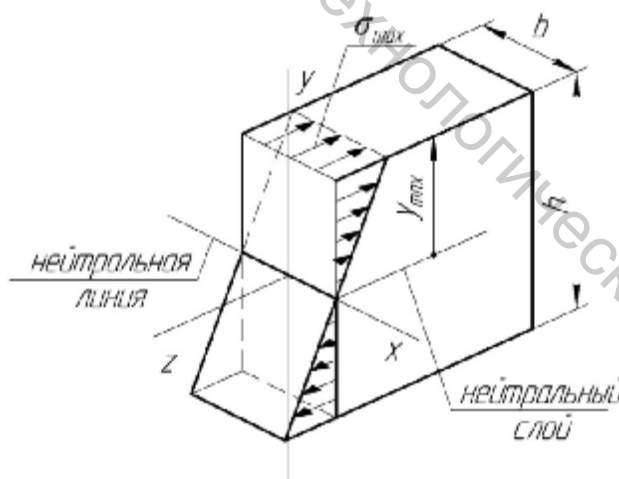


Рисунок 12.11 – Пространственная эпюра нормальных напряжений при прямом изгибе

На рисунке 12.11 построена пространственная эпюра нормальных напряжений (12.17), изменяющихся только по высоте прямоугольного сечения (рис. 12.5). Наибольшие по модулю напряжения, действующие в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии x :

$$s_{max} = \frac{M_x}{I_x} y_{max} = \frac{M_x}{W_x}, \quad (12.18)$$

где введен момент сопротивления поперечного сечения стержня

$$W_x = \frac{I_x}{y_{max}} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6} \quad (12.19)$$

См. формулу (12.5).

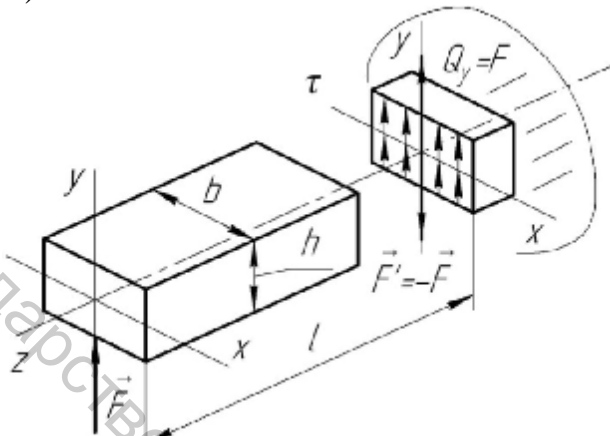


Рисунок 12.12 – Прямой поперечный изгиб стержня

На рис. 12.12 показан прямой поперечный изгиб стержня. Если единственную внешнюю силу F , действующую на левую часть стержня, привести к центру тяжести сечения C в заделке стержня – перенести ее в точку C (добавив противоположную силу $\vec{F}' = -\vec{F}$), получим в заделке поперечную силу $Q_y = F$ и изгибающий момент (момент пары \vec{F}, \vec{F}') Fl . Поперечная сила Q_y есть результат приведения к точке C внутренних касательных сил, их среднее (касательное) напряжение

$$t = Q_y / A = F / (bh).$$

Наибольшие нормальные напряжения (12.18) в заделке – см. формулу (12.19):

$$s_{max} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{Fl}{bh^2/6} = \frac{6Fl}{bh^2}.$$

Отношение $s_{max}/t = 6l/h \gg 1$ – в силу определения стержня в п. 12.1 отношение его длины к поперечному размеру $l/h \gg 1$. Касательными напряжениями при поперечном изгибе пренебрегают.

Лекция 13. Проектный и проверочный расчет прямозубой передачи

13.1 Проектный расчет на контактную прочность

Удельную расчетную окружную силу (11.5) в формуле для контактных напряжений s_n (11.13) можно выразить (см. формулу (11.1)) через вращающий момент T_B "на шестерне":

$$W_{it} = \frac{F_t}{a} K_{ib} K_{iv} = \frac{2\dot{O}_A}{d_1 \Psi d_1} K_{ib} K_{iv}. \quad (13.1)$$

Здесь ширина колес $b = Y_{ed} d_1$, Y_{ed} – коэффициент ширины колес относительно диаметра шестерни d_1 .

Подстановка силы (13.1) в уравнение

$$s_n = [s_n],$$

где $[s_n]$ – допускаемое контактное напряжение, дает уравнение относительно делительного диаметра шестерни. Его решение:

$$d'_{1mm} = K_d \sqrt[3]{\frac{T_B H \cdot m K_{nb} (1 + u'_{3n})}{Y_{ed} \left[s_n \frac{H}{mm^2} \right]^2 u_{3n}}},$$

где u_{3n} – найденное (в лекции 9) передаточное число передачи, численный коэффициент K_d (для стальных прямозубых колес) $= 780 \text{ МПа}^{1/3}$.

Ширина колес передачи

$$b = Y_{ed} d'_1$$

округляется до ближайшего целого числа мм. Требуемый модуль зацепления

$$m' = \frac{b}{Y_m}$$

($Y_m = 25...30$ – коэффициент ширины относительно модуля) согласуется со стандартом – принимается стандартный модуль (в дальнейшем m).

Требуемое число зубьев шестерни

$$z'_1 = \frac{d'_1}{m}$$

округляется до ближайшего целого z_1 . Число зубьев колеса

$$z'_2 = z_1 \cdot u'_{3n}$$

округляется до ближайшего целого z_2 . Передаточное число

$$u_{3n} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (13.2)$$

Основные размеры колес:

– делительные диаметры (10.6):

$$\begin{aligned}d_1 &= mz_1, \\d_2 &= mz_2;\end{aligned}\tag{13.3}$$

– диаметры окружностей вершин зубьев (10.8):

$$\begin{aligned}d_{a1} &= d_1 + 2m, \\d_{a2} &= d_2 + 2m;\end{aligned}$$

– диаметры окружностей впадин (10.8):

$$\begin{aligned}d_{f1} &= d_1 - 2,5m \\d_{f2} &= d_2 - 2,5m,\end{aligned}$$

– межосевое расстояние:

$$a = \frac{d_1 + d_2}{2}.$$

13.2 Проверка контактной прочности

Окружная сила F_t в зацеплении определяется по формуле (11.1), удельная расчетная окружная сила – по формуле (13.1). Коэффициент неравномерности распределения нагрузки K_{nb} по ширине зуба b берется так же, как в п. 13.1; динамический коэффициент K_{nv} – в зависимости от модуля зацепления m и степени точности, последняя (обычно 8-я) назначается в зависимости от окружной скорости

$$V \frac{m}{c} = \frac{pn_B}{30} \frac{d_{lmm}}{2} \cdot 0,001,$$

частоту вращения шестерни (быстроходного вала) см. в таблице 9.1.

Контактные напряжения (11.13) находятся с учетом фактически найденных значений (13.2 – 13.3).

Перегрузка (недогрузка) передачи

$$-10\% \leq \frac{s_n - [s_n]}{[s_n]} 100\% \leq 5\%.$$

13.3 Проверка на прочность при изгибе

Изгибающий момент в заделке при прямом поперечном изгибе на рисунке 12.2 тем больше, чем больше длина стержня, или чем дальше от заделки приложена сила F . По мере вращения шестерни на рисунке 13.1 нормальная сила F_n (и вместе с ней (рис. 13.2) поперечная составляющая F_t') удаляется от основания – заделки зуба. Наибольший изгибающий момент в заделке зуба шестерни возникает в момент, предшествующий его выходу из зацепления. В случае колеса следует брать момент, следующий за входом зуба колеса в зацепление.

Разумеется, угол $g = 90^\circ - a'$, составляемый нормальной силой F_n с осью зуба, меньше (рис. 13.1) $90^\circ - a$, поперечная составляющая силы F_n (рис. 13.2):

$$F'_t = F_n \sin g = F_n \cos a', \quad a' > a \quad (13.4)$$

не равна (см. формулу (11.3)) окружной силе $F_t = F_n \cos a$. Продольная составляющая (рис. 13.2)

$$F'_r = F_n \cos g = F_n \sin a' \quad (13.5)$$

не равна радиальной силе (11.2). Конечно, считается, что нагрузка F_n воспринимается одной парой зубьев, поскольку неточности изготовления в назначаемых обычно 7, 8, 9 степенях точности не гарантируют в указанные моменты обязательного двупарного зацепления.

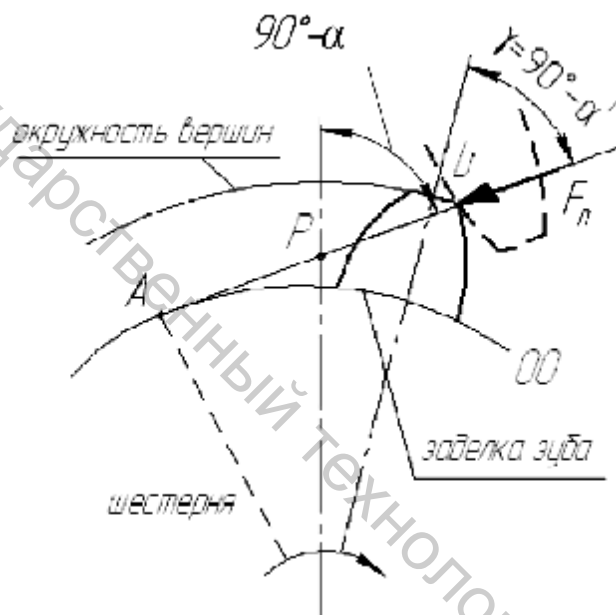


Рисунок 13.1 – Момент выхода зуба шестерни из зацепления

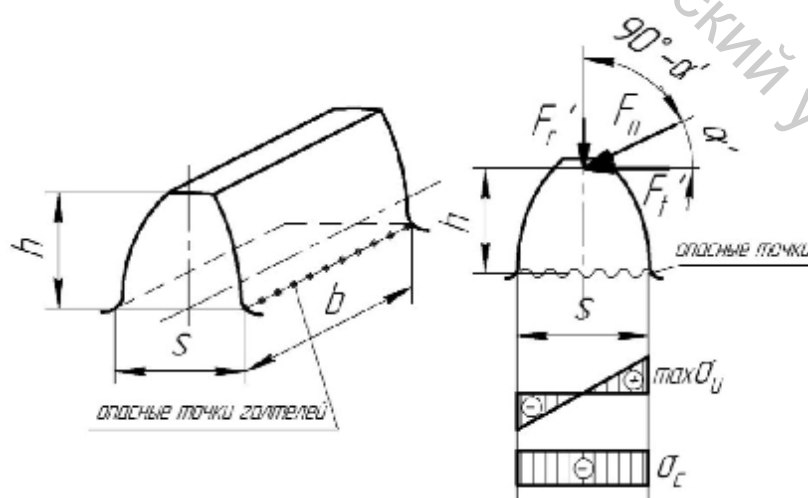


Рисунок 13.2 – Напряжения в заделке и опасные точки у галтели

На рисунке 13.2 напряжения в заделке и опасные точки у галтели – места перехода поверхности зуба в поверхность впадины

Деформация зуба – результат наложения на прямой поперечный изгиб силой (13.4) сжатия силой (13.5). Наибольшие растягивающие напряжения при изгибе зуба (рис. 13.2):

$$S_{maxu} = \frac{6F_t' h}{bs^2}, \quad (13.6)$$

нормальные напряжения при сжатии зуба (12.13):

$$S_c = -\frac{F_r'}{bs}. \quad (13.7)$$

Напряжения от нескольких сил равны сумме напряжений от каждой из них в отдельности (принцип независимости действия сил): напряжения в опасных точках заделки зуба получаются суммированием напряжений (13.6) и (13.7):

$$S_F = S_{maxu} - S_c. \quad (13.8)$$

Растягивающие напряжения для зубьев стальных колес опаснее сжимающих, пусть они и несколько меньше сжимающих.

Желая учесть неравномерность распределения нагрузки по ширине зуба, неточности изготовления колес и концентрацию напряжений у галтели зуба, умножим напряжения (13.6-13.7) на коэффициенты K_{Fn} , K_{Fb} и K_T . Подставляя теперь в формулы (13.6) и (13.7) выражения (13.4) и (13.5), учитывая в них нормальную силу в виде (11.3), напряжения (13.8) найдем в виде:

$$\begin{aligned} S_F &= K_{Fb} \cdot F_{Fv} \left[\frac{6F_t'(mh')}{bs'(ms')^2} \cdot \frac{\cos a'}{\cos a} - \frac{F_t}{bs'(ms')} \cdot \frac{\sin a'}{\cos a} \right] K_T = \\ &= \frac{F_t K_{Fb} K_{Fv}}{bsm} \left[\left(\frac{6h'}{s'^2} \cdot \frac{\cos a'}{\cos a} - \frac{1}{s'} \cdot \frac{\sin a'}{\cos a} \right) K_T \right], \end{aligned} \quad (13.9)$$

где размеры зуба b, s, h выражены через модуль зацепления m .

Нетрудно увидеть, что перед квадратными скобками в формуле (13.9) находится удельная расчетная окружная сила вида (11.5), разделенная на модуль зацепления; в квадратных скобках – коэффициент формы зуба Y_F , зависящий от числа зубьев z . Условие прочности зубьев при изгибе

$$S_F = Y_F \frac{W_{Ft}}{m} \leq [S_F]. \quad (13.10)$$

13.4 Допускаемые напряжения

Работа зубчатой передачи складывается из повторяющихся циклов. Время одного цикла – время одного оборота зубчатого колеса. На рисунке 13.3 показаны "всплески" возникающих и исчезающих контак-

ных и изгибных напряжений. Такие напряжения называются изменяющимися (циклически) по пульсирующему циклу. Разрушение зубьев при таких напряжениях называется разрушением от усталости, а термин "прочность" заменяется термином "выносливость". Названия эти возникли исторически. Материал зубьев, разумеется, не устает. Разрушение от усталости – завершение процесса зарождения и развития усталостных трещин, приводящего к выкрашиванию материала.

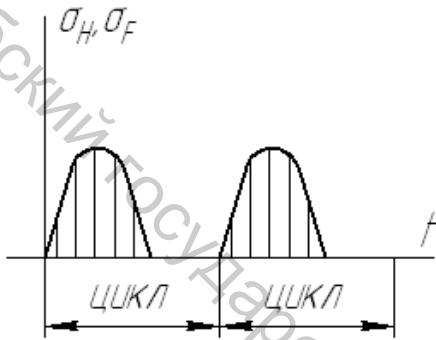


Рисунок 13.3 – Пульсирующий цикл напряжений в зубе колеса

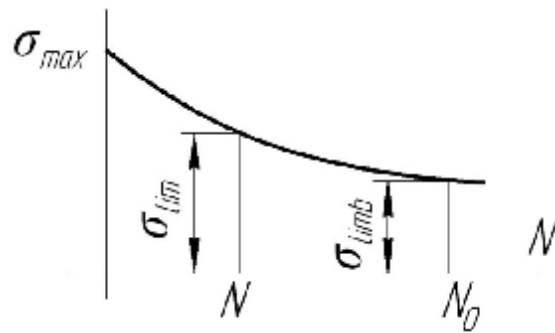


Рисунок 13.4 – Кривая выносливости

Наибольшее напряжение, при котором зубчатые колеса способны работать неограниченно долго (рис. 13.4), называется базовым пределом выносливости σ_{lim} ; если напряжение не превышает предела выносливости, гарантируется, что колесо выдержит базовое число циклов – оборотов N_0 .

Если же требуемое за службу число циклов

$$N = 60nL_h \quad (13.11)$$

(n – частота вращения колеса, L_h – срок службы в часах) меньше базового N_0 , предельное напряжение (временный предел выносливости) $\sigma_{lim} > \sigma_{limб}$.

Допускаемое напряжение в этом случае

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{lim}}{[s]}, \quad (13.12)$$

где $[s]$ – требуемый коэффициент безопасности (>1).

Уравнение кривой выносливости

$$N\sigma_{lim}^m = const = N_0\sigma_{limб}^m,$$

откуда временный предел выносливости

$$S_{lim} = S_{lim \epsilon} \sqrt[m]{\frac{N_0}{N}},$$

или

$$S_{lim} = S_{lim \epsilon} \cdot K_L, \quad K_L = \sqrt[m]{\frac{N_0}{N}} I. \quad (13.13)$$

Это коэффициент долговечности. При числе циклов (13.11), превышающем базовое N_0 , т.е. в условиях длительной работы, коэффициент (13.13) равен единице.

Подставляя временный предел (13.13) в формулу (13.12), допускаемое напряжение (13.12) найдем в виде:

$$[S] = \frac{S_{lim \epsilon}}{[S]} K_L. \quad (13.14)$$

Не лишне заметить, что координаты "базовой точки" $N_0, S_{lim \epsilon}$ на кривой выносливости (рис. 13.4) определяются твердостью поверхностей зубьев. Твердость по Бринеллю

$$HB = \frac{F}{A},$$

где A – площадь сферического отпечатка на поверхности детали, оставленного шариком из закаленной стали при вдавливании его силой F (рис. 13.5). Базовые пределы контактной и изгибной выносливости

$$S_{H lim \epsilon} = 2HB + 70 \text{ МПа}, \quad S_{F lim \epsilon} = HB + 260 \text{ МПа};$$

допускаемые напряжения (13.14) в условиях $S_H \leq [S_H]$ и (13.10)

$$[S_H] = \frac{S_{H lim \epsilon}}{[S_H]} K_{HL}, \quad [S_F] = \frac{S_{F lim \epsilon}}{[S_F]} K_{FL}. \quad (13.15)$$

Зацепляющиеся колеса наделяются различной твердостью. Твердость шестерни выше. В условии $S_H \leq [S_H]$ берется меньшее из двух напряжений (13.15), условие (13.10) проверяется для слабого звена – с меньшим отношением допускаемого напряжения (13.15) к коэффициенту формы Y_F .

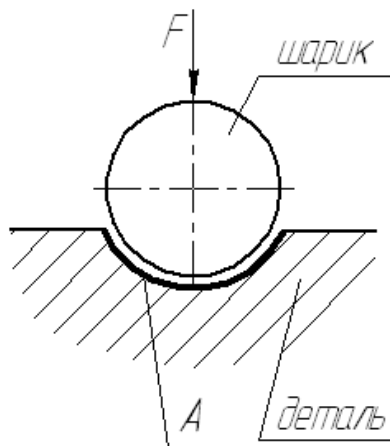


Рисунок 13.5 – К измерению твердости по Бринеллю

Лекция 14. Кручение круглого стержня

14.1 Угол сдвига

На рисунке 14.1 показан круглый стержень с продольными и поперечными линиями на поверхности. Рассмотрим деформацию стержня, при которой его продольная ось не удлиняется и не укорачивается, остается прямолинейной, а поперечные сечения стержня, оставаясь перпендикулярными к оси, поворачиваются вокруг оси как жесткие диски, не удаляясь друг от друга и не приближаясь друг к другу. На рисунке 14.1. показано, как деформируются первоначально прямоугольные элементы сетки линий. Говорят, что эти элементы, становясь параллелограммами, претерпевают сдвиг. Приращения (положительные и отрицательные) первоначально прямых углов называются углами сдвига.

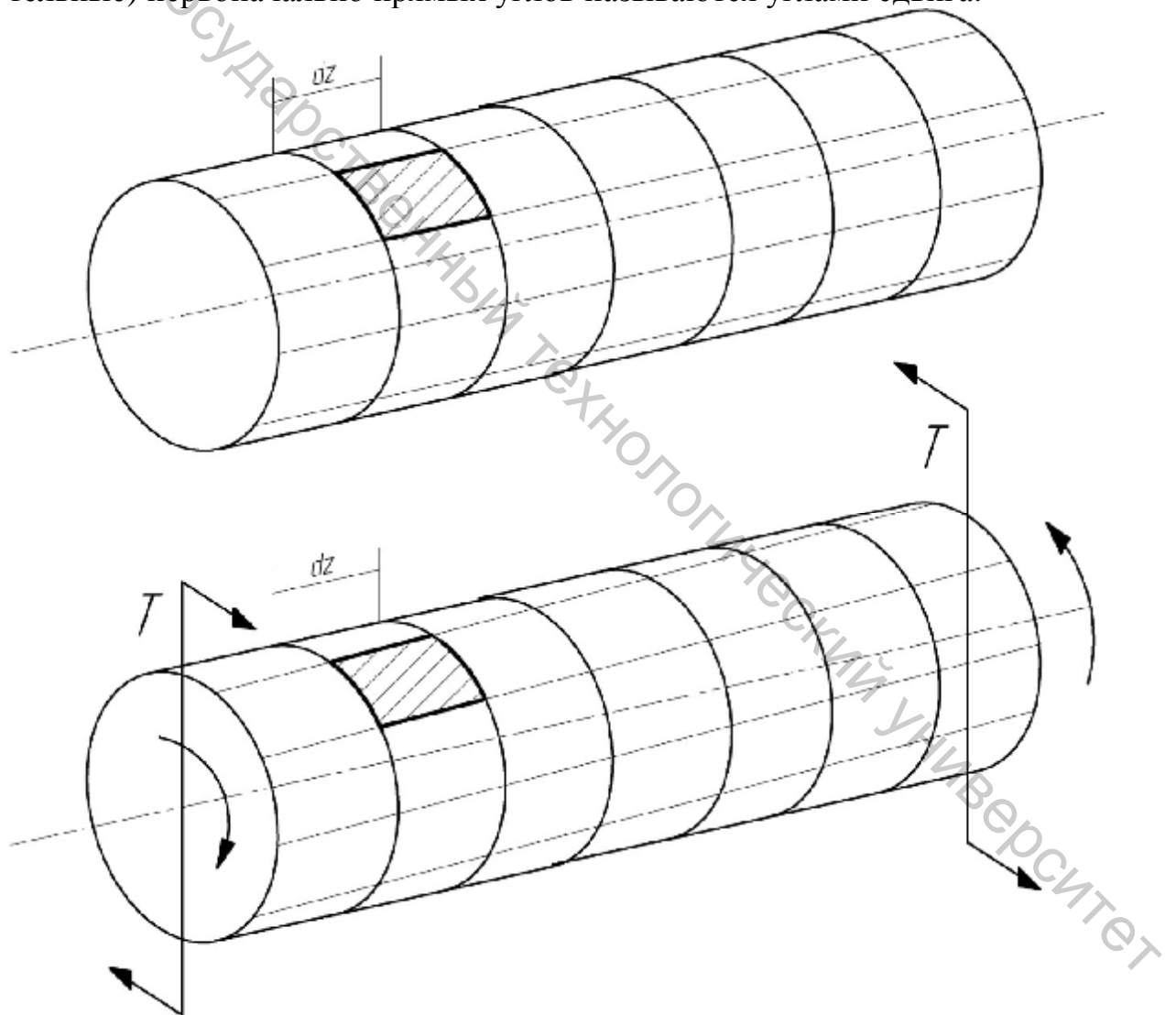


Рисунок 14.1 – Сдвиги прямоугольных элементов поверхности стержня при его кручении

На рисунке 14.2 показан "вынутый" из стержня бесконечно короткий фрагмент стержня. Пусть переднее сечение (передний торец) фрагмента повернулось относительно заднего торца на угол закручивания dj . Любой из радиусов CA переднего торца поворачивается на тот же угол. Мысленно "вырежем" из фрагмента бесконечно тонкую трубку и найдем угол сдвига g на ее поверхности:

$$g = \frac{ad'}{dz} = \frac{Cadj}{dz} = r \frac{dj}{dz}. \quad (14.1)$$

Как видим, угол сдвига (14.1) пропорционален радиусу трубки.

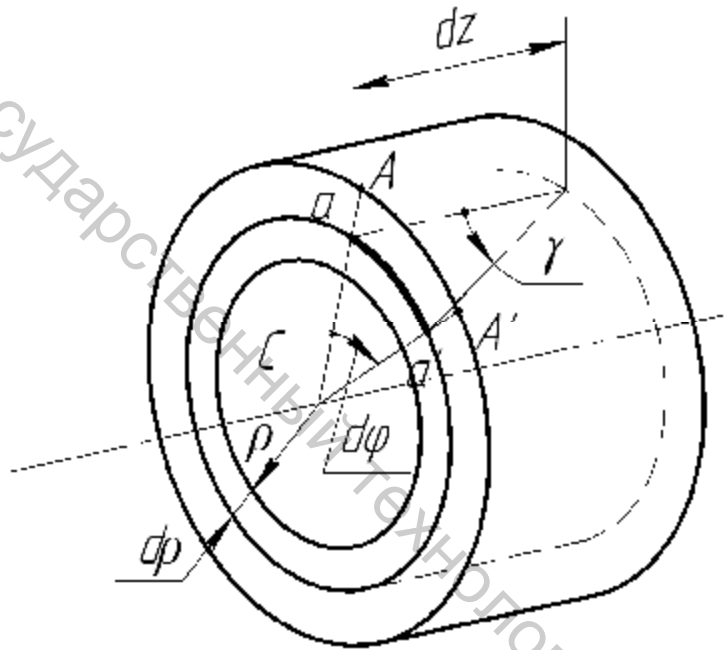


Рисунок 14.2 – Угол сдвига на поверхности бесконечно тонкой трубки

14.2 Закон парности касательных напряжений при кручении

Рассмотрим теперь первоначально прямоугольный элемент трубки (рис. 14.3). Его сдвиг получается как результат действия касательных сил dT и dT' на его гранях. Касательные силы образуют две пары (см. вид по стрелке A), находящиеся в равновесии. Их моменты должны быть равны и противоположны по знаку:

$$dTdz - dT'ds = 0. \quad (14.2)$$

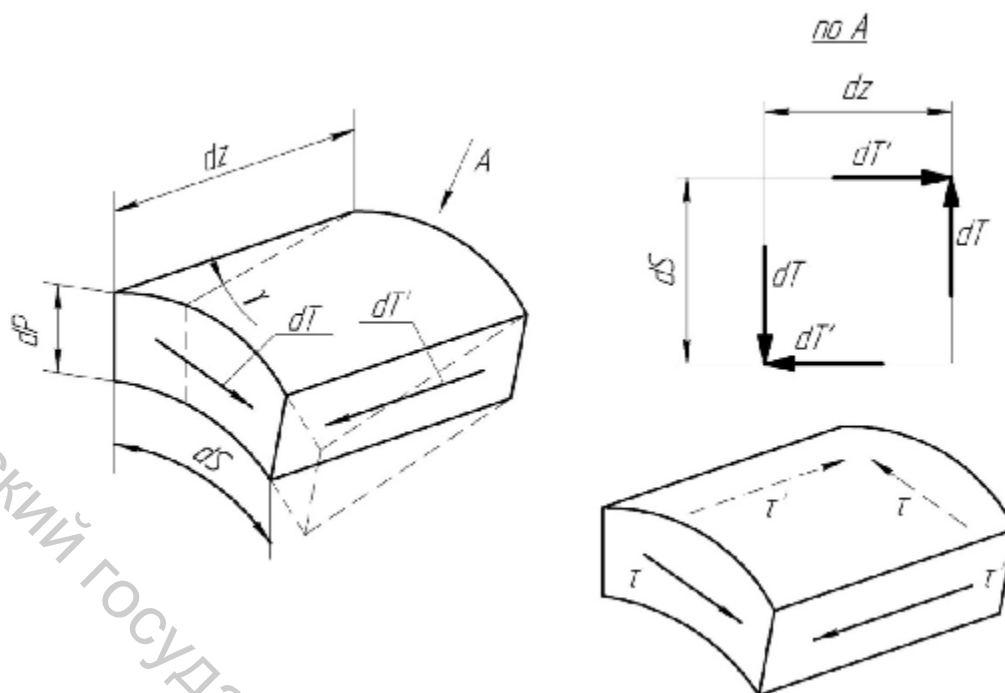


Рисунок 14.3 – Сдвиг элемента трубки на рисунке 14.2, закон парности касательных напряжений

Касательные силы в уравнении (14.2) равны произведениям касательных напряжений t и t' на площади граней, где они действуют:

$$dT = t ds dr, \quad dT' = t' dz dr. \quad (14.3)$$

Вводя силы (14.3) в уравнение (14.2), найдем закон парности касательных напряжений (рис. 14.3)

$$t = t'. \quad (14.4)$$

14.3 Распределение касательных напряжений при кручении.

Закон Гука

$$t = Gg,$$

где G – модуль сдвига материала стержня, дает (см. формулу (14.1)) линейное распределение касательных напряжений (рис. 14.4) вдоль любого из радиусов поперечного сечения стержня.

$$t = Kr, \quad (14.5)$$

где K – неизвестный пока коэффициент пропорциональности. Приведем касательные силы в поперечном сечении

$$dT = t dA \quad (14.6)$$

к центру тяжести сечения C . Как видно на рисунке 14.4, любой из сил dT найдется "пара" – такая же сила, но направленная противоположно первой.

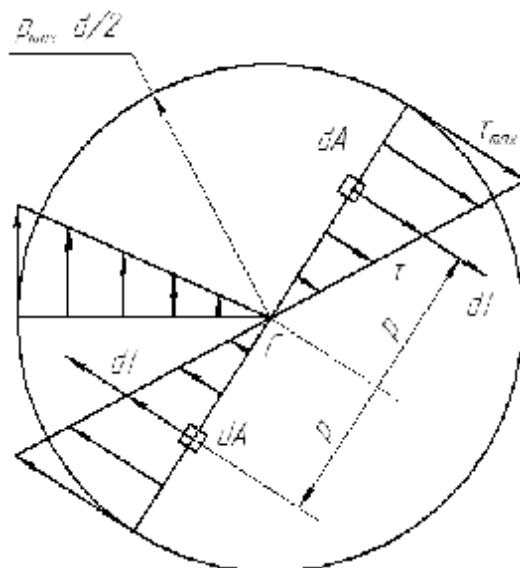


Рисунок 14.4 – Распределение касательных напряжений в сечении при кручении

Итак, система внутренних сил, действующих в поперечном сечении стержня, – система пар, приводящихся, следовательно, к одной паре, момент которой (крутящий момент T) равен главному моменту сил (14.6):

$$T = \int_A r(t dA).$$

Используя здесь напряжения (14.5), найдем:

$$T = K \int_A r^2 dA = KI_p, \quad (14.7)$$

где введена геометрическая характеристика круглого сечения:

$$I_p = \int_A r^2 dA, \quad (14.8)$$

называемая полярным моментом инерции его площади.

К моменту (14.7) приводятся и внешние силы, действующие на часть стержня, расположенную перед "вынутым" фрагментом на рисунке 14.2. Итак, внешние силы, действующие на торцы стержня, должны приводиться к парам, показанным на рисунке 14.1. Соответствующую деформацию на рисунке 14.1 называют кручением.

Найдем, наконец, коэффициент K в формуле (14.5) и формулу для касательных напряжений при кручении: формулы (14.7) и (14.5) дают

$$K = \frac{T}{I_p}, \quad t = \frac{T}{I_p} r. \quad (14.9)$$

14.4 Моменты инерции круглого сечения

Выделим в круге (рис. 14.5) бесконечно узкое кольцо площадью dA , "разбив" его на элементы площади $rdrdj$. Его полярный момент инерции (14.8)

$$dI_p = \int_{dA} r^2 (rdrdj) = r^3 dr \int_0^{2\pi} dj = 2\pi r^3 dr,$$

полярный момент инерции круга

$$I_p = \int_A dI_p = 2\pi \int_0^{d/2} r^3 dr = 2\pi \frac{r^4}{4} \Big|_0^{d/2} = \frac{\pi d^4}{32} \quad (14.10)$$

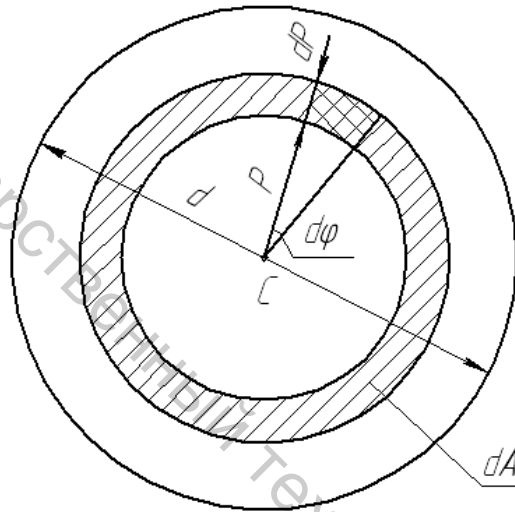


Рисунок 14.5 – К вычислению полярного момента инерции круга

Вращающие моменты могут передаваться валу посредством шпонок, размещаемых в шпоночных пазах. Полярный момент инерции (14.8) сечения на рис. 14.6

$$I_p = I_p^K - I_p^n,$$

где I_p^K – полярный момент инерции круга (14.10); I_p^n – полярный момент инерции отрицательной площади сечения шпоночного паза, равный произведению этой площади на квадрат расстояния ее центра тяжести от центра C , т.е.

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} - (\pi t_l) \left(\frac{d}{2} - \frac{t_l}{2} \right)^2 = \frac{\pi d^4}{32} - \frac{(\pi t_l)(d - t_l)^2}{4}. \quad (14.11)$$

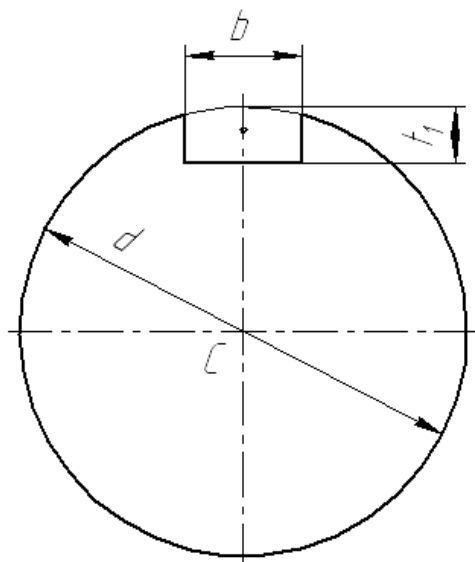


Рисунок 14.6 – К вычислению полярного момента инерции (4.11)

14.5 Моменты сопротивления при кручении

Наибольшие касательные напряжения (14.9) действуют (рис. 14.4) на периферии сечения:

$$t_{\max} = \frac{T}{I_p} r_{\max} = \frac{T}{W_p}. \quad (14.12)$$

Момент сопротивления сечения при кручении в формуле (14.12)

$$W_p = \frac{I_p}{r_{\max}}. \quad (14.13)$$

Если сечения сплошные круговые, радиус $r_{\max} = d/2$ и момент (14.13) (см. полярный момент инерции (14.10)) равен:

$$W_p = \frac{pd^4/32}{d/2} = \frac{pd^3}{16} \approx 0,2d^3. \quad (14.14)$$

Если сечение взято на участке со шпоночным пазом, радиус $r_{\max} = d/2$ и момент (14.13) (см. формулу (14.11)) равен:

$$W_p = \frac{pd^3}{16} - \frac{(bt_1)(d-t_1)^2}{2d}. \quad (14.15)$$

14.6 Расчет на прочность

Выходные концы валов (с насаженными на них полумуфтами) работают на кручение. Условие прочности вала

$$t_{\max} \leq [t],$$

или (см. наибольшее касательное напряжение (14.12))

$$\frac{T}{W_p} \leq [t], \quad (14.16)$$

где момент сопротивления круглого сечения (рис. 14.5) дается формулой (14.14).

Условие (14.16) позволяет найти требуемый диаметр выходного конца вала:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{T}{0,2[t]}}, \quad (14.17)$$

где допускаемое касательное напряжение $[t] = 20...25 \text{ МПа}$.

Найденный диаметр (14.17) и длина выходного участка вала согласуются с диаметром насадочного отверстия и длиной соединительной муфты (в курсовом проекте упругой втулочно-пальцевой МУВП или зубчатой МЗ), способной передать расчетный момент:

$$T_p = KT,$$

K – коэффициент режима работы привода.

14.7 Расчет шпонки

На рисунке 14.7 показано шпоночное соединение ступицы (полу-муфты или зубчатого колеса) с валом. Плоские рабочие поверхности шпонки работают на смятие. Наибольшие напряжения смятия действуют на меньшей из них, выступающей над поверхностью вала. Условие прочности на смятие

$$s_{см} = \frac{F_t}{0,4h \cdot l_r} \leq [s_{см}], \quad (14.18)$$

где h – стандартная высота шпонки; "окружная" сила, воспринимаемая рабочей поверхностью, (см. формулу (11.1)):

$$F_t = \frac{2T}{d},$$

T – вращающий момент (равный крутящему), d – диаметр вала. Требуемая расчетная длина шпонки (см. условие (14.18)):

$$l_r \geq \frac{2T}{d \cdot 0,4h \cdot [s_{нн}]}$$

Требуемая длина шпонки (рис. 14.7)

$$l \geq l_r + v, \quad (14.19)$$

где v – стандартная ширина шпонки. Длина (14.19) согласуется со стандартом.

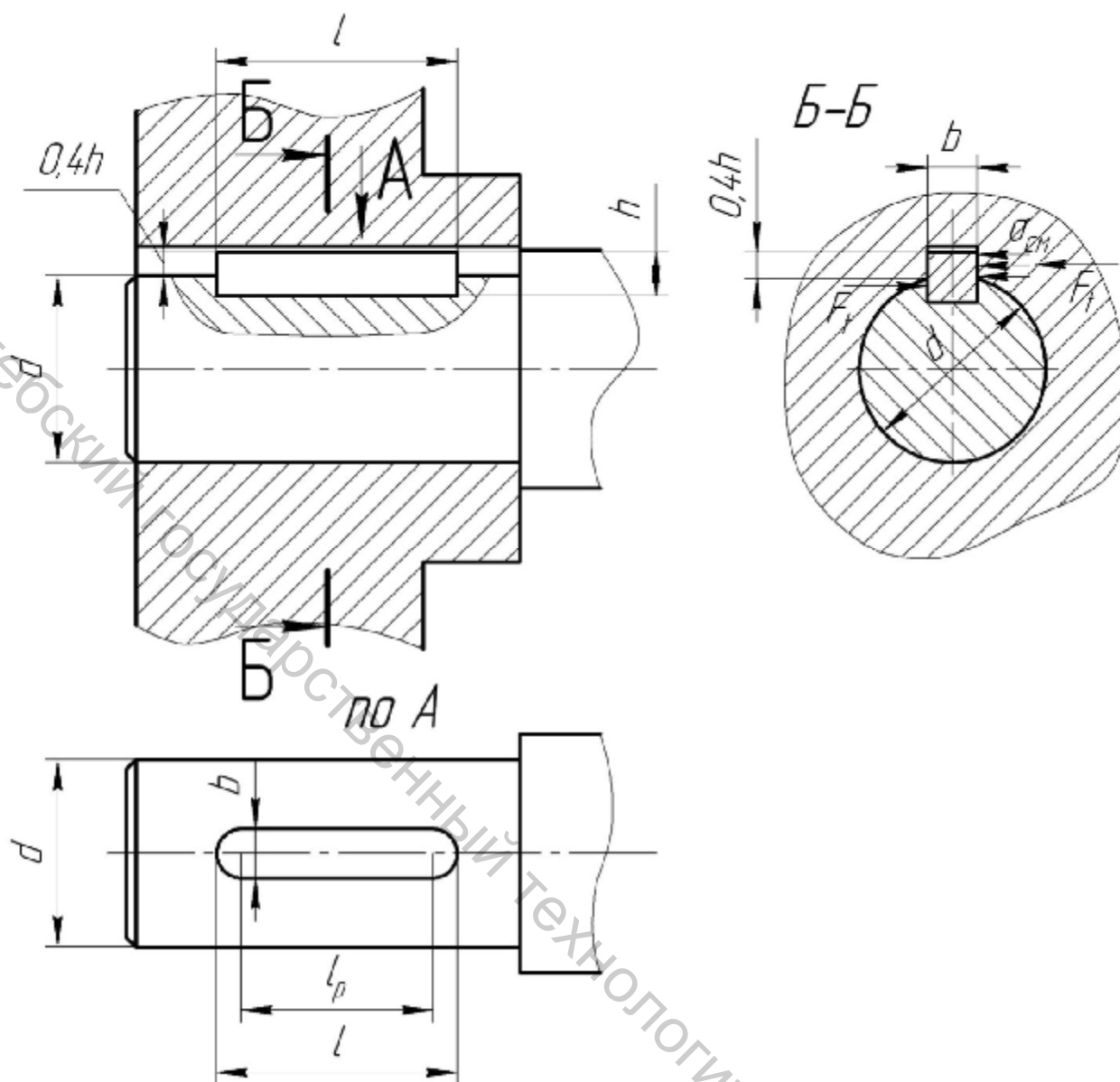


Рисунок 14.7 – Шпоночное соединение

Лекция 15. Изгиб вала

15.1 Расчетная схема

На рисунке 15.1 показан быстроходный вал редуктора в приводе, построенном по схеме ЭД → СМ → ЗП → ОП → ПБ (см. лекцию 9). На него действуют окружная и радиальная силы (11.1) и (11.2) в зацеплении шестерни с колесом и сила кривошипного эффекта работающей муфты:

$$F_m \approx 125 \sqrt{T_B},$$

и момент, передаваемый полумуфтой на валу.

Перенесем все силы на ось вала: радиальная сила F_r в зацеплении переносится вдоль линии действия, окружная сила F_t – параллельным переносом. Во втором случае наряду с силой F_t , приложенной в точке C на оси вала, "возникает" пара сил с моментом, уравнивающим вращающий момент T_B . Действительно, момент "возникшей" пары равен моменту переносимой силы (11.1) относительно новой точки приложения:

$$F_t \frac{d_1}{2} = \frac{2T_B}{d_1} \frac{d_1}{2} = T_B.$$

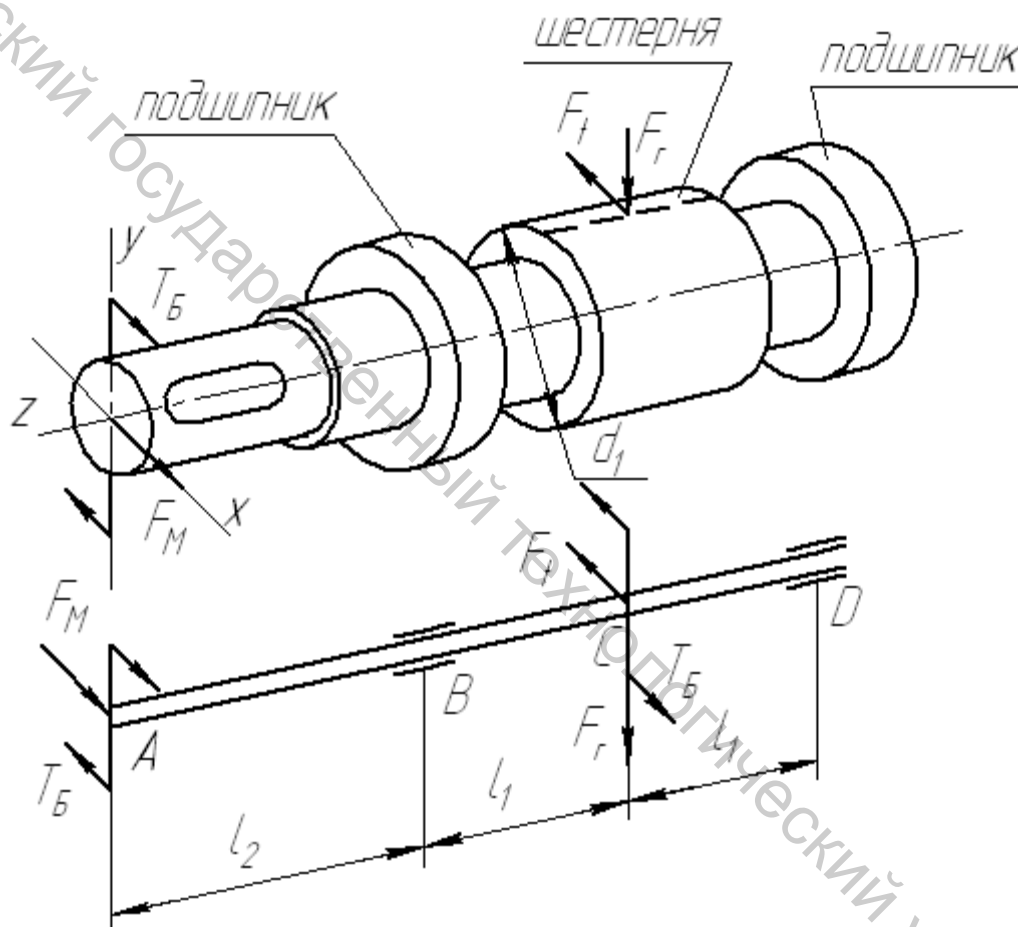


Рисунок 15.1 – Быстроходный вал редуктора и его расчетная схема

15.2 Опорные реакции

Силы, действующие на вал, воспринимаются подшипниками, передающими их корпусу редуктора. Со стороны корпуса действуют опорные реакции. Подшипники воспринимают их своими внешними кольцами и, при посредстве тел качения (шариков или роликов), передают эти силы своим внутренним кольцам и, наконец, валу.

Представим все заданные силы на валу двумя системами сил – силами, действующими в вертикальной на рисунке плоскости YZ , и силами, действующими в горизонтальной плоскости XZ ; соответственно, и опорные реакции представляются своими вертикальными и горизонтальными составляющими.

На рисунке 15.2 показаны вертикальные силы. Единственная заданная сила F_r приложена в середине пролета BD , опорные реакции, уравнивающие силу F_r , очевидно, равны по величине – уравнение проекций $\sum Y = 0$, или

$$R_{By} - F_r + R_{Dy} = 0$$

дает

$$R_{By} = R_{Dy} = \frac{1}{2} F_r. \quad (15.1)$$

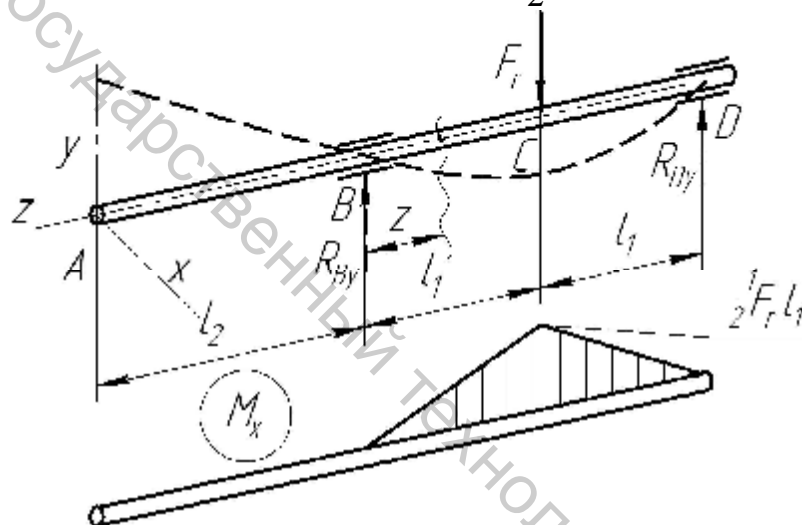


Рисунок 15.2 – Опорные реакции и изгибающие моменты в вертикальной плоскости

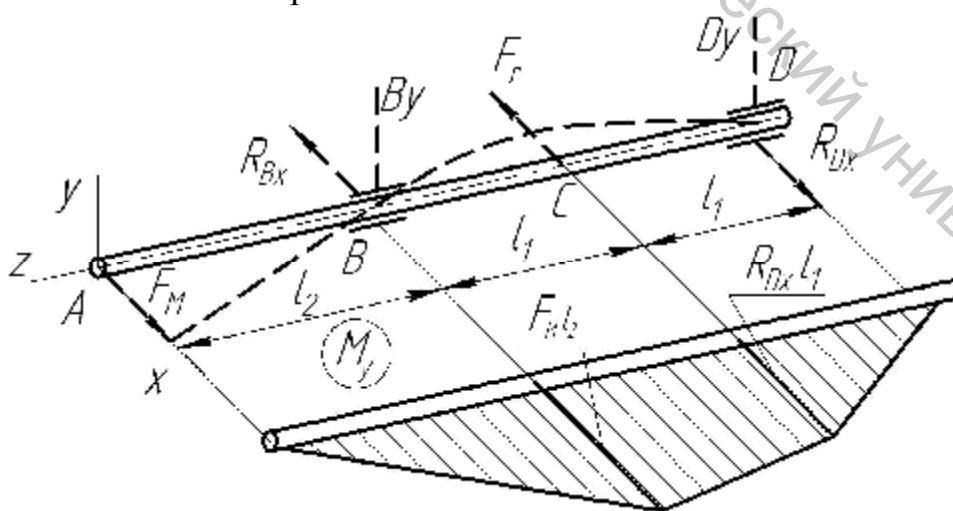


Рисунок 15.3 – Опорные реакции и изгибающие моменты в горизонтальной плоскости

На рисунке 15.3 показаны горизонтальные силы. Опорные реакции удобно найти из уравнений моментов:

$$Sm_{BY} = 0, \quad -R_{Dx} \cdot 2l_1 + F_t \cdot l_1 + F_m l_2 = 0,$$

$$R_{Dx} = \frac{F_t \cdot l_1 + F_m \cdot l_2}{2l_1};$$

$$Sm_{DY} = 0, \quad F_m(l_2 + 2l_1) - R_{Bx} \cdot 2l_1 - F_t l_1 = 0, \quad (15.2)$$

$$R_{Bx} = \frac{F_m(l_2 + 2l_1) - F_t \cdot l_1}{2l_1}.$$

Правило знаков для моментов в уравнениях равновесия (15.2): момент силы, "вращающей" вал вокруг взятой оси против хода часовой стрелки (при наблюдении с конца оси), считаем положительным. Например, силы F_m и F_t "вращают" вал вокруг оси BY против хода часовой стрелки – моменты обеих сил в уравнении (15.2) положительные; реакция R_{Dx} "вращает" вал вокруг оси BY по ходу часовой стрелки – ее момент в уравнении (15.1) отрицательный.

15.3 Изгибающие моменты

При изгибе в вертикальной плоскости (рис. 15.2) искривляется участок BD , консоль AB поворачивается, не искривляясь. На искривленном участке BD сжатыми оказываются верхние "волокна", в пределах всего участка BD изгибающие моменты M_x считаем положительными.

Изгибающий момент в произвольном сечении E участка BC найдем, приводя единственную "левую" силу R_{By} к сечению E , т.е. переносим силу R_{By} в сечение E и добавляя к ней пару сил с моментом (изгибающим моментом) $R_{By}z$. Свяжем теперь положительный знак момента с направлением силы R_{By} : изгибающий момент вертикальной силы, направленной вверх, положительный.

Итак, в пределах участка BC изгибающий момент

$$M_x = R_{By}z,$$

изменяясь по линейному закону, изменяется от нуля в сечении B (при $z = 0$) до наибольшего $R_{By}l_1$ в сечении C (при $z = l_1$).

В пределах участка DE удобнее пользоваться "правой" силой R_{Dy} . Положительный знак ее момента отвечает направлению силы R_{Dy} (направлена вверх). В сечении D , очевидно, $M_x = 0$, наибольший момент

на участке DE возникает в наиболее удаленном от силы R_{Dy} сечении C :

$$M_x = R_{Dy} l_1.$$

Если учесть решение уравнения равновесия (15.1), найдем в сечении C :

$$M_x = R_{Dy} l_1 = R_{By} l_1 = \frac{l}{2} F_r l_1.$$

Как видим, величина изгибающего момента не зависит от того, какими силами – левыми или правыми – пользуемся при его вычислении.

График (эпюра) изменения изгибающего момента M_x по длине вала показан на рисунке 15.2.

В горизонтальной плоскости (рис. 15.3) искривляется весь вал. Изгибающий момент M_y считаем положительным, если он "создается" силой, направленной вперед.

На участке AB изгибающий момент изменяется от нуля (в сечении A) до наибольшего (положительного) $F_m l_2$, действующего в сечении B .

На участке DC воспользуемся правой силой R_{Dx} , направленной вперед: изгибающий момент в сечении D $M_y = 0$, в сечении C $M_y = R_{Dx} l_1 > 0$. Соответствующая эпюра показана на рисунке 15.3.

15.4 Суммарный изгибающий момент

На рисунке 15.4 показаны изгибающие моменты (см. рис. 15.2 и 15.3), действующие во взаимно перпендикулярных плоскостях. Заметим, что их вовсе не обязательно изображать как пары сил, можно и так – дуговыми стрелками. Вообразим, что показанные на рисунке 15.4 стрелки изготовлены из гибкого материала, и прижмем их к плоскости поперечного сечения – получатся векторы \vec{M}_x и \vec{M}_y на рисунке 15.5. Их можно сложить по правилу параллелограмма, заменив два изгибающих момента одним моментом \vec{M} , равным их геометрической сумме. Оправдание этому сложению в приведении системы пар, т.е. в замене нескольких пар одной парой. На рисунке 8.3 моменты пар плоской системы сил складывались алгебраически, если же пары действуют в пересекающихся плоскостях, их моменты складываются геометрически.

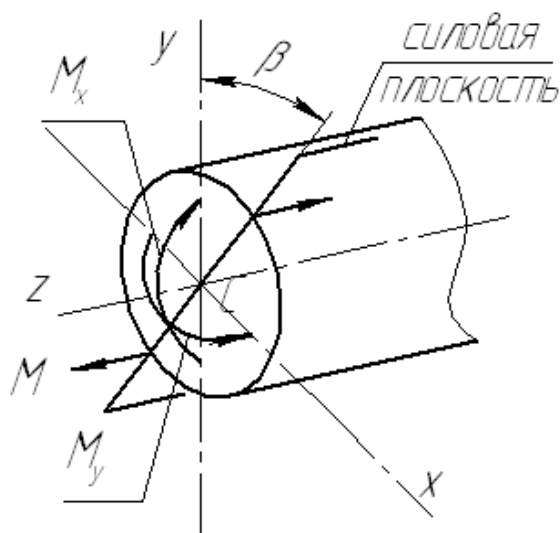


Рисунок 15.4 – Изгибающие моменты в поперечном сечении вала

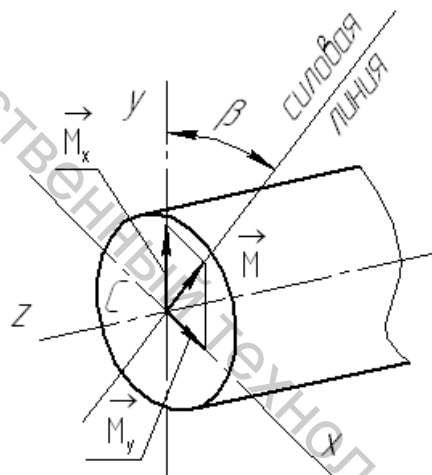


Рисунок 15.5 – Векторы изгибающих моментов и суммарный изгибающий момент

15.5 Нормальные напряжения в поперечном сечении вала

Нормальные напряжения в случае действия двух изгибающих моментов равны сумме нормальных напряжений (12.17) от каждого из моментов в отдельности:

$$\sigma = -\frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x. \quad (15.3)$$

Изгибающие моменты в формуле (15.3) (см. рис. 15.6 и 15.5):

$$M_x = M \cos b, \quad M_y = M \sin b, \quad (15.4)$$

где b – угол наклона силовой линии (рис. 15.5), или силовой плоскости (рис. 15.4).

Осевые моменты инерции круга

$$I_x = I_y = I_u \quad (15.5)$$

(так как круг одинаково расположен относительно осей x и y). Формула (15.3) в обозначениях (15.4) и (15.5):

$$S = -\frac{M \cos b}{I_u} y - \frac{M \sin b}{I_u} x = -\frac{M}{I_u} (x \sin b + y \cos b). \quad (15.6)$$

Выражение в скобках формулы (15.6) получается проектированием геометрической суммы $\vec{x} + \vec{y} = \vec{r}$ (рис. 15.6) на направление силовой линии,

т.е.

$$x \sin b + y \cos b = r \cos g = h,$$

и напряжения (15.6):

$$S = -\frac{M}{I_u} h. \quad (15.7)$$

В точках прямой u , перпендикулярной к силовой линии, $h = 0$, и напряжения (15.7) равны нулю – эта прямая, нейтральная линия при изгибе. Наибольшие по модулю напряжения действуют в точках, наиболее удаленных от линии u , в точках S и R (рис. 15.6):

$$S_{max} = \frac{M}{I_u} h_{max} = \frac{M}{W_u}, \quad (15.8)$$

$$W_u = \frac{I_u}{h_{max}}. \quad (15.9)$$

Это момент сопротивления круглого сечения вала при изгибе.

15.6 Осевой момент инерции и момент сопротивления круглого сечения.

Полярный момент инерции (14.8)

$$I_p = \int_A r^2 dA,$$

или (см. рисунок 15.6, определения (12.3) и равенство (15.5)):

$$I_p = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = I_y + I_x = 2I_u,$$

откуда осевой момент инерции площади круга (см. формулу (14.10)):

$$I_u = \frac{1}{2} I_p = \frac{\pi d^4}{64}.$$

Момент сопротивления (15.9)

$$W_u = \frac{\pi d^4 / 64}{d / 2} = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1 d^3. \quad (15.10)$$

Момент сопротивления сечения на участке со шпоночным пазом (рис. 15.1) находится аналогично тому, как это сделано в п. 14.5 (см. формулу (14.15)):

$$W_u = \frac{pd^3}{32} - \frac{(\sigma t_1)(d - t_1)^2}{2d}. \quad (15.11)$$

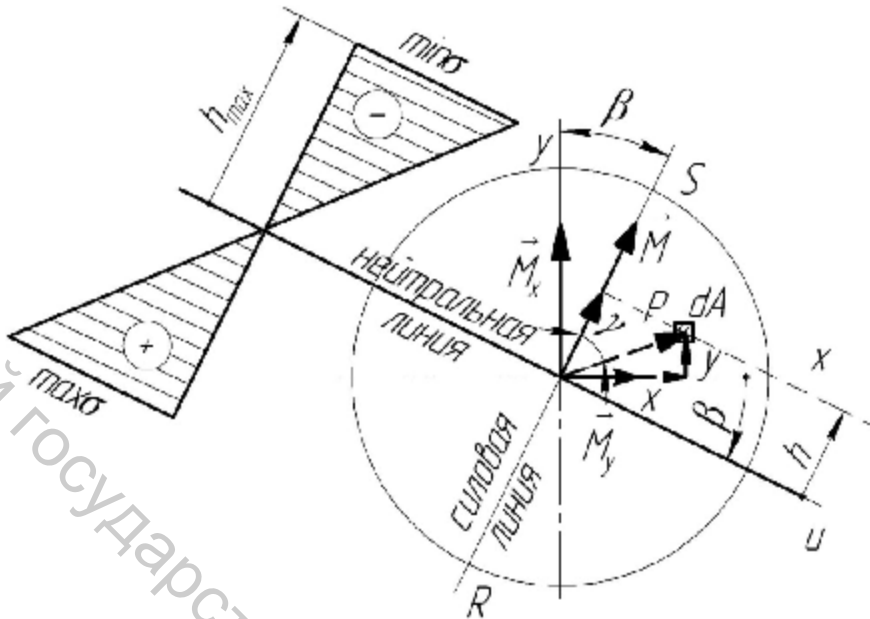


Рисунок 15.6 – Нормальные напряжения и их эпюра при изгибе вала

Лекция 16. Напряженное состояние вала

16.1 Напряженное состояние в опасных точках поперечного сечения вала

На рисунке 15.1 показан вал, работающий на изгиб с кручением. Наибольшие нормальные напряжения действуют (рис. 15.6) в точках R и S – точках пересечения окружности – границы сечения с силовой линией.

Наибольшие касательные напряжения действуют (рис. 14.4) в точках границы сечения, в точках R и S тоже. Наиболее опасные точки сечения – точки R и S . Напряжения в них (15.8) и (14.12):

$$s_{\max} = \frac{M}{W_u},$$

$$t_{\max} = \frac{T}{W_p},$$

где T – крутящий момент.

Моменты сопротивления при изгибе и кручении (15.10) и (14.14) в формулах (16.1)

$$W_u = 0,1d^3, \quad W_p = 0,2d^3;$$

суммарный изгибающий момент (рис. 15.6)

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2},$$

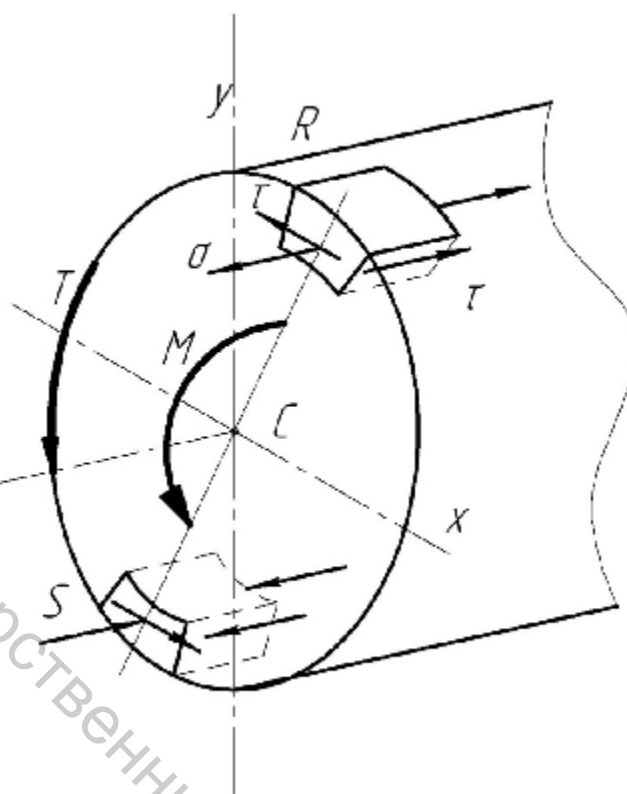


Рисунок 16.1 – Нормальные и касательные напряжения на поперечных и продольных площадках в окрестностях опасных точек

На рисунке 16.1 показаны бесконечно малые элементы, содержащие опасные точки сечения, на их гранях нормальные и касательные напряжения, подчиненные закону парности (14.4). Две грани элементов свободны от напряжений. Напряженное состояние на рисунке 16.1 называется плоским.

Вдобавок, нормальные напряжения действуют только на двух гранях из шести. Этот частный случай плоского напряженного состояния называют упрощенным.

16.2 Упрощенное плоское напряженное состояние (УПНС)

УПНС на рисунке 16.2 есть результат наложения (суперпозиции) чистого сдвига (ЧС) на рис. 16.4 на линейное напряженное состояние (ЛНС) на рисунке 16.3. Первое имеем (рис. 14.3) при кручении круглого стержня, второе (рис. 12.10) – при изгибе (и при растяжении-сжатии). Нормальные напряжения на рисунке 16.2 (растягивающие) считаем положительными, касательные напряжения, "вращающие" элемент по ходу часовой стрелки, – положительными; на "горизонтальных" площадках они отрицательные.

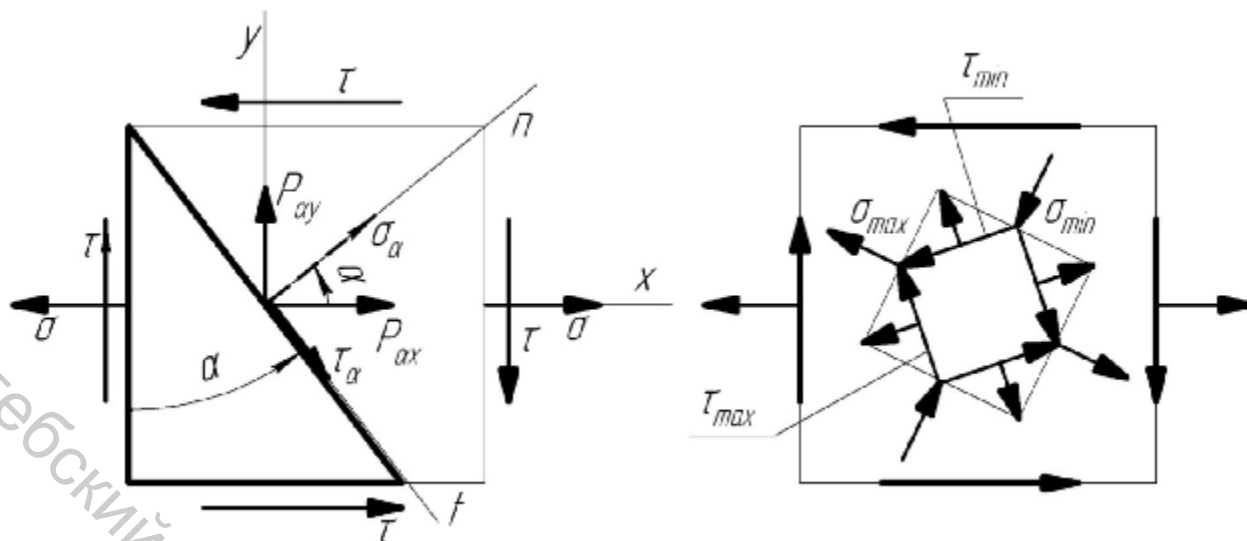


Рисунок 16.2 – УПНС: исходные напряжения, напряжения на произвольной площадке; главные напряжения, экстремальные касательные напряжения

Изучить напряженное состояние в точке – значит найти напряжения на любой площадке, проходящей через точку, или на любой площадке, проведенной внутри элемента, содержащего точку. Напряжения p_a в УПНС, представленные на рисунке 16.2 составляющими r_{ax}, r_{ay} , найдем, суммируя такие же напряжения на той же площадке в ЛНС и ЧС.

Отделим мысленно левую часть элемента, находящегося в равновесии, от правой. Силы на рисунке 16.3

$$dN = S dA, \quad dP_{ax} = p_{ax} dA_a \quad (16.1)$$

получены умножением напряжений на площади граней элемента, площадь наклонной грани при этом

$$dA_a = \frac{dA}{\cos a}.$$

Силы (16.1) уравновешены, следовательно:

$$dN = dP_{ax},$$

напряжения

$$p_{ax} = S \cos a. \quad (16.2)$$

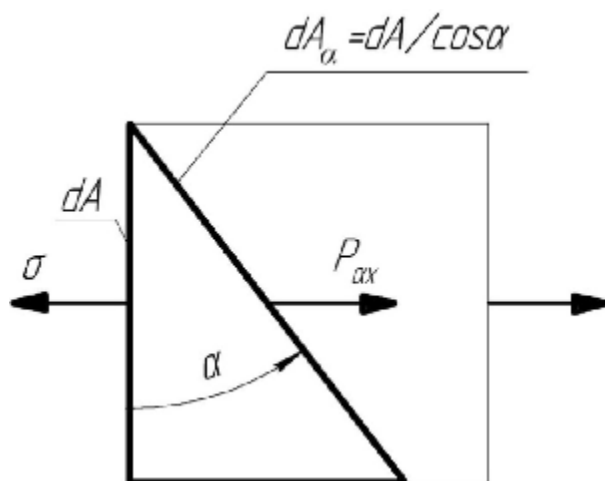


Рисунок 16.3 – ЛНС

16.3 Чистый сдвиг

Силы, действующие на грани левой части элемента, находящегося в равновесии:

$$dT = t dA, \quad dT' = t (dA) \operatorname{tg} a;$$

$$dP_{ax} = p_{ax} dA / \cos a, \quad dP_{ay} = p_{ay} \frac{dA}{\cos a}.$$

Уравнение равновесия:

$$dT = -dP_{ay}, \quad dT' = -dP_{ax};$$

уравнение напряжения:

$$r_{ay} = -t \cos a, \quad r_{ax} = -t \sin a. \quad (16.3)$$

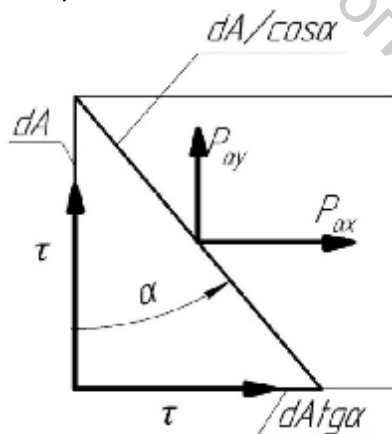


Рисунок 16.4 – Чистый сдвиг

16.4 Нормальные и касательные напряжения в УПНС

Составляющие напряжения p_a в УПНС найдутся суммированием составляющих (16.2) и (16.3):

$$p_{ax} = S \cos a - t \sin a, \quad (16.4)$$

$$p_{ay} = -t \cos a.$$

Нормальные напряжения – проекции напряжений p_a , или суммы проекций напряжений (16.4) на нормаль n к площадке; касательные напряжения – проекции напряжений (16.4) на ось t :

$$s_a = np_n \cdot p_a = np_n \cdot p_{ax} + np_n \cdot p_{ay} = (S \cos a - t \sin a) \cos a - t \cos a \sin a;$$

$$t_a = np_t \cdot p_a = np_t \cdot p_{ax} + np_t \cdot p_{ay} = (S \cos a - t \sin a) \sin a + t \cos a \cos a,$$

или

$$s_a = S \cos^2 a - t \sin 2a,$$

$$t_a = \frac{1}{2} S \sin 2a + t \cos 2a. \quad (16.5)$$

Вводя в формулы (16.5) выражение

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2},$$

выразим напряжения (16.5) через функции двойного угла:

$$s_a = \frac{S}{2} + \frac{S}{2} \cos 2a - t \sin 2a,$$

$$(16.6)$$

$$t_a = \frac{S}{2} \sin 2a + t \cos 2a.$$

16.5 Максимумы и минимумы нормальных и касательных напряжений в УПНС

Функции

$$f_1(a) = \frac{S}{2} \cos 2a - t \sin 2a,$$

$$(16.7)$$

$$f_2(a) = \frac{S}{2} \sin 2a + t \cos 2a,$$

входящие в формулы (16.6), можно написать в виде:

$$f_1(a) = A \left[\frac{S/2}{A} \cos 2a - \frac{t}{A} \sin 2a \right],$$

$$f_2(a) = A \left[\frac{S/2}{A} \sin 2a + \frac{t}{A} \cos 2a \right],$$

$$A = \sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 + t^2}.$$

Коэффициенты при $\cos 2a$ и $\sin 2a$ не превышают единицы, а сумма их квадратов равна единице; следовательно, можно положить:

$$\frac{s/2}{A} = \cos b, \quad \frac{t}{A} = \sin b,$$

что позволит написать: функции (16.7)

$$f_1(a) = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + t^2} \cos(2a + b),$$

(16.8)

$$f_2(a) = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + t^2} \sin(2a + b);$$

$$f_{1\max} = \pm \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + t^2},$$

(16.9)

$$f_{2\max} = \pm \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + t^2}.$$

Вводя максимумы и минимумы (16.9) в формулы (16.6), найдем максимум и минимум нормальных напряжений (главные напряжения):

$$s_{\max} = \frac{s}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + t^2}$$

(16.10)

и максимум и минимум касательных напряжений

$$t_{\max} = \pm \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + t^2}.$$

(16.11)

Максимумы и минимумы (16.9) имеют место при углах $2a$, разнящихся на 180° , т.е. на взаимно перпендикулярных площадках: главные площадки, где действуют напряжения (16.10), взаимно перпендикулярны; площадки, где действуют экстремальные напряжения (16.11), взаимно перпендикулярны.

Равные значения функций (16.8) имеют место при углах $2a$, разнящихся на 90° : площадки с напряжениями (16.11) наклонены к площадкам с главными напряжениями (16.10) под углами 45° (рис. 16.2).

Заметим: когда $\cos(2a + b)$ в первой из функций (16.8) делается максимальным или минимальным, $\sin(2a + b)$ во второй из функций делается равным нулю; когда $\sin(2a + b)$ становится максимальным или минимальным, $\cos(2a + b) = 0$. Иными словами, на главных площадках касательных напряжений нет; однако, на площадках с экстремальными касательными напряжениями нормальные напряжения (16.6) равны $s/2$.

Лекция 17. Проверка вала на выносливость

17.1 Прочность при линейном напряженном состоянии и чистом сдвиге

Максимум и минимум (16.10) нормальных напряжений в ЛНС ($t = 0$)

$$s_{max} = s, \quad s_{min} = 0 \quad (17.1)$$

действуют на исходных поперечных и продольных площадках (рис. 16.3).

Максимум и минимум (16.11) касательных напряжений в ЧС ($s = 0$)

$$t_{max} = t, \quad t_{min} = -t \quad (17.2)$$

действуют на исходных поперечных и продольных площадках (рис. 16.4).

Именно этими обстоятельствами объясняется интерес к напряжениям в поперечных сечениях стержня при растяжении (сжатии), изгибе и кручении (рис. 12.8, 12.11, 13.2, 15.6, 14.4).

Соответствующие условия прочности (см. экстремумы (17.1-17.2))

$$s_{max} = s \leq [s], \quad t_{max} = t \leq [t], \quad (17.3)$$

допускаемые напряжения

$$[s] = \frac{s_{пред}}{[s]}, \quad [t] = \frac{t_{пред}}{[s]}; \quad (17.4)$$

предельные напряжения в определениях (17.4) связываются с наступлением текучести материала стержня, т.е.

$$s_{пред} = s_T, \quad t_{пред} = t_T. \quad (17.5)$$

$[S] > 1$ – требуемый коэффициент запаса прочности, или коэффициент безопасности.

17.2 Критерий прочности Треска-Сен-Венана

Текущее состояние плоского образца (рис. 17.1) с полированной поверхностью при его растяжении в лаборатории сопровождается линиями Чернова, наклоненными к оси образца под углами 45° . Это следы скольжения слоев материала по плоскостям, на которых действуют максимум и минимум касательных напряжений (16.11).

Текущее состояние круглого образца (рис. 17.2) при его кручении имеет место в его поперечных сечениях, где действуют опять же напряжения (16.11).

Эти наблюдения натолкнули на мысль, что за текучесть ответственны наибольшие касательные напряжения (16.11): по Треска-Сен-Венану текучесть наступает тогда, когда наибольшие касательные на-

пряжения (16.11) достигают некоторого предельного значения (17.5), независимого от вида напряженного состояния, зависящего только от свойств материала. Предел (17.5) можно определить при любом напряженном состоянии. Найдем его в линейном напряженном состоянии (рис. 17.1): при наступлении текучести

$$t_{\max}|_{t=0} = \frac{S_T}{2} = t_T,$$

искомый предел (17.5)

$$t_T = \frac{S_T}{2}, \quad (17.6)$$

S_T — предел текучести, определяемый в испытаниях лабораторных образцов на растяжение (сжатие).

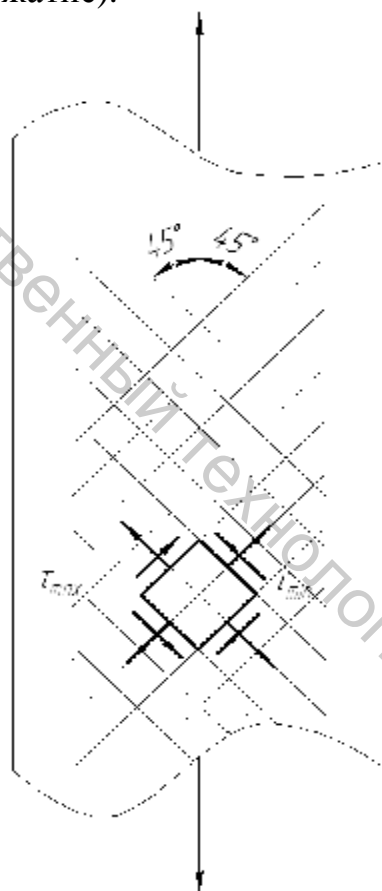


Рисунок 17.1 – Текучесть при растяжении сопровождается скольжением вдоль линий Чернова

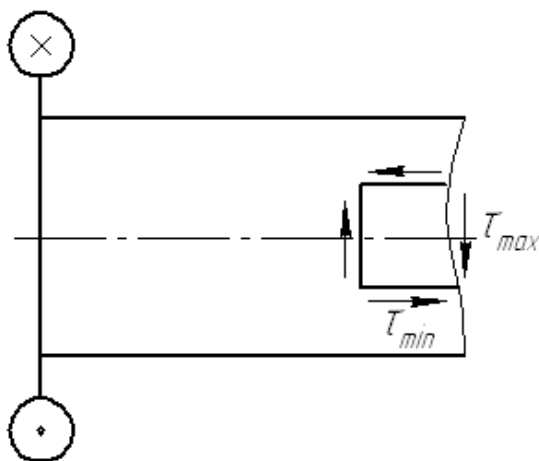


Рисунок 17.2 – Текучесть при кручении имеет место в поперечных сечениях

Подставим предел (17.6) в условие наступления текучести в УПНС (рис. 16.2) (см. формулы (16.11)):

$$t_{max} = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + t^2} = \frac{s_T}{2}.$$

Получим условие

$$\sqrt{s^2 + 4t^2} = s_T \quad (17.7)$$

Назовем левую часть условия (17.7) эквивалентным напряжением, условие прочности напишется в виде

$$s_{э\kappa\theta} \leq [s], \quad s_{э\kappa\theta} = \sqrt{s^2 + 4t^2}; \quad (17.8)$$

$[s]$ – допускаемое напряжение (17.4).

Заметим: условие (17.8) дает в ЛНС ($t = 0$) первое из условий (17.3) и в ЧС ($s = 0$) – второе из условий (17.4) – при учете определения (17.6).

17.3 Коэффициент безопасности в УПНС

Коэффициент безопасности (см. первое из определений (17.4)):

$$s = \frac{s_T}{s_{э\kappa\theta}},$$

или (см. определения (17.8) и (17.6)):

$$s = \frac{s_T}{\sqrt{s^2 + 4t^2}} = \frac{l}{\sqrt{\frac{l}{(s_T/s)^2} + \frac{l}{(t_T/t)^2}}} = \frac{l}{\sqrt{\frac{l}{s_s^2} + \frac{l}{s_t^2}}},$$

иначе

$$s = \frac{s_s s_t}{\sqrt{s_s^2 + s_t^2}}, \quad (17.9)$$

где s_s и s_t – частные коэффициенты безопасности: первый определяется при учете только нормальных напряжений (в ЛНС (рис. 16.3) – составляющей части УПНС), второй – при учете только касательных напряжений (в ЧС (рис. 16.4) – второй составляющей УПНС).

17.4 Циклически изменяющиеся нормальные и касательные напряжения в поперечном сечении вала

На рис. 17.3 показано поперечное сечение вращающегося вала, воспринимающего вместе с этим силы неизменного направления (рис. 15.1). Величина и плоскость действия изгибающего момента остаются при этом неизменными.

Однако, нормальные напряжения (15.7) в точке M границы сечения изменяются:

$$s = -\frac{M}{I_u} h = -\left(\frac{M}{I_u} \frac{d}{2}\right) \sin \omega t.$$

Учтем здесь определения (15.8 – 15.10) и напомним

$$s = -\frac{M}{W_n} \sin \omega t = -s_{\max} \sin \omega t. \quad (17.10)$$

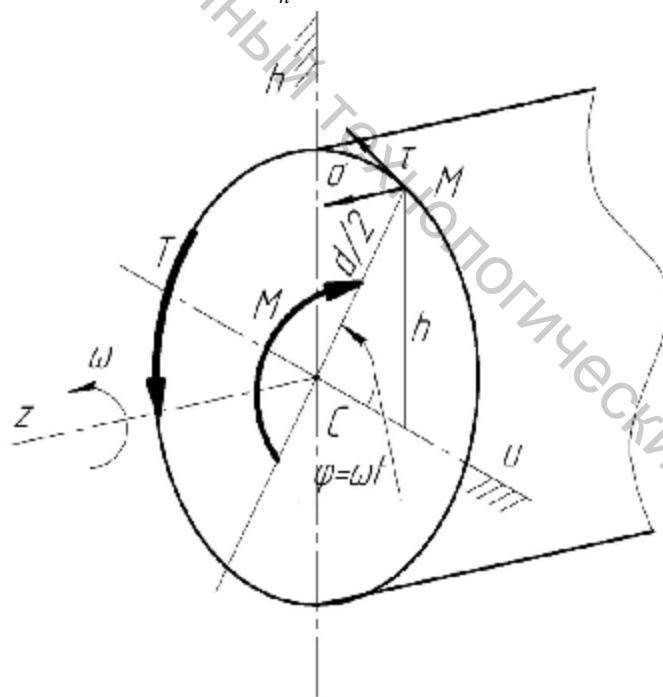


Рисунок 17.3 – Поперечное сечение вращающегося вала с угловой скоростью ω

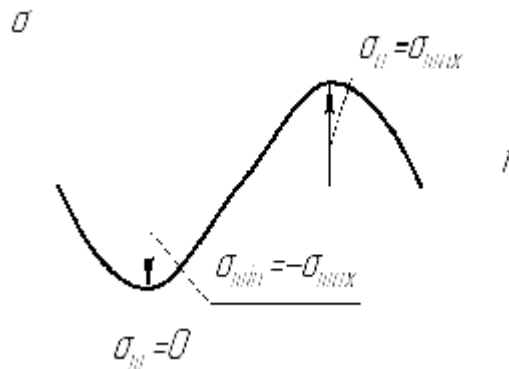


Рисунок 17.4 – Симметричный цикл нормальных напряжений

График напряжений (17.10) изображен на рисунке (17.4) – говорят, что нормальные напряжения в поперечном сечении вала изменяются по симметричному циклу: их амплитуда и средняя величина

$$S_a = S_{max}, \quad S_m = 0, \quad (17.11)$$

минимальное напряжение

$$S_{min} = -S_{max},$$

коэффициент асимметрии цикла (рис. 17.4)

$$r = \frac{S_{min}}{S_{max}} = -1. \quad (17.12)$$

Касательное напряжение в точке M , не изменяясь во время работы, спадает до нуля в неизбежных перерывах в работе и вновь возникает при ее возобновлении – соответствующий график показан на рисунке 17.5: касательные напряжения изменяются по пульсирующему циклу: их амплитуда и средняя величина

$$t_a = t_m = \frac{1}{2} t_{max}, \quad (17.13)$$

минимальное напряжение

$$t_{min} = 0,$$

коэффициент асимметрии цикла

$$r = \frac{t_{min}}{t_{max}} = 0. \quad (17.14)$$

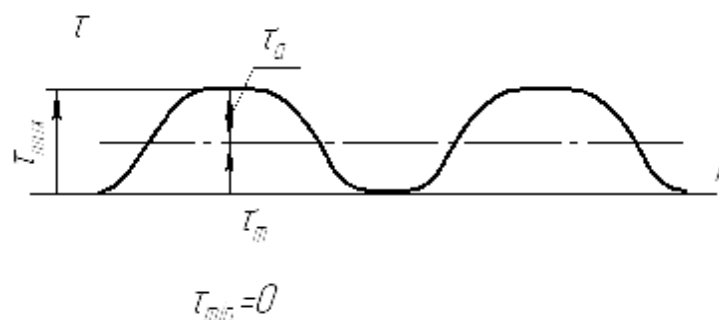


Рисунок 17.5 – Пульсирующий цикл касательных напряжений

17.5 Предел выносливости при симметричном цикле

Соответствующая кривая выносливости, аналогичная кривой на рисунке 13.4, показана на рисунке 17.6. Предел выносливости (базовый) на нем – S_{-1} , в индексе здесь коэффициент (17.12). Это наибольшее напряжение из напряжений S_{max} , при которых материал работает неограниченно долго.

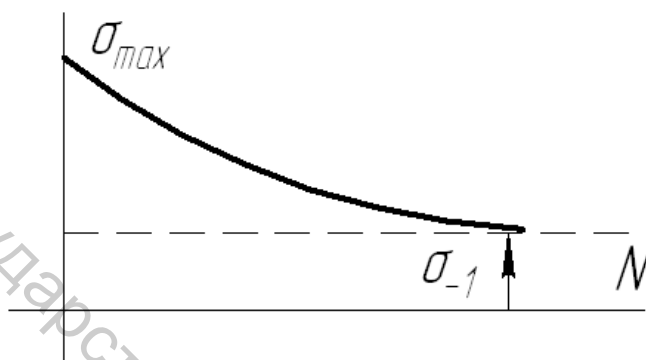


Рисунок 17.6 – Кривая выносливости

Величина предела выносливости детали, геометрически подобной лабораторному образцу, отличается от предела S_{-1} . Размеры детали отличаются от размеров образца; качество поверхности детали отличается от качества поверхности образца; деталь снабжается как правило, концентраторами напряжений, например, галтелями, шпоночными пазами (рис. 17.7), способными вызвать местные всплески напряжений – их концентрацию. Чем больше размеры детали, тем вероятнее дефекты материала – зародыши усталостных трещин в ее объеме. Чем грубее поверхность детали, тем вероятнее возникновение трещин именно на поверхности. Понятно, что трещина "охотнее развивается" там, где напряжения относительно высоки (возле концентраторов напряжений).

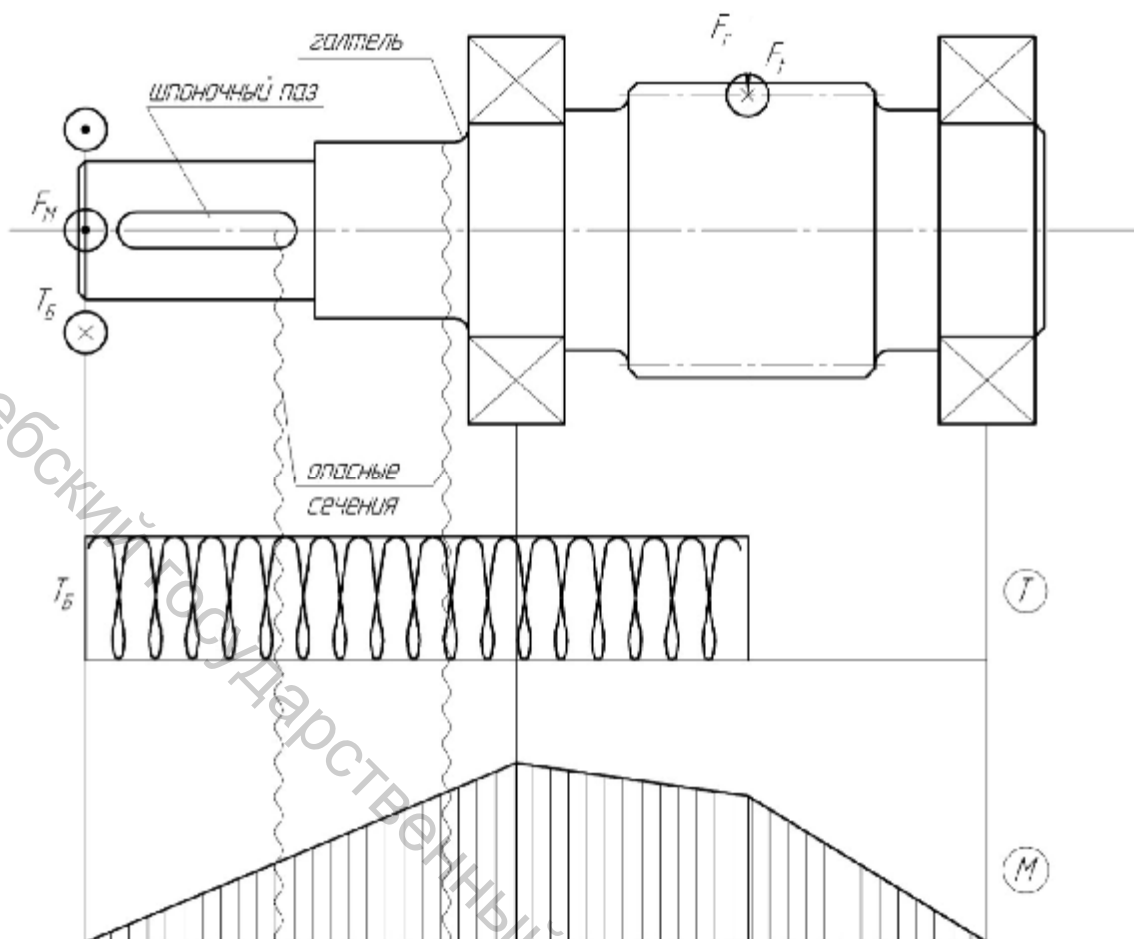


Рисунок 17.7 – Крутящие T и изгибающие $M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$ моменты в поперечных сечениях вала

Полагают в первом приближении, что перечисленные факторы действуют независимо друг от друга. Предел выносливости детали

$$s_{-10} = \frac{s_{-1} e_s b}{K_s},$$

где e_s, b, K_s – масштабный фактор, коэффициент качества поверхности детали и коэффициент концентрации напряжений.

17.6 Запасы выносливости

Соответствующий частный запас в УПНС (рис. 16.2) (при изменении нормальных напряжений по симметричному циклу (рис. 17.4)):

$$s_{-1s} = \frac{s_{-10}}{s_a} = \frac{s_{-1}}{\frac{K_s}{e_s b} s_a}, \quad (17.15)$$

где s_a (17.11) – амплитуда изменяющихся напряжений, e_s, b, K_b – масштабный фактор, коэффициент качества поверхности детали и ко-

коэффициент концентрации напряжений. Формула (17.15) пригодна и в общем случае, когда среднее напряжение $s_m \neq 0$ (рис. 17.8), но тогда, когда отношение

$$\frac{s_m}{s_a} \leq 1.$$

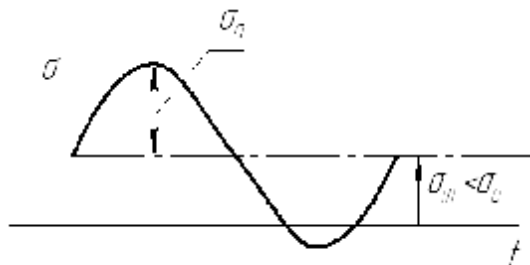


Рисунок 17.8 – Циклически изменяющиеся напряжения в случае

$$\sigma_m / \sigma_a < 1$$

В частности, коэффициент безопасности при учете в УПНС только касательных напряжений, изменяющихся (рис. 17.5) по пульсирующему циклу ($t_m / t_a = 1$):

$$s_{ot} = \frac{t_{-1}}{K_t e_t b}, \quad (17.16)$$

где t_a (17.13) – амплитуда изменяющихся касательных напряжений.

Заметим, что индексы -1 и 0 в обозначениях коэффициентов (17.15) и (17.16) – коэффициенты (17.12) и (17.14).

Общий запас находим по формуле (17.9).

17.7 Запасы в опасных сечениях вала

Запасы выносливости находим во всех (опасных) сечениях, где имеются концентраторы напряжений (рис. 17.7), а также в сечениях, где крутящий и изгибающий моменты относительно велики либо порознь, либо совместно. Опасные сечения могут оказаться круглыми или такими, как на рисунке 14.6. Их моменты сопротивления даются формулами (14.14 – 14.15) и (15.10 – 15.11), нормальные и касательные напряжения в их опасных точках – формулами (16.1).

В дальнейшем находятся (в каждом из опасных сечений) коэффициенты в формулах (17.15-17.16), амплитуды напряжений в опасных точках (17.11) и (17.13) и, наконец, частные и общий запасы (17.15, 17.16, 17.9). Удовлетворяются [5] общим запасом

$$s \geq 1,8.$$

Лекция 18. Подшипники качения

Подшипники служат опорами вала, они воспринимают нагрузки, действующие на вал, и передают их на корпус редуктора, вместе с этим фиксируя вал в определенном положении.

Подшипники различают по виду трения: в подшипниках скольжения (рис. 18.1) опорный участок вала – цапфа (шип) – скользит по поверхности подшипника; в подшипниках качения трение скольжения заменено трением качения (рис. 18.2) – трением шариков или роликов об опорные поверхности колец, наружного, посаженного в корпус редуктора, и внутреннего, насаженного на вал. Тела качения располагаются в “гнездах” сепаратора – свободно плавающего кольца, разделяющего и направляющего шарики (ролики).

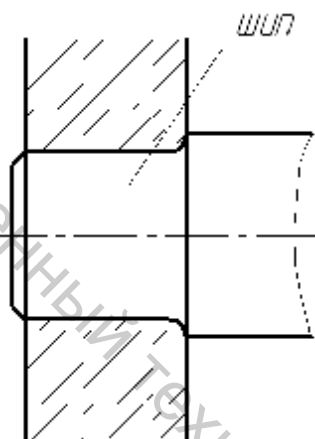


Рисунок 18.1 – Подшипник скольжения

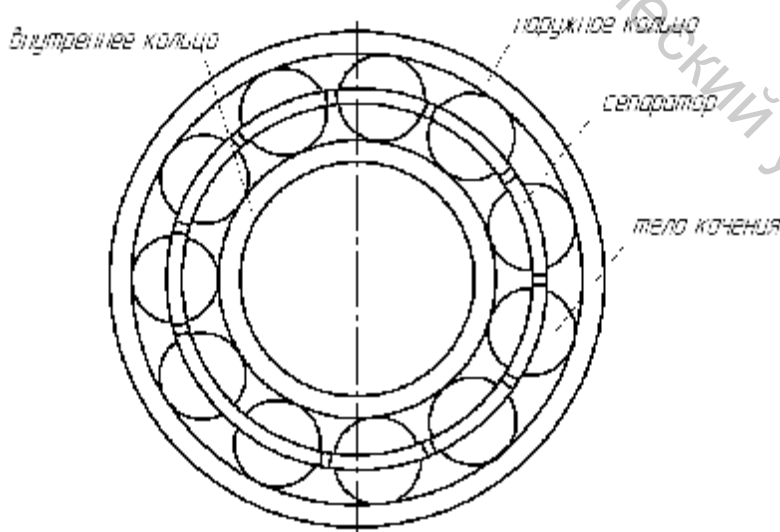


Рисунок 18.2 – Подшипник качения

18.1 Основные типы подшипников качения [5]

Наиболее простые и дешевые – радиальные однорядные шарикоподшипники (рис. 18.3) типа 0, предназначенные для восприятия, в основном, радиальной нагрузки F_r и сравнительно небольших осевых нагрузок:

$$F_a \leq 0,2(C_0 - F_r),$$

где C_0 – допускаемая (статическая) радиальная грузоподъемность (приводится в соответствующем каталоге), в скобках неиспользованная статическая грузоподъемность. Возможны небольшие (до $1/4^\circ$) перекосы вала.

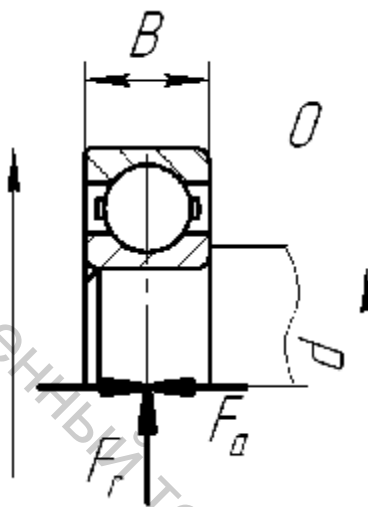


Рисунок 18.3 – Радиальный однорядный шарикоподшипник

Радиальные двухрядные сферические (самоустанавливающиеся) подшипники типа 1 (рис. 18.4) допускают значительный перекося вала (до 3°). Наряду с радиальной нагрузкой допустимы небольшие осевые

$$F_a \leq 0,2(C_0 - F_r). \quad (18.1)$$

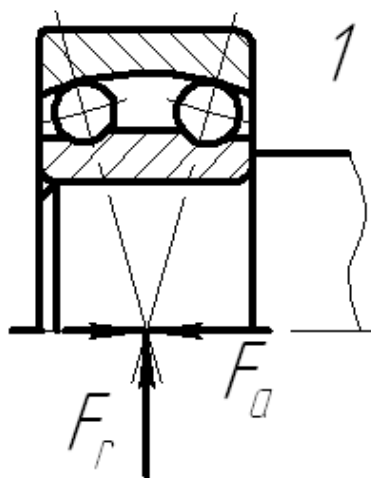


Рисунок 18.4 – Радиальный самоустанавливающийся шарикоподшипник

Такой же перекос допускают радиальные двухрядные сферические (самоустанавливающиеся) роликоподшипники типа 3 (рис. 18.5). Допускаемая радиальная нагрузка на них вдвое больше, чем на подшипники типа 1. Соответственно возрастают и осевые нагрузки (18.1).

Шарики и бочкообразные ролики в подшипниках 1 и 3 (рис. 18.4 и 18.5) катятся по сферическим поверхностям наружных колец. При перекосе вала внутреннее кольцо подшипника типа 1 (3) поворачивается вместе с шариками (роликами) относительно наружного. Шарiki (ролики), перекатившись, остаются на той же сферической поверхности, подшипники самоустанавливаются.

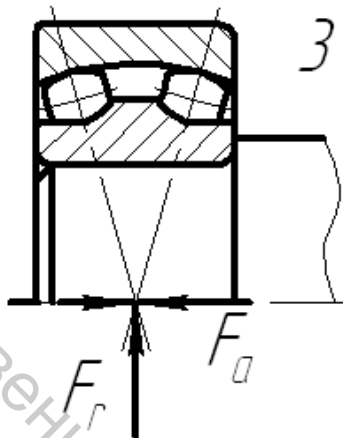


Рисунок 18.5 – Радиальный самоустанавливающийся роликоподшипник

Если требуется восприятие сравнительно больших осевых нагрузок, применяют радиально-упорные однорядные шарикоподшипники типа 6 (рис. 18.6) и роликоподшипники типа 7 (рис. 18.7) – конические. Допускаемая радиальная нагрузка на первые на 40% больше, на вторые – на 90% больше, чем на подшипники типа 0. Осевая (односторонняя!) нагрузка

$$F_a \leq 0,7(C_0 - F_r).$$

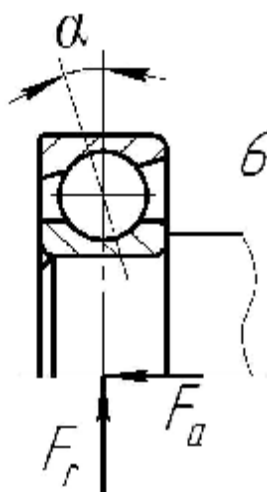


Рисунок 18.6 – Радиально-упорный шарикоподшипник

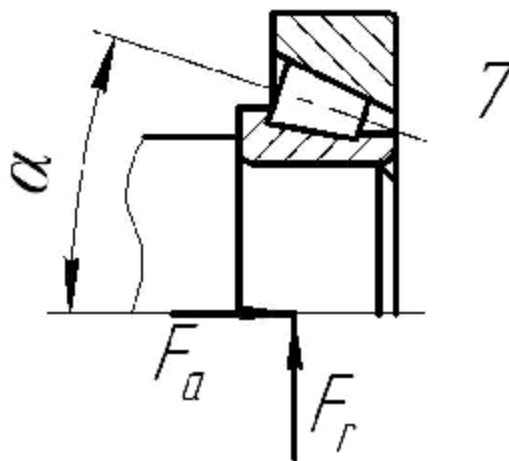


Рисунок 18.7 – Конический подшипник

18.2 Серии диаметров и ширин [4]

Подшипники выпускаются сериями. В пределах одной серии изменяются как внутренние диаметры d (диаметры насадочных отверстий), так и габаритные размеры (рис. 18.3) D и B (по мере изменения диаметра d). Вместе с ростом размеров растет нагрузочная способность подшипников. Если диаметры d одинаковы, но подшипники взяты из различных серий, они различаются габаритными размерами D и B и, опять же, нагрузочной способностью.

Основных серий 4: особо легкая 1, легкая 2, средняя 3, тяжелая 4. Предварительно выбирают подшипники легкой или средней серии, и только после проверки пригодности выбранных подшипников берут, если требуется, подшипники соответственно средней или тяжелой серий.

18.3 Точность подшипников качения [4]

Наиболее дешевы подшипники, относящиеся к нормальному классу точности 0. Подшипники, относящиеся к повышенному 6, высокому 5, особо высокому 4 и сверхвысокому 2, стоят дорого; относящиеся к классу 5 стоят вдвое дороже, относящиеся к сверхвысокому классу 2 – в десять раз дороже, чем подшипники нормального класса 0.

18.4 Цифровые обозначения подшипников [6]

Диаметр насадочного отверстия подшипника (внутренний диаметр d) получаем умножением числа, составленного двумя первыми справа цифрами, на 5. Третья цифра справа дает номер серии диаметров и ширин (п. 18.2). Четвертая цифра указывает тип подшипника (п. 18.1). Пятая цифра, если она есть, – на конструктивные особенности подшипника. Пятая цифра в цифровом обозначении подшипников типа 6 (рис.

18.6) отвечает углу контакта α : при $\alpha = 12^\circ$ пятая цифра 3, при $\alpha = 26^\circ$ – 4, при $\alpha = 36^\circ$ – 6.

Если у подшипников типа 0 (рис. 18.3) конструктивных особенностей нет, в их цифровом обозначении три цифры (0, отвечающий типу, не ставится).

18.5 Выбор типа подшипника [6]

Если осевая нагрузка, действующая на подшипник, небольшая – не превышающая 30% радиальной нагрузки ($F_a \leq 0,3F_r$), и не требуется самоустановка, следует ориентироваться на подшипники типа 0 (рис. 18.3). Если же требуется самоустановка, используют подшипники типов 1 и 3 (рис. 18.4 и 18.5), причем шарикоподшипники 1 предпочтительнее, так как подшипники 3 дороже первых примерно в 3 раза.

Если на подшипники действуют радиальная и осевая нагрузка, превышающая 30% радиальной, применяют радиально-упорные подшипники типов 6 и 7 (рис. 18.6 и 18.7) – с большим углом контакта α при больших отношениях F_a/F_r . При $F_a/F_r = 0,3 \dots 0,7$ берется подшипник 6 с углом $\alpha = 12^\circ$, при $F_a/F_r = 0,7 \dots 1$ – подшипник 6 с углом $\alpha = 26^\circ$, при $F_a/F_r > 1$ – подшипник 6 с углом $\alpha = 36^\circ$, при $F_a/F_r \geq 1,5$ лучше взять конический подшипник 7.

18.6 Проверка подшипника на статическую грузоподъемность [4]

Сравнительно тихоходные тяжело нагруженные подшипники, делающие не более 1 об/мин, приходят в негодность из-за остаточных деформаций: лунок и вмятин на беговых дорожках. Их проверяют по допускаемой статической грузоподъемности C_0 , указанной в каталоге. Грузоподъемность C_0 – такая статическая радиальная нагрузка, при которой суммарная остаточная деформация колец и тел качения в наиболее нагруженной точке подшипника равна 0,0001 диаметра тела качения.

Проверка производится по условию:

$$P_{\text{экр}} \leq C_0,$$

где эквивалентная статическая нагрузка

$$P_{\text{экр}} = X_o F_r + Y_o F_a \geq F_r,$$

X_o и Y_o – коэффициенты радиальной F_r и осевой F_a нагрузок.

18.7 Проверка подшипников на долговечность [4]

Сравнительно быстроходные подшипники, делающие более 1 об/мин, разрушаются при длительной работе в нормальных условиях из-за усталостного выкрашивания колец и тел качения. Номинальная (каталожная) динамическая грузоподъемность C – постоянная радиаль-

ная нагрузка, при которой 90% подшипников, взятых для испытаний, выдерживают 1 миллион оборотов без появления признаков усталостного выкрашивания.

Долговечность подшипника в млн. об.

$$L = \left(\frac{C}{P_{\text{экв}}} \right)^{\delta}, \quad (18.2)$$

где p – показатель степени, равный 3 для шарикоподшипников и 3,33 для роликоподшипников, эквивалентная нагрузка

$$P_{\text{экв}} = (XF_r + YF_a)K_bK_m, \quad (18.3)$$

X и Y – коэффициенты радиальной F_r и осевой F_a нагрузок на подшипник, K_b – коэффициент безопасности, зависящий от характера нагрузки, K_m – температурный коэффициент, равный 1, если температура подшипника не превышает 100°C. Если осевая нагрузка достаточно мала:

$$F_a/F_r \leq e,$$

где e – параметр осевого нагружения.

Коэффициенты в формуле (18.3)

$$X = 1, Y = 0.$$

В частности, эквивалентная нагрузка (18.3) в формуле (18.2) при радиальной нагрузке на радиальные шарикоподшипники типа 0 (рис.18.3)

$$P_{\text{экв}} = F_r K_b K_m.$$

Долговечность в часах

$$L_h = \frac{L \cdot 10^6}{n \cdot 60} \div a \tilde{n},$$

n – частота вращения вала. Удовлетворяются долговечностью в 20000 часов, или в 10000 часов, если предусмотреть смену подшипников по истечении этих десяти тысяч часов.

18.8 Схемы установки подшипников

На рисунке 18.8 изображена схема установки с фиксирующей и плавающей опорами. Первая воспринимает радиальную и осевую нагрузку, вторая – только радиальную. В первой из них внутреннее кольцо подшипника зажато между упорным буртиком вала 2 и шлицевой гайкой 1, наружное кольцо – между упорным буртиком в корпусе 3 и торцом крышки 4; во второй внутреннее кольцо подшипника зажато между буртиком вала и пружинным кольцом 5.

Желательна равномерная нагрузка опор. Поэтому плавающей делают опору, нагруженную большей радиальной нагрузкой.

При температурных колебаниях плавающий подшипник перемещается на величину удлинения (укорочения) вала. Перемещение его может случиться под нагрузкой – поверхность под подшипник изнашивается. Чтобы снизить возможный износ плавающей (при наличии только радиальных нагрузок), делают опору, нагруженную меньшей из них.

По схеме (на рисунке 18.8) устанавливают (в отдельных корпусах) подшипники типов 1, 3 приводных валов ленточных транспортеров и цепных конвейеров.

Подшипники относительно коротких валов редукторов устанавливают “в распор” (рис. 18.9), предусматривается осевой зазор $a = 0,2 \dots 0,5$ мм, предохраняющий вал при нагреве от защемления в опорах.

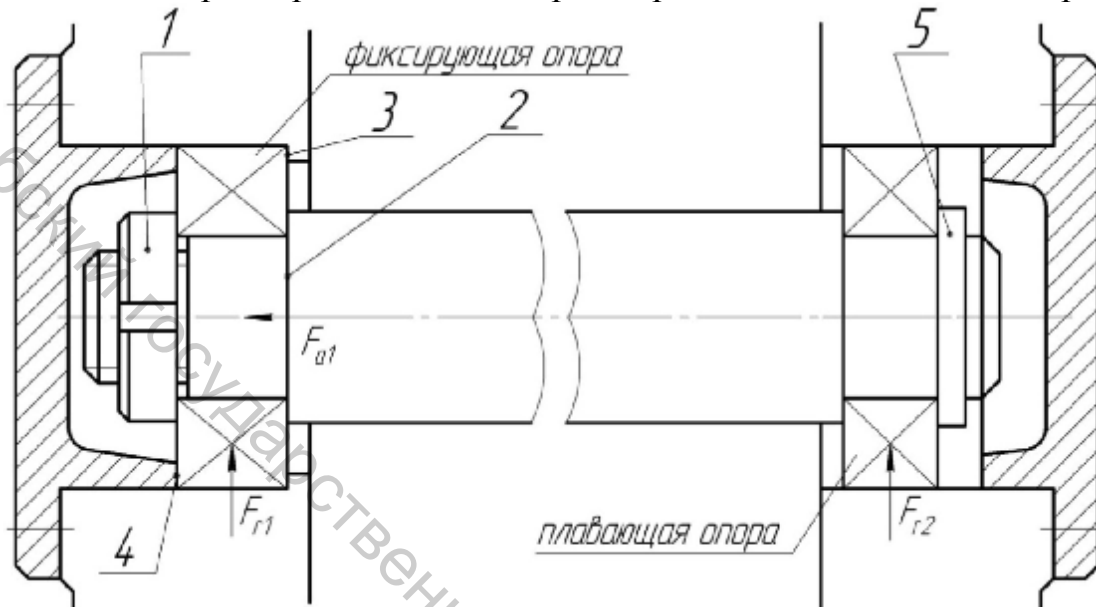


Рисунок 18.8 – Установка подшипников в фиксирующей и плавающей опорах: 1 – шлицевая гайка со стопорной шайбой, 2 – упорный буртик на валу, 3 – упорный буртик в корпусе, 4 – торец крышки, 5 – кольцо пружинное упорное

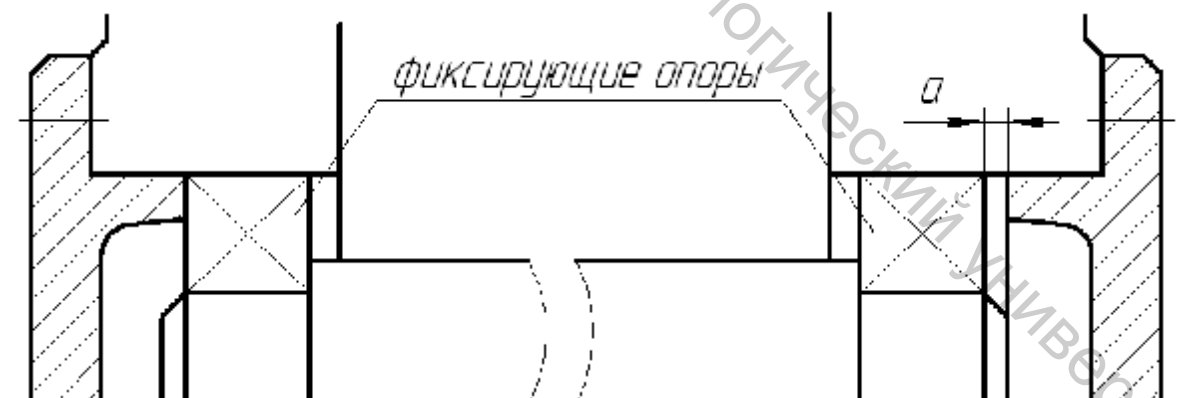


Рисунок 18.9 – Установка подшипников в “распор”

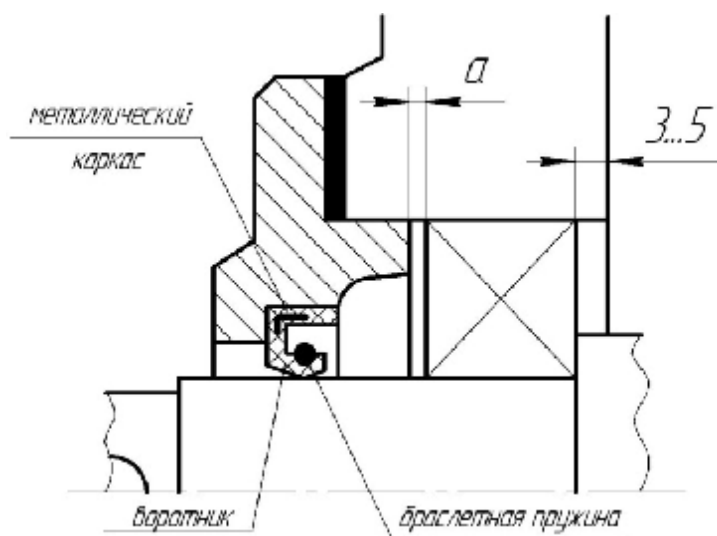


Рисунок 18.10 – Манжетное уплотнение

Кольца подшипников должны вращаться легко, свободно. Вместе с этим большие зазоры в подшипниках недопустимы. Чем больше радиальный зазор, тем хуже условия работы тел качения. Требуются оптимальные зазоры. Их создают, регулируя подшипники. Только в случае, показанном на рисунке 18.8, подшипник в фиксирующей опоре не регулируют. Необходимый зазор создан при изготовлении подшипника.

Если же подшипники установлены “в распор”, их регулируют, перемещая их наружные кольца – подкладывая (рис. 18.10) под фланцы привертных крышек подшипников наборы тонких металлических прокладок (толщинами 0,1; 0,2; 0,4; 0,8 мм). Дополнительно регулируется осевое положение вала.

18.9 Смазка подшипников [6]

Подшипники редуктора смазываются тем же маслом, что и зубчатые колеса. При их вращении масло разбрызгивается, попадая на стенки корпуса, стекая с них и попадая в подшипники. Для удержания масла подшипники “вдвигают” в отверстия корпуса на 3-5 мм.

Смазка подшипников предполагает надежное уплотнение подшипниковых узлов – защиту их от вытекания масла наружу и попадания пыли и грязи. Наиболее распространены манжетные уплотнения из масло- и бензостойкой резины с внутренним металлическим каркасом. Уплотняющий элемент манжеты – эластичный воротник, прижимаемый к валу браслетной пружиной. Манжета устанавливается так, чтобы воротник с пружиной был обращен в сторону подшипника. Давление масла способствует прижатию воротника к поверхности вала.

Лекция 19. Ременные передачи [4]

Ременная передача (рис. 19.1), состоящая из двух шкивов и ремня (ремней), передает движение посредством сил трения, действующих между ремнем (ремнями) и шкивами.

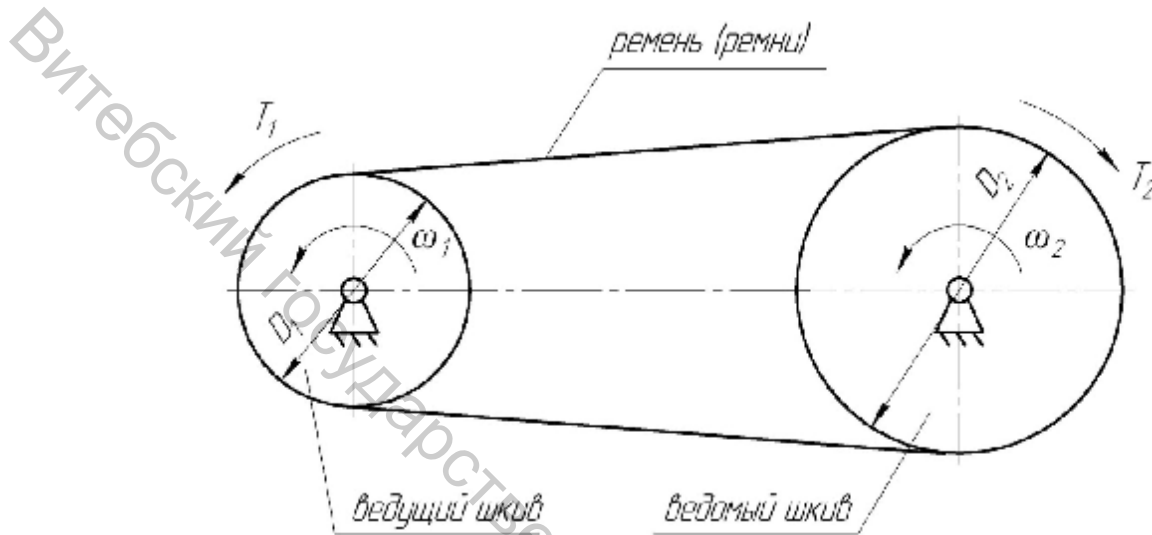


Рисунок 19.1 – Ременная передача

Силы трения появляются при “попытке” ремня (ремней), натянутого и прижатого к шкивам, скользить по ним. Предварительное натяжение ремня (ремней) производится натяжным устройством.

Ременные передачи, в отличие от зубчатых передач, работают бесшумно, на высоких скоростях; способны передавать движения на сравнительно большие (до 15 м) расстояния; при перегрузках ремень (ремни) проскальзывает по шкивам – передача не повреждается.

Вместе с этим, размеры шкивов намного превышают размеры зубчатых колес; предварительное натяжение ремня (ремней) намного (в 2-3 раза) увеличивает нагрузку на подшипники; передаточное число оказывается зависимым от нагрузки (не постоянно).

Наиболее распространена клиноременная передача – обычно с несколькими клиновыми ремнями. На рисунке 19.2 показаны фрагменты ремней, расположенные за шкивом передачи. На рисунке 19.3 показана плоскоременная передача – с одним плоским ремнем.

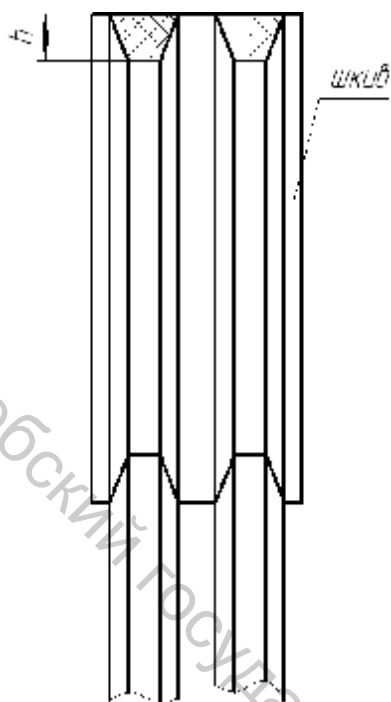


Рисунок 19.2 – Клиновые ремни

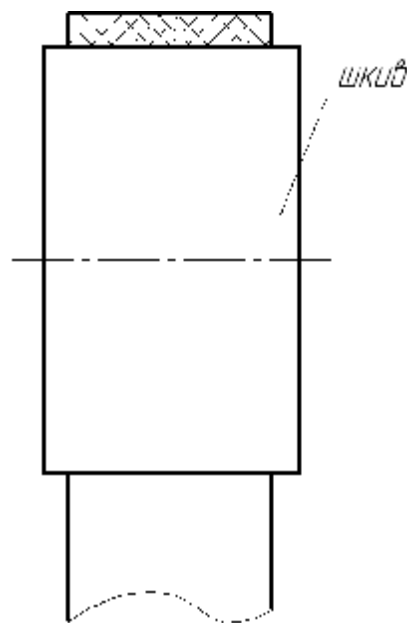


Рисунок 19.3 – Плоский ремень

19.1 Кинематика ременной передачи

Если считать, что ремень не проскальзывает по шкивам, скорость его (в первом приближении) равна окружным скоростям шкивов:

$$V_1 = w_1 \frac{D_1}{2} = V = w_2 \frac{D_2}{2} = V_2, \quad (19.1)$$

передаточное число

$$u = \frac{w_1}{w_2} = \frac{D_2}{D_1}. \quad (19.2)$$

Но скольжение ремня по шкивам неизбежно.

Действительно, ведущая ветвь ремня (рис. 19.4) натянута сильнее ведомой. По мере огибания ведущего шкива натяжение ремня ослабевает, упругое удлинение ремня становится меньше – ремень “сajeживается”, скользя по ремню. Это скольжение называется упругим. Из-за него ремень отстает от ведущего шкива, но обгоняет ведомый; скорости (19.1) не равны:

$$V_1 = w_1 \frac{D_1}{2} > V > w_2 \frac{D_2}{2} = V_2,$$

передаточное число (19.2)

$$u = \frac{w_1}{w_2} > \frac{D_2}{D_1},$$

$$u = \frac{D_2}{D_1(1-e)}, \quad (19.3)$$

где [5] $\varepsilon \approx 0,001 \dots 0,02$ – коэффициент упругого скольжения. При этих значениях коэффициента ε число (19.3) практически не отличается от числа (19.2).

19.2 Геометрия ременной передачи

Синус угла наклона ведущей ветви ремня к горизонту находится из рассмотрения $\triangle O_1 O_2 C$ (рис. 19.4):

$$\sin \frac{b}{2} = \frac{\hat{I}_2 \tilde{N}}{\hat{I}_1 \hat{I}_2} = \frac{D_2 - D_1}{2a}$$

или (при обычно небольших углах β)

$$b \approx \frac{D_2 - D_1}{a} \approx D_1 \frac{u - 1}{a},$$

что дает угол обхвата ведущего шкива

$$\alpha^\circ = 180^\circ - b \approx 180^\circ - \frac{D_1}{a}(u - 1) \cdot 57^\circ, \quad (19.4)$$

где a – межосевое расстояние, u – передаточное число (19.2).

Длина ремня

$$L = 2a \cos \frac{b}{2} + (p - b) \frac{D_1}{2} + (p + b) \frac{D_2}{2},$$

где

$$\cos \frac{b}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{b}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{b}{2} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{b}{2} \right)^2;$$

приблизненно

$$L \approx 2a + \frac{p}{2}(D_1 + D_2) + \frac{(D_2 - D_1)^2}{4a}. \quad (19.5)$$

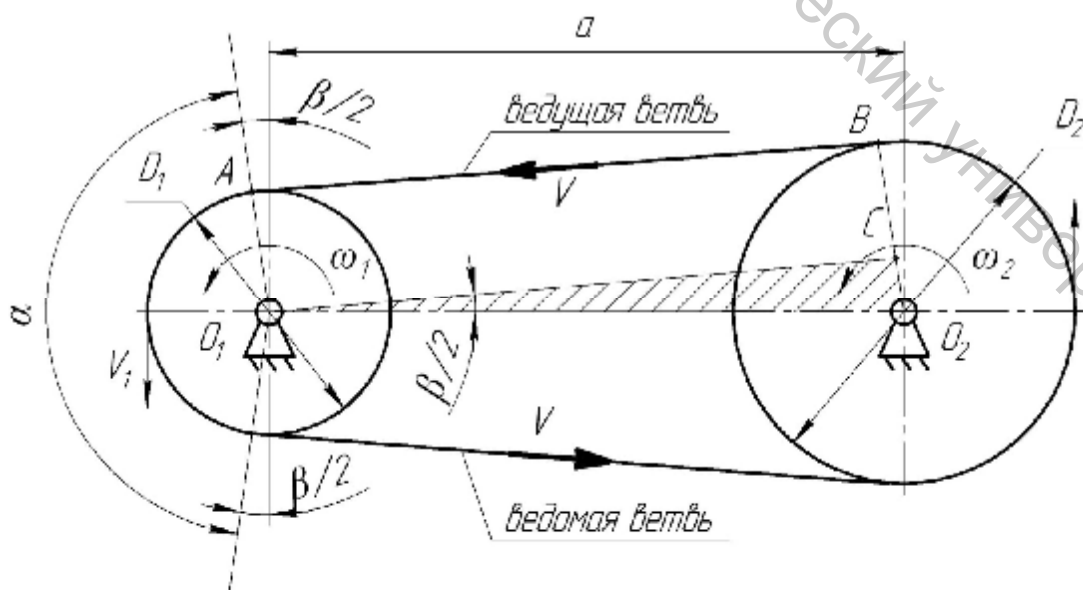


Рисунок 19.4 – К определению угла обхвата и длины ремня

19.3 Силы в передаче

На рисунке 19.5 показан ведущий шкив неработающей передачи (ветви ремня натянуты силами предварительного натяжения S_0) и работающей передачи (ведущая ветвь натянута сильнее ведомой: $S_1 > S_2$). Понятно, что натяжение ведущей ветви $S_1 > S_0$, или

$$S_1 = S_0 + \Delta S; \quad (19.6)$$

ведущая ветвь получает дополнительное удлинение, что компенсируется таким же по величине дополнительным укорочением ведомой ветви (так как длина ремня задана, она одна и та же в неработающей и работающей передаче):

$$S_2 = S_0 - \Delta S. \quad (19.7)$$

Сумма натяжений (19.6-19.7) ветвей ремня

$$S_1 + S_2 = 2S_0. \quad (19.8)$$

Ведущий шкив работающей передачи вращается равномерно – сумма моментов сил, действующих на него, равна 0:

$$S_1 \frac{D_1}{2} - S_2 \frac{D_2}{2} - T_1 = 0,$$

разность натяжений

$$S_1 - S_2 = F_t \quad (19.9)$$

равна окружной силе, или полезной нагрузке:

$$F_t = \frac{2T_1}{D_1}.$$

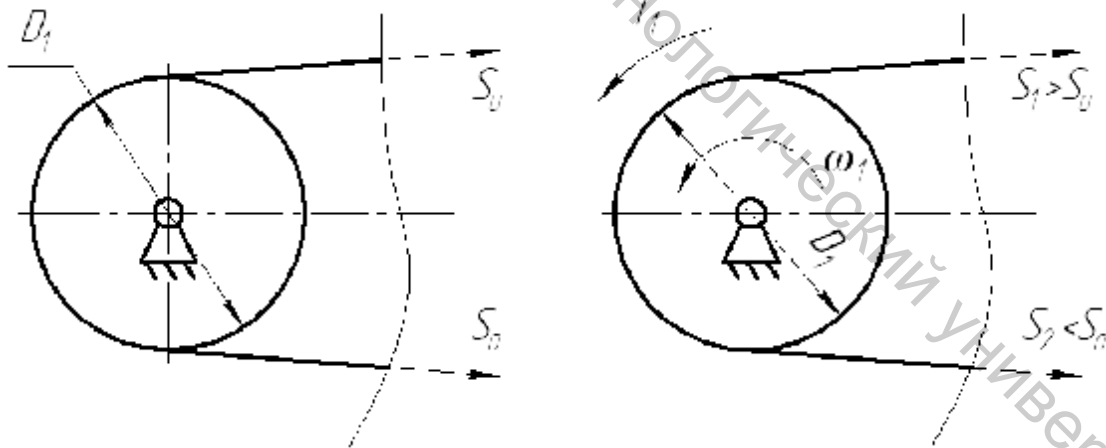


Рисунок 19.5 – Неработающая и работающая передачи: S_0 – силы предварительного натяжения, S_1 и S_2 – натяжения ветвей ремня

19.4 Формула Эйлера

Уравнения (19.8) и (19.9) требуется дополнить связью между натяжениями S_1 и S_2 . Рассмотрим (с целью найти эту связь) равновесие

бесконечно короткого фрагмента ремня на ведущем шкиве (рис. 19.6). Уравнения равновесия (в проекциях на касательную t и нормаль n к поверхности шкива):

$$\begin{aligned} -S \cos \frac{dj}{2} + (S + dS) \cos \frac{dj}{2} - fdN &= 0, \\ dN - S \sin \frac{dj}{2} - (S + dS) \sin \frac{dj}{2} &= 0. \end{aligned} \quad (19.10)$$

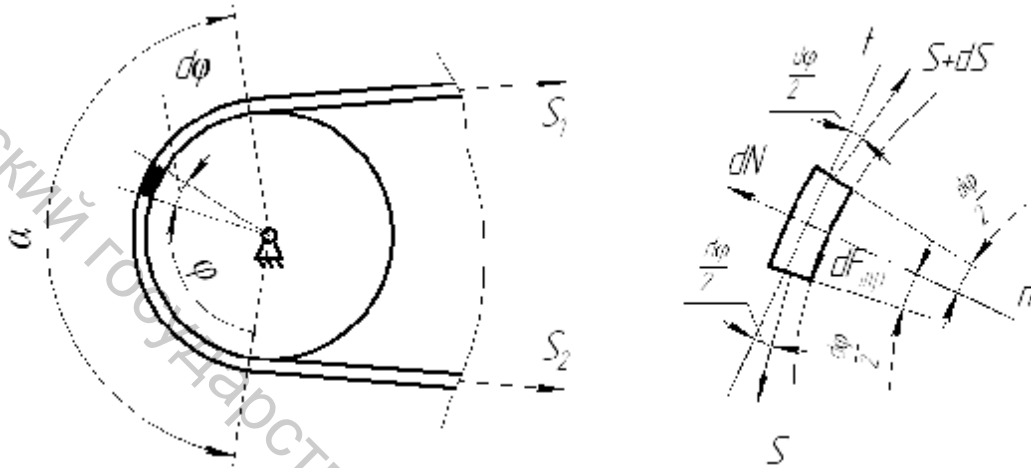


Рисунок 19.6 – К выводу формулы Эйлера

В уравнения (19.10) входят натяжения в сечениях, ограничивающих фрагмент ремня, нормальная реакция dN поверхности шкива и сила трения, определяемая законом Амонтона:

$$dF_{\partial \delta} = fdN,$$

где f – коэффициент трения.

Пределы

$$\cos \frac{dj}{2} = \lim_{\Delta j \rightarrow 0} \cos \frac{\Delta j}{2} = \cos 0 = 1,$$

$$\frac{\sin \frac{dj}{2}}{\frac{dj}{2}} = \lim_{\Delta j \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta j}{2}}{\frac{\Delta j}{2}} = 1,$$

что позволяет заменить $\sin \frac{dj}{2}$ на $\frac{dj}{2}$; бесконечно малую $dS d\varphi$ второго порядка отбрасываем. Уравнения (19.10) переписываются:

$$dS = fdN,$$

$$dN = S dj.$$

В итоге получается одно дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dS}{S} = f dj.$$

Его интегрирование дает искомую связь:

$$\int_{S_2}^{S_1} \frac{dS}{S} = \int_0^a f dj, \quad \ln S|_{S_2}^{S_1} = a f,$$

$$S_1 = S_2 e^{af}. \quad (19.11)$$

Решение системы трех уравнений (19.8, 19.9 и 19.11):

$$S_2 = F_t \frac{1}{e^{fa} - 1},$$

$$S_1 = F_t \frac{e^{fa}}{e^{fa} - 1},$$

$$S_0 = \frac{1}{2} F_t \frac{e^{fa} + 1}{e^{fa} - 1}. \quad (19.12)$$

19.5 Фактор трения

Назовем произведение fa фактором трения и найдем, что при $fa \rightarrow 0$ все силы (19.12) становятся бесконечно большими; передача полезной нагрузки становится невозможной. Передача работает тем лучше, чем больше фактор трения fa . Увеличить его можно, используя натяжной ролик (рис. 19.7) или повышая трение в передаче.

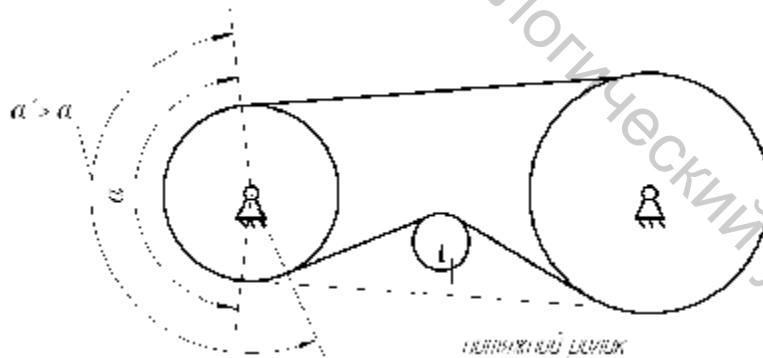


Рисунок 19.7 – Передача с натяжным роликом

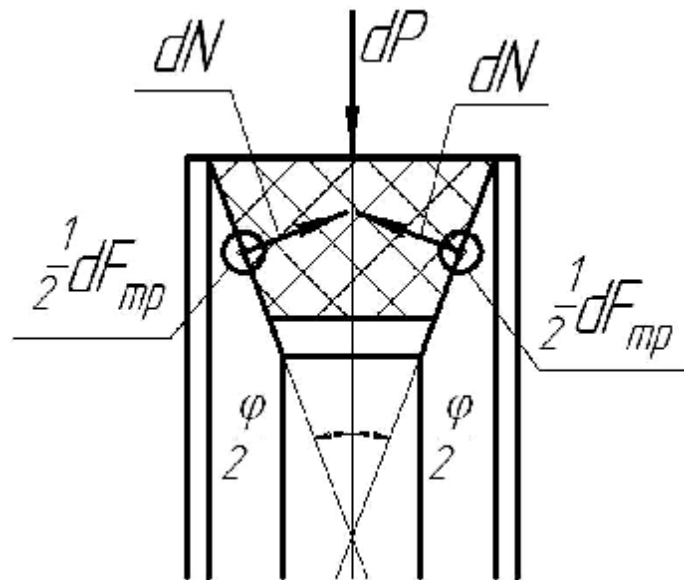


Рисунок 19.8 – Силы трения в клиноременной передаче

На рисунке 19.8 показан фрагмент клинового ремня в канавке (ручье) шкива. Силы трения действуют на конических поверхностях ручья. Нормальные реакции этих поверхностей, возникающие под давлением на фрагмент (см. силу dP), находятся из уравнения равновесия фрагмента:

$$2dN \sin \frac{j}{2} = dP :$$

$$dN = \frac{dP}{2 \sin \frac{j}{2}}.$$

Суммарная сила трения

$$dF_{\text{тр}} = 2fdN = \left(\frac{f}{\sin \frac{j}{2}} \right) dP = f'dP,$$

$$f' = \frac{f}{\sin \frac{j}{2}} - \text{приведенный коэффициент трения.}$$

В плоскоременной передаче (рис. 19.9)

$$dF_{\text{тр}} = fdP.$$

Для стандартных клиновых ремней $\varphi = 40^\circ$, $f'/f \approx 3$. Силы трения в клиноременной передаче примерно в 3 раза больше сил трения в плоскоременной передаче.

Соответственно, угол обхвата (19.4) в клиноременной передаче может быть снижен до 120° (и даже до 90°) против $\alpha \geq 150^\circ$ в плоскоременной передаче; межосевое расстояние может быть снижено:

$$0,55(D_1 + D_2) + h \leq a \leq 2(D_1 + D_2), \quad (19.13)$$

где h – толщина ремня (рис. 19.2), против

$$a \geq 2(D_1 + D_2);$$

передаточное число, наоборот, может быть увеличено до 7 (и даже до 10) – против $u \leq 5$ плоскоременной передачи.

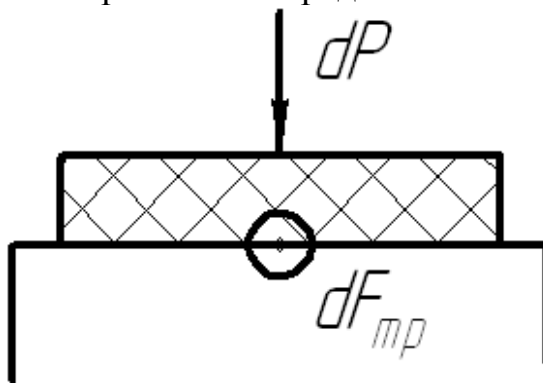


Рисунок 19.9 – Сила трения в плоскоременной передаче

Лекция 20. Напряжения в ремне

20.1 Напряжения от центробежных сил

Всякий бесконечно короткий фрагмент (элемент) ремня, огибая любой из шкивов, движется по окружности – испытывая воздействие центробежных сил инерции $dF_{\text{и}}$ (рис. 20.1). Дополнительное натяжение ремня находится из уравнения проекций на нормаль к поверхности шкива:

$$-dF_{\text{е}} + 2S_{\text{в}} \sin \frac{dj}{2} = 0, \quad (20.1)$$

где сила инерции

$$dF_{\text{е}} = \left(\frac{g}{g} A \frac{D}{2} dj \right) \frac{V^2}{D/2},$$

g / g – плотность материала (γ – удельный вес, g – ускорение свободного падения), A – площадь поперечного сечения, $0,5Dd\varphi$ – длина элемента ремня, в скобках масса элемента, $V^2 / (D/2)$ – центростремительное ускорение; синус бесконечно малого угла $dj / 2$ может быть заменен углом $dj / 2$ (см. п. 19.5).

Уравнение (20.1) переписывается:

$$\left(\frac{g}{g} A dj \right) V^2 = S_{\text{в}} dj ;$$

дополнительное натяжение ремня

$$S_v = \frac{g}{g} AV^2, \quad (20.2)$$

напряжения в ремне

$$s_v = \frac{S_v}{A} = \frac{g}{g} V^2. \quad (20.3)$$

Дополнительное натяжение (20.2) ослабляет контакт ремня со шкивами, уменьшая силы трения и снижая нагрузочную способность передачи. Однако, снижение это заметно только при высоких скоростях ремня ($V > 25$ м/с).

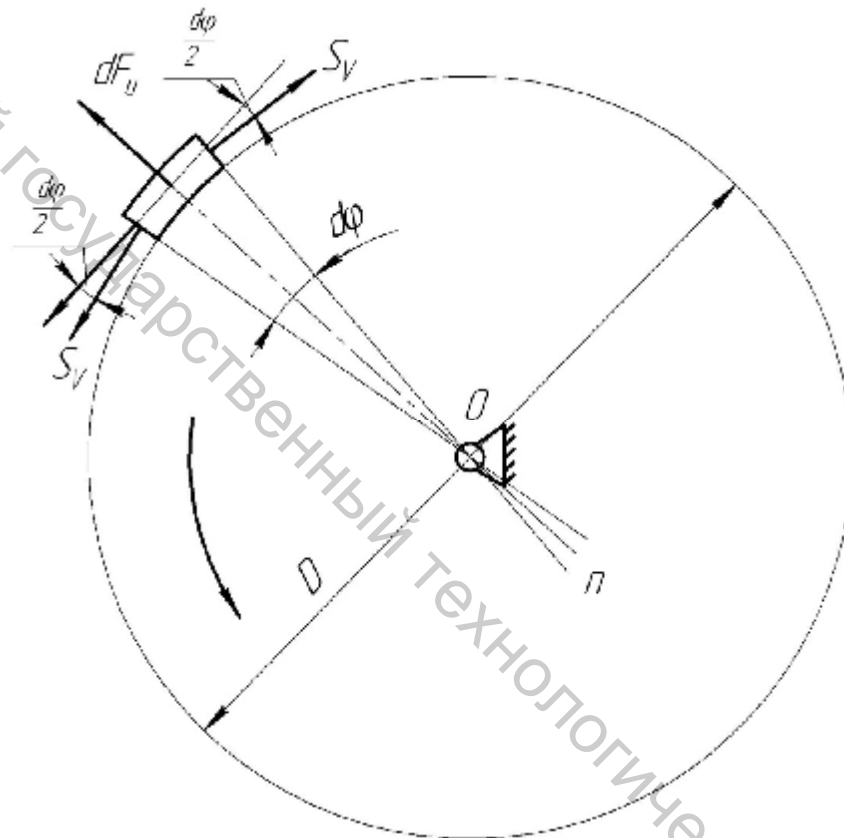


Рисунок 20.1 – Центробежная сила и дополнительное натяжение

20.2 Напряжения при изгибе ремня

Ремень, огибая любой из шкивов, искривляется – изгибается. На рисунке 20.2 показан бесконечно короткий фрагмент (элемент) ремня. Наибольшие удлинения получает наружный слой ремня:

$$e_{\max} = \frac{(D/2 + h)dj - (D/2 + h/2)dj}{(D/2 + h/2)dj} = \frac{h/2}{(D/2 + h/2)} \approx \frac{h}{D}$$

(так как толщина ремня h много меньше диаметра шкива). Наибольшие напряжения при изгибе ремня (по закону Гука):

$$s_e = E e_{\max} = E \frac{h}{D}. \quad (20.4)$$

Напряжения (20.4) не играют никакой полезной роли, более того, они, как увидим далее, – главная причина разрушения ремня от усталости.

Напряжения (20.4) можно снизить, если увеличить отношение D/h . Его рекомендуемые значения для плоских ремней:

$$40 \geq \frac{D_1}{h} \geq 30,$$

для клиновых ремней:

$$20 \geq \frac{D_1}{h} \geq 15.$$

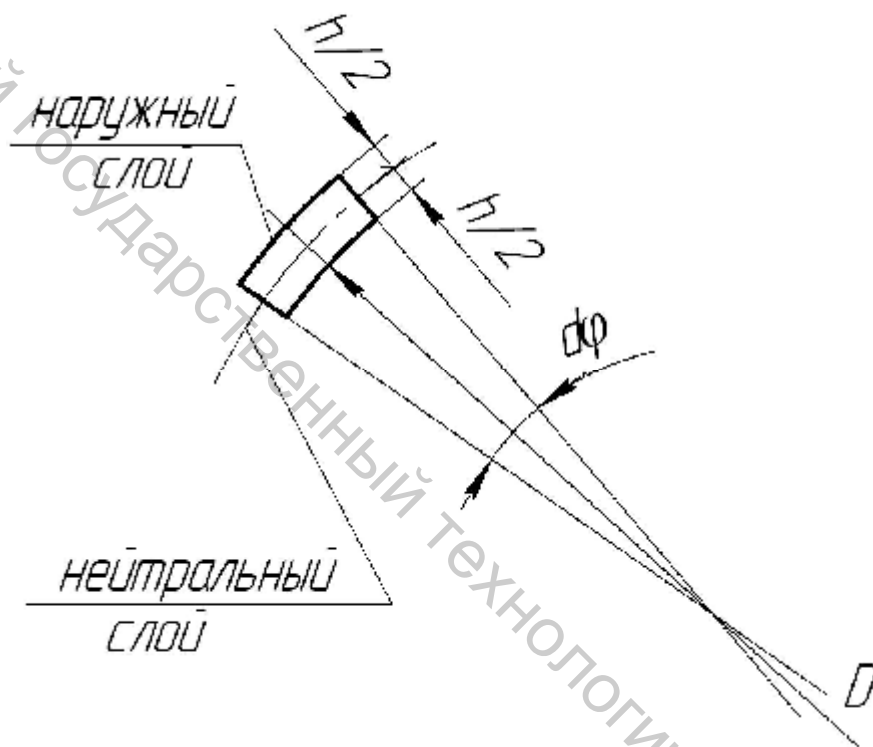


Рисунок 20.2 – Элемент ремня при его изгибе на шкиве

20.3 Напряжения в ремне

Разность натяжений ветвей ремня (19.6, 19.7) равна, с другой стороны, полезной нагрузке (19.9): дополнительное усилие к предварительному натяжению ремня

$$\Delta S = F_t / 2,$$

т.е. натяжения (19.6 – 19.7) ветвей ремня

$$\begin{aligned} S_1 &= S_0 + \frac{1}{2} F_t, \\ S_2 &= S_0 - \frac{1}{2} F_t; \end{aligned} \quad (20.5)$$

соответствующие напряжения

$$s_1 = \frac{S_0}{A} + \frac{1}{2} \frac{F_t}{A} = s_0 + \frac{1}{2} s_F, \quad (20.6)$$

$$s_2 = s_0 - \frac{1}{2} s_F, \quad (20.7)$$

$$s_0 = S_0 / A \quad (20.8)$$

где $s_0 = S_0 / A$ – напряжение предварительного натяжения, $s_F = F_t / A$ – полезное напряжение.

Наибольшие напряжения получим, если к напряжениям (20.6) добавим напряжения (20.4) (напряжения (20.3) считаем пренебрежимо малыми):

$$s_{\max} = s_0 + \frac{s_F}{2} + s_\epsilon; \quad (20.9)$$

наименьшие напряжения

$$s_{\min} = s_0 - \frac{s_F}{2} \quad (20.10)$$

равны напряжениям (20.7).

На рисунке 20.3 показан цикл напряжений в поперечном сечении ремня. Напряжения $\sigma_{\text{и}}$, возникая в момент набегания ремня на шкив и исчезая в момент сбегания ремня со шкива, делают напряжения в ремне изменяющимися циклически. Вместе с этим возникает проблема долговечности ремня. Выдерживая до усталостного разрушения определенное число циклов-пробегов, ремень тем долговечнее, чем меньше число его пробегов в единицу времени:

$$n = \frac{V}{L}, \quad (20.11)$$

где L – длина ремня (19.5). Плоские ремни допускают $[v] = 5 \text{ с}^{-1}$, клиновые – $[v] = 20 \text{ с}^{-1}$.

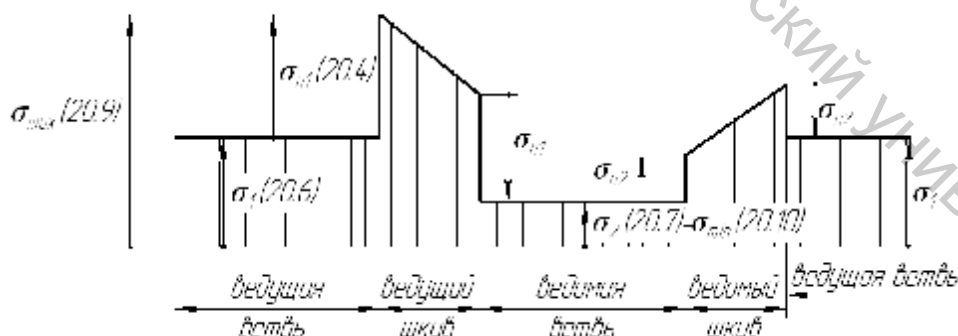


Рисунок 20.3 – Циклически изменяющиеся напряжения в ремне:
напряжения при изгибе на ведущем шкиве (20.4),
напряжения при изгибе на ведомом шкиве:

$$s_{\epsilon 2} = \frac{Eh}{D_2} < s_{\epsilon 1}$$

20.4 Расчет клиноременной передачи

Стандартное сечение ремня и стандартный диаметр ведущего шкива D_1 (рис. 19.1 – 19.2) выбирается в зависимости от момента полезного сопротивления T_2 на ведомом шкиве. Его диаметр (предварительное значение) получается умножением диаметра D_1 на передаточное число (19.2):

$$D'_2 = D_1 u$$

и, после этого, принимается по стандарту. Межосевое расстояние дается рекомендацией (19.13), длина ремня – формулой (19.5).

Скорость ремня (19.1)

$$V = w_1 \frac{D_1}{2};$$

число пробегов (20.11) не должно превышать допускаемое $[v] = 20\text{с}^{-1}$.

Полезная нагрузка (19.9)

$$F_t = \frac{2T_1}{D_1},$$

полезное напряжение

$$s_F = \frac{F_t}{A},$$

где площадь сечения, возможно, нескольких ремней $A = A_0 z$ (A_0 – площадь сечения одного ремня).

Составляя условие тяговой способности

$$s_F \leq [s_F],$$

или

$$\frac{F_t}{A_0 z} \leq [s_F], \quad (20.12)$$

найдем требуемое число ремней:

$$z \geq \frac{F_t}{[s_F] A_0}, \quad (20.13)$$

где $[s_F]$ – допускаемое полезное напряжение. Заметим, число (20.13) не должно превышать 6; в противном случае ремни окажутся нагруженными неравномерно – одни будут перегружены, другие – недогружены.

20.5 Допускаемое полезное напряжение

Допускаемое полезное напряжение $[s_F]_0$ в стандартных условиях (угол обхвата (19.4) равен 180° , скорость ремня (19.1) равна 10 м/с, рабочая нагрузка постоянная) определяется напряжением (20.8) предварительного натяжения σ_0 (рекомендуется $\sigma_0 = 1,2\text{МПа}$, при больших напряжениях снижается долговечность ремня), сечением ремня и диаметром ведущего шкива D_1 . Действительно, с ростом отношения D_1/h (h – толщина ремня) снижаются “вредные” напряжения изгиба ремня (20.4),

как следствие, допускаемое полезное напряжение может быть повышено.

Отклонение реальных условий от стандартных учитывается коэффициентом угла обхвата (19.4) C_a , скоростным коэффициентом C_v и коэффициентом режима нагрузки C_p . Допускаемое полезное напряжение в условии тяговой способности (20.12)

$$[s_F] = [s_F]_0 C_a \cdot C_v \cdot C_p.$$

20.6 Силы, действующие на валы ременной передачи

Сила давления на вал ведущего шкива (рис. 20.4) – равнодействующая натяжений S_1 и S_2 (20.5) на рисунке 19.5, перенесенных на ось вала O_1 . Проектируя векторную сумму

$$\vec{Q} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$$

на прямую O_1O_2 , получим проекцию равнодействующей:

$$Q \cos g = S_1 \cos \frac{b}{2} + S_2 \cos \frac{b}{2},$$

$$Q \cos g = [(S_0 + \frac{1}{2}F) + (S_0 - \frac{1}{2}F)] \cos \frac{b}{2},$$

что дает равнодействующую

$$Q \approx 2S_0 \cos \frac{b}{2}. \quad (20.14)$$

При обычно малом угле γ силы Q считаем направленными вдоль прямой O_1O_2 (рис. 20.4), да и $\cos \gamma$ считаем близким к единице.

Предварительное натяжение ремня в формуле (20.14) (см. формулы (20.6), (20.7), (20.8)):

$$S_0 = s_0 A = s_0 A_0 z.$$

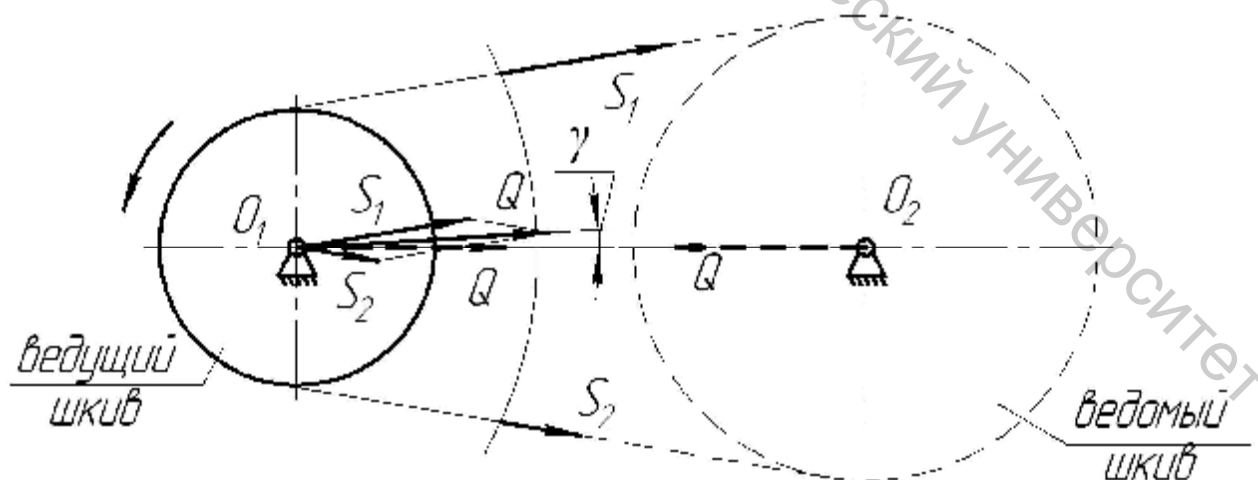


Рисунок 20.4 – Силы, действующие на валы передачи

Лекция 21. Цепная передача [4]

В отличие от ременных передач, использующих трение между ремнем и шкивами, цепные передачи работают на основе зацепления цепи со звездочками (рис. 21.1). Цепи стальные, их прочность намного выше прочности ремней. Оба обстоятельства определяют передачу значительно больших нагрузок, но все-таки меньших, чем те, что передаются зубчатыми колесами.

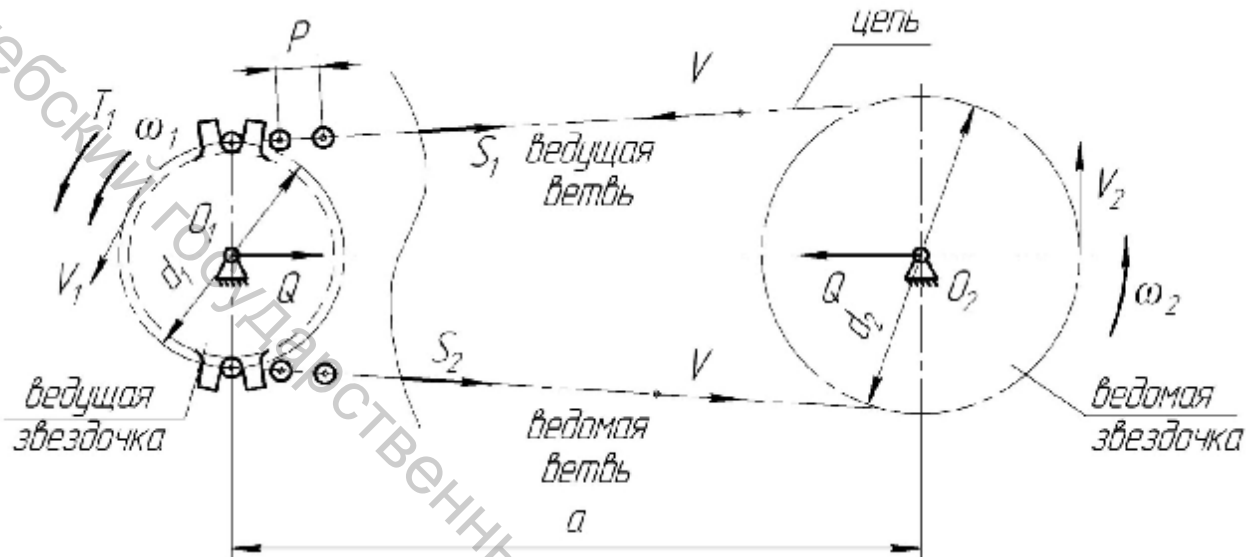


Рисунок 21.1 – Цепная передача: d_1 и d_2 – делительные диаметры, P – шаг цепи

Цепь не проскальзывает по звездочкам, поэтому способна работать на кратковременных перегрузках без буксования, среднее за оборот передаточное число неизменно.

Достаточные углы обхвата (19.4) в ременных передачах получаются при достаточно больших межосевых расстояниях и невысоких передаточных числах. Угол обхвата в цепных передачах не столь важен, они надежно работают, обеспечивая высокие передаточные числа при сравнительно малых межосевых расстояниях.

Однако ремень огибает шкивы по окружностям – передача работает плавно и бесшумно; цепь огибает звездочки, соприкасаясь своими звеньями со сторонами многоугольников – с этим связаны шум, производимый передачей, дополнительные динамические нагрузки, износ шарниров цепи.

21.1 Конструкция втулочно-роликовой цепи и звездочек

Шарнир втулочно-роликовой цепи образован валиком 1 (рис. 21.2), впрессованным в две пластины внешнего звена 2 и свободно вращающимся во втулке 3, впрессованной в две пластины внутреннего зве-

на 4. Ролик 5 заменяет трение скольжения в контакте с зубьями звездочек на значительно меньшее трение качения. Шаг цепи P – расстояние между осями соседних валиков.

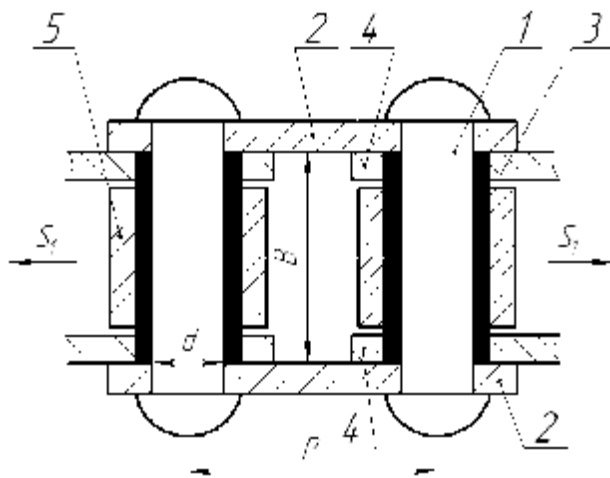


Рисунок 21.2 – Конструкция звена втулочно-роликовой цепи

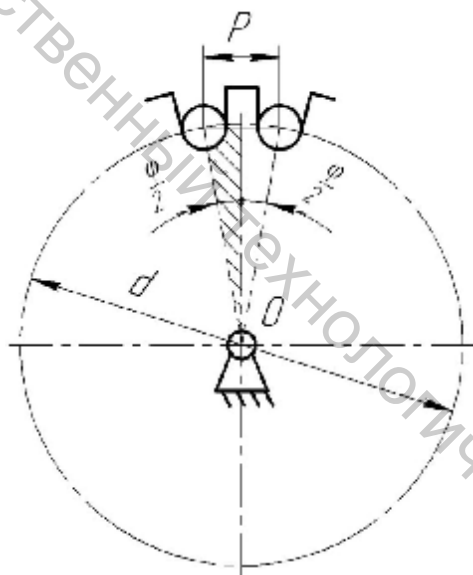


Рисунок 21.3 – Звездочка цепной передачи

На рисунке 21.3 изображена звездочка цепной передачи. Центры шарниров цепи располагаются на ее делительной окружности. Решая треугольник, заштрихованный на рисунке, найдем связь

$$\frac{P/2}{D/2} = \sin \frac{j}{2}, \quad j = \frac{2p}{z}, \quad (21.1)$$

где z – число зубьев звездочки. Делительный диаметр ее

$$d = \frac{P}{\sin \frac{P}{z}} \approx \frac{Pz}{p} \quad (21.2)$$

пропорционален (в приближении) числу z .

21.2 Передаточное число

Если считать в первом приближении, что цепь огибает звездочки по делительным окружностям, окружные скорости звездочек (рис. 21.1)

$$V_1 = w_1 \frac{d_1}{2} \approx V \approx w_2 \frac{d_2}{2} = V_2, \quad (21.3)$$

где V – скорость цепи. Передаточное число

$$u = \frac{w_1}{w_2} = \frac{d_2}{d_1},$$

или (см. формулу (21.2))

$$u \approx \frac{z_2}{z_1}. \quad (21.4)$$

21.3 Удары в передаче

В момент, показанный на рисунке 21.4, шарнир 1 цепи “попал” во впадину звездочки 1' и в дальнейшем движении вместе со звездочкой описывает дугу 1'АО', поднимая и опуская цепь. Шарнир 2, придя в положение 1, опускается вместе с цепью (со скоростью V), встречая поднимающуюся со скоростью V' впадину 2'. Соприкосновение шарнира и предназначенной ему впадины сопровождается ударом. Удары в передаче порождают шум – одна из причин разрушения шарниров цепи и зубьев звездочки.

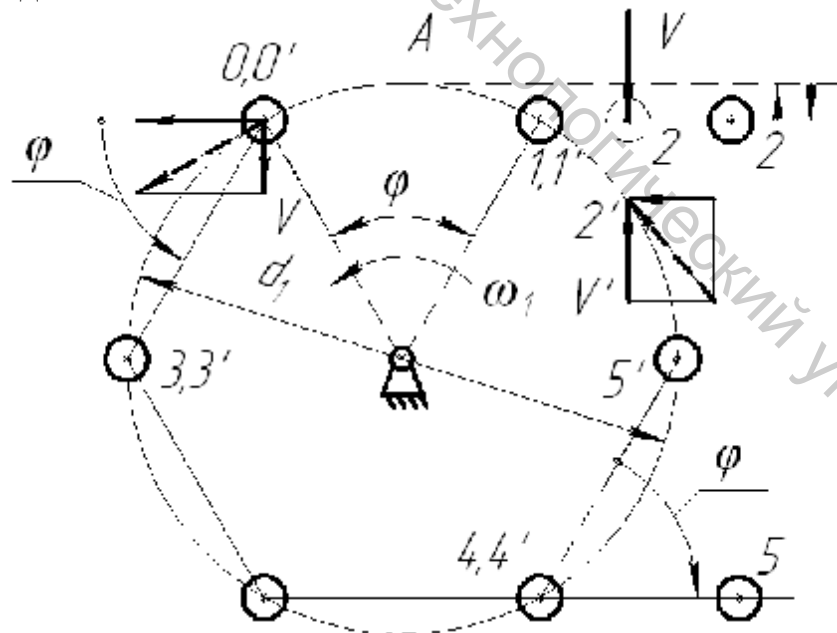


Рисунок 21.4 – Удар шарнира цепи о звездочку

Всякий шарнир цепи претерпевает за пробег два удара: встречаясь с ведущей звездочкой и встречаясь с ведомой звездочкой. Число ударов в единицу времени

$$n = 2 \frac{V}{L} \leq [n], \quad (21.5)$$

где (см. формулу для числа пробегов в единицу времени (20.11)) V – скорость цепи (21.3), длина цепи (19.5)

$$L = 2a + \frac{p}{2}(d_1 + d_2) + \frac{(d_2 - d_1)^2}{4a}, \quad (21.6)$$

$$a = (30 \dots 50)P \quad (21.7)$$

где $a = (30 \dots 50)P$ рекомендуемое [4] межосевое расстояние передачи (рис. 21.1), $[v]$ – допускаемое число ударов.

21.4 Износ цепи

Звено цепи 1-0, войдя в контакт со звездочкой и переходя в положение 0-3, поворачивается (рис. 21.4) на угол φ (рис. 21.3). Еще один поворот на тот же угол совершается, когда цепь выходит из зацепления со звездочкой, не оставаясь в положении 4'-5', а переходя в положение 4-5.

За один пробег цепи в каждом ее шарнире совершается 4 поворота – два на ведущей звездочке, два – на ведомой; они – основная причина износа валиков 1 и втулок 3 шарнира (рис. 21.2). Угол поворота (21.1) тем больше, чем меньше число зубьев звездочки. Увеличивая число зубьев, снижаем износ шарниров. Увеличивая межосевое расстояние (21.7), увеличиваем длину цепи (21.6) и тем самым снижаем число пробегов (20.11) – уменьшая число поворотов в шарнирах (и их износ).

21.5 Оптимальное число зубьев

Износ валиков и втулок шарниров цепи увеличивает ее шаг. Соответственно растут делительные диаметры (21.2) звездочек – диаметры окружностей, на которых располагаются центры шарниров (рис. 21.3):

$$d + \Delta d \approx \frac{P + \Delta P}{\sin \frac{p}{z}} \approx d + \frac{\Delta P}{\frac{p}{z}}. \quad (21.8)$$

Шарниры удаляются от осей вращения и, в конце концов, цепь спадает со звездочек. Приращение делительного диаметра (21.8) пропорционально (в первом приближении) числу ее зубьев – звездочка с большим числом зубьев (ведомая) первой потеряет зацепление с цепью.

Итак, при больших числах зубьев звездочек цепь изнашивается (см. п. 21.4) медленнее, зато мало изношенная, не потерявшая своей прочности, спадает со звездочек. При малых числах зубьев цепь, наоборот, изнашивается быстрее, зато вплоть до разрыва не теряет зацепления со звездочками. Существует оптимальное число зубьев (ведущей звездочки), определяющее наибольший срок службы цепи, не теряющей зацепления.

С ростом передаточного числа (21.4) число зубьев ведомой звезды $z_2 = z_1 \cdot u$ увеличивается, вероятность потери зацепления возрастает (желательные числа $z_2 \leq 100 \dots 120$) – рекомендуемое число z_1 снижается. В быстроходных передачах число пробегов (20.11) больше, чем в тихоходных, вместе с ним растут частота ударов (21.5), число поворотов в шарнирах цепи, и, как следствие, износ шарниров – число z_1 следует увеличить.

21.6 Давление в шарнирах цепи

Цепь рассчитывают по износостойкости шарниров, за основной расчетный критерий принимают удельное давление в шарнире, определяемое натяжением ведущей ветви S_1 (рис. 21.1).

Натяжения ветвей цепи аналогичны натяжениям ветвей ремня на рисунке 19.5. Однако, силы предварительного натяжения S_0 не играют в цепной передаче той определяющей роли, которую они играют в ременной. Обычно величина S_0 составляет несколько процентов полезной нагрузки F_t (19.9); натяжение ведомой ветви равно большему из усилий S_0 и S_v (аналогичной силе (20.2) в ременной передаче), составляющей $\sim 0,1\% F_t$. Уравнение, буквально повторяющее уравнение (19.9), дает силы

$$S_2 \ll 1, S_1 \approx F_t. \quad (21.9)$$

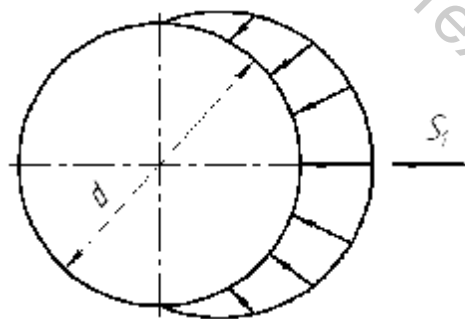


Рисунок 21.5 – Давление на поверхности валика

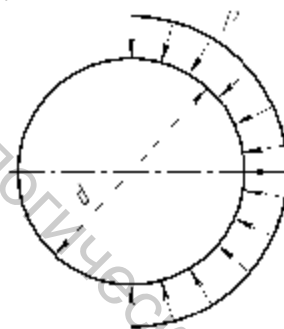


Рисунок 21.6 – Равномерно распределенное давление

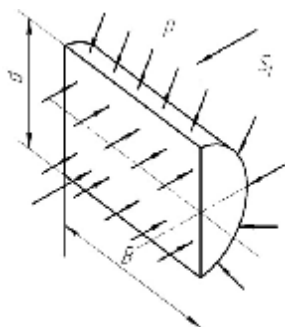


Рисунок 21.7 – Равновесие половины валика в жидкости

Давление в шарнире распределяется по поверхности валика (рис. 21.5) неравномерно. Имея в виду его среднее значение, найдем величину давления, равномерно распределенную на поверхности валика (рис. 21.6). Вообразим (рис. 21.7) половину валика, погруженную в жидкость и находящуюся там в равновесии. Давление жидкости равномерно распределено по всей поверхности валика, оно одно и то же на плоской и на цилиндрической поверхности. Равные в равновесии равнодействующие сил давления на этих поверхностях равны произведению давления на площадь dB плоской части поверхности валика.

Возвращаясь к шарниру ведущей ветви, найдем среднее давление на поверхности валика:

$$p = \frac{S_1}{dB},$$

или, при учете величины натяжения S_1 (21.9):

$$p = \frac{F_t}{dB}. \quad (21.10)$$

21.7 Допускаемое давление в шарнирах цепи

Условие износостойкости цепи имеет вид

$$p \leq [p], \quad (21.11)$$

где p – среднее давление в шарнирах цепи (21.10), $[p]$ – допускаемое давление в заданных условиях работы передачи. Оно определяется, в основном, допускаемым давлением $[p]_0$ в стандартных условиях. Эти условия: нагрузка на передачу постоянная, работа в одну смену в сухом помещении без пыли, смазка передачи капельная с частотой 20 кап/мин, натяжение цепи регулируется перемещением оси одной из звездочек, наклон линии центров передачи O_1O_2 (рис. 21.1) к горизонту не превышает 60° , межосевое расстояние выбрано по рекомендации (21.7). Чем быстрее передается, тем выше частота поворота в шарнирах, тем выше вероятность быстрого износа, тем меньше допускаемое давление $[p]_0$.

Отклонение заданных (реальных) условий от стандартных учитывается соответствующими коэффициентами, коэффициент эксплуатации

$$K_y = K_d \cdot K_{рез} \cdot K_c \cdot K_{рег} \cdot K_n \cdot K_a,$$

допускаемое напряжение в условии (21.11)

$$[p] = \frac{[p]_0}{K_y}. \quad (21.12)$$

21.8 Практический расчет цепной передачи

Допускаемое давление в стандартных условиях определяется для известного (стандартного) шага P частотой вращения n_1 ведущей звездочки. Пока шаг цепи неизвестен, допускаемое давление (в целях предварительного расчета) берется как среднее допускаемых давлений в цепях со всеми стандартными шагами. Это среднее используем в определении (21.12) и давление (21.12) – в условии износостойкости (21.11).

Давление в шарнирах цепи дается формулой (21.10), где полезная нагрузка (см. формулу (19.9))

$$F_t = \frac{2T_1}{d_1}. \quad (21.13)$$

Вращающий момент на ведущей звездочке (табл. 9.1) в формуле (21.13)

$$T_1 = 9550 \frac{P_1 \cdot 1000}{n_1} i \cdot i, \quad (21.14)$$

где P_1 , кВт и n_1 , об/мин – заданная мощность на ведущей звездочке и ее частота вращения. Делительный диаметр ведущей звездочки (21.2)

$$d_1 \approx \frac{P_{z_1}}{p}. \quad (21.15)$$

Полагая, наконец, цепь однорядной, используем в условии (21.11) известное из практики соотношение $dB \approx 0,28P^2$. Перепишем условие (21.11), подставляя в него выражения (21.13), (21.14), (21.15). Тогда допускаемое давление (21.12):

$$p = \frac{F_t}{dB} = \frac{2 \cdot 9550 P_1 \cdot 1000 / n_1}{(P_{z_1} / p) \cdot 0,28 P^2} \leq \frac{[p]_0}{\hat{E}_y}.$$

или

$$\frac{2p \cdot 9550 P_1 \cdot 1000 \cdot \hat{E}_y}{0,28 P^3 z_1 n_1} \leq [p]_0.$$

Требуемый шаг однорядной цепи [5]

$$P = 598 \sqrt[3]{\frac{P_1 \hat{E}_y}{z_1 n_1 [p]_0}}, \quad (21.16)$$

где z_1 – рекомендуемое оптимальное число зубьев ведущей звездочки.

Пользуясь шагом (21.16), выбираем, по крайней мере, две стандартные цепи: с шагом не меньше шага (21.16) и с шагом не больше шага (21.16). В дальнейшем, используя передаточное число (21.4), определяем для каждой из цепей число зубьев ведомой звездочки $z_2 = z_1 u$, делительные диаметры звездочек (21.2), межосевое расстояние (21.7), длину цепи (21.6), скорость цепи (21.3) и проверяем условие (21.5).

Наконец, проверяем условие износостойкости (21.11): находим с этой целью вращающий момент (21.14), полезную нагрузку (21.13), дав-

ление (21.10), допускаемое давление в стандартных условиях и допускаемое давление (21.12).

Давление на опоры (рис. 21.1)

$$Q = 1,2F_t.$$

Лекция 22. Резьбовые соединения

22.1 Крепёжные и ходовые резьбы

Поверхность резьбы образуется перемещением плоского контура (например, треугольного) вдоль винтовой линии на поверхности цилиндра (рис. 22.1).

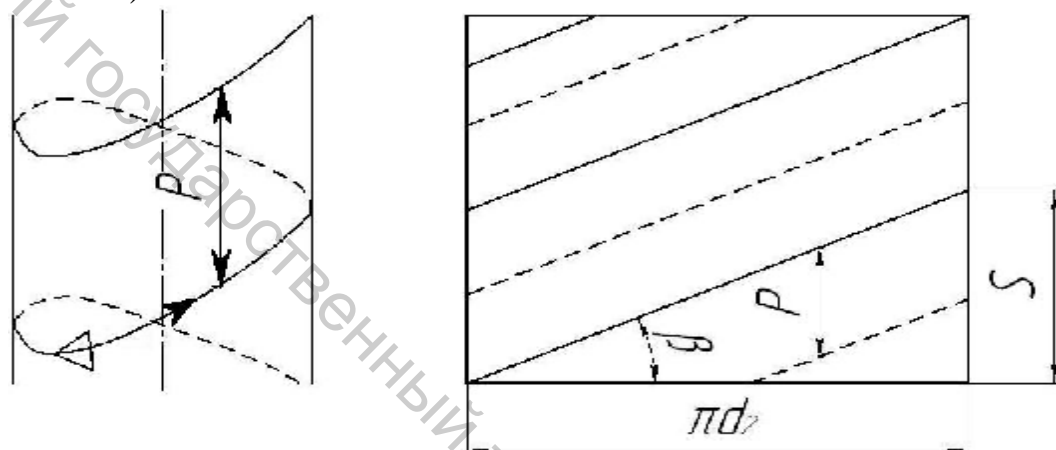


Рисунок 22.1 – Образование резьбы, развёртка винтовых линий двухзаходной резьбы

Соответственно, получаются треугольные (метрические), прямоугольные, трапециевидные, круглые резьбы – на рисунке 22.2 показаны сечения резьб плоскостями, проведенными через ось цилиндрической поверхности, и основные размеры: d – наружный, d_2 – средний и d_1 – внутренний диаметры; шаг P .

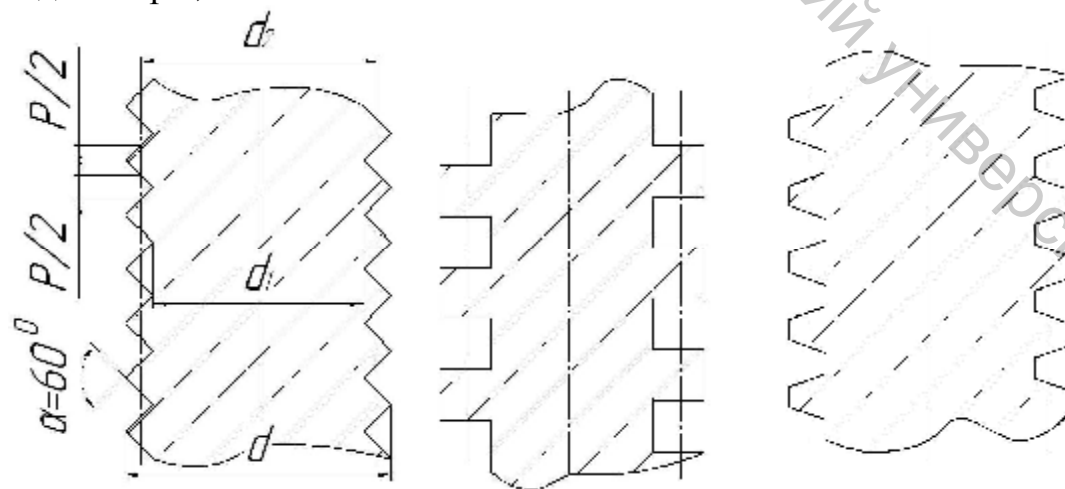


Рисунок 22.2 – Аксиальные сечения резьб и их основные размеры

Если цилиндрическую поверхность диаметром d_2 развернуть на плоскости, винтовая линия на рисунке 22.1 изобразится наклонной прямой (β – угол подъема резьбы). Ход резьбы

$$S = (pd_2) \operatorname{tg} b.$$

В случае однозаходной резьбы ход резьбы равен её шагу P . Крепёжные резьбы все однозаходные. Многозаходные резьбы, образованные несколькими винтовыми линиями, используются как ходовые (например, в передачах «винт-гайка»). На рисунке 22.1 показана (на развёртке цилиндра) двухзаходная резьба, её шаг

$$P = \frac{S}{2};$$

ход резьбы с n заходами

$$S = n \cdot P,$$

угол подъема резьбы

$$b = \operatorname{arctg} \frac{S}{pd_2} = \operatorname{arctg} \frac{nP}{pd_2}. \quad (22.1)$$

22.2 Основные виды резьбовых соединений

На рисунках 22.3 – 22.5 показаны болтовое, шпильчное и винтовое соединения.

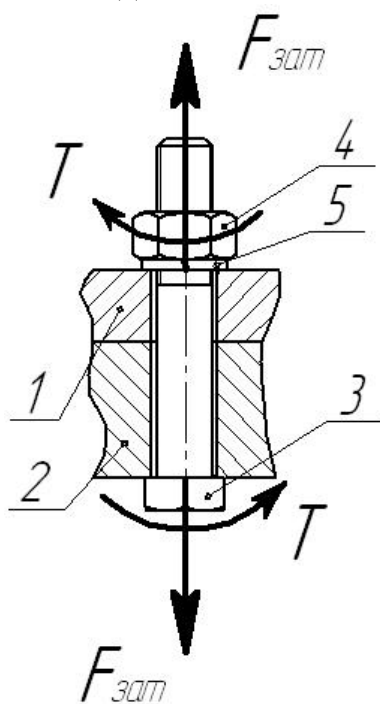


Рисунок 22.3 – Болтовое соединение: кручение и растяжение болта

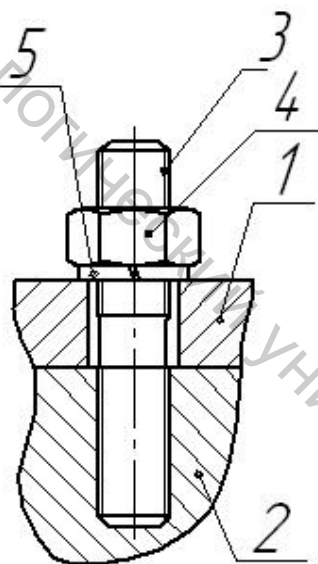


Рисунок 22.4 – Шпильчное соединение

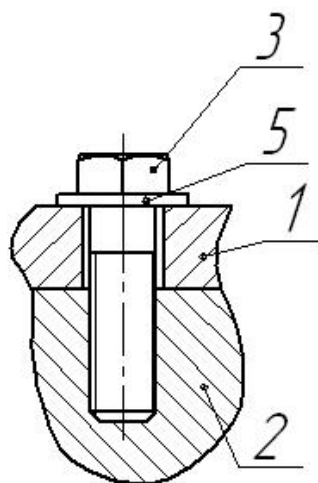


Рисунок 22.5 – Винтовое соединение

Все они соединяют две детали 1 и 2 и состоят из болта 3 и гайки 4 (рис. 22.3), из шпильки 3 и гайки 4 (рис. 22.4), из винта 3 и детали 2, играющей роль гайки (рис. 22.5). На рисунках 22.3 – 22.4 изображена пружинная шайба 5, предотвращающая самоотвинчивание гайки. Простая шайба 5 на рисунке 22.5 предохраняет поверхность детали под головкой винта от повреждений (возможных при завинчивании винта).

22.3 Амонтоново трение

Пусть твёрдое тело (рис. 22.6) находится на шероховатой плоскости, пусть на него действует сила S , её составляющие: нормальная сила, прижимающая тело к плоскости:

$$S_n = S \cos \alpha \quad (22.2)$$

и касательная сила, сдвигающая тело,

$$S_t = S \sin \alpha. \quad (22.3)$$

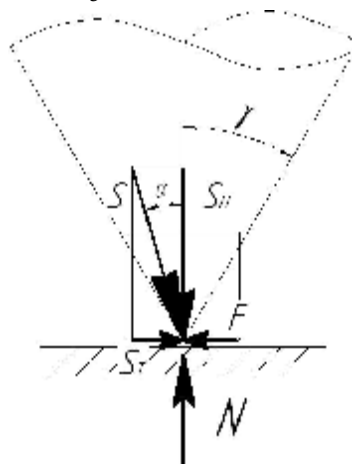


Рисунок 22.6 – Конус трения

Если тело покоится, первая сила (22.2) уравновешена нормальной реакцией:

$$N = S_n , \quad (22.4)$$

вторая (22.3) – силой трения

$$F = S_t . \quad (22.5)$$

Наибольшая сила трения определяется законом Амонтона:

$$F_{\partial \partial} = fN , \quad (22.6)$$

где f – коэффициент трения.

Условие покоя (равновесия) тела

$$F < F_{\partial \partial} ,$$

или (см. формулы (22.5, 22.3, 22.6, 22.4, 22.2))

$$\begin{aligned} S \sin a &< f \cdot S \cos a , \\ \operatorname{tg} a &< f . \end{aligned} \quad (22.7)$$

Построим конус с углом трения при вершине

$$g = \operatorname{arctg} f ,$$

условие равновесия (22.7) приобретает вид:

$$a < g . \quad (22.8)$$

На рисунке 22.7 изображены наклонная шероховатая плоскость с конусом трения и тело на ней, находящееся под действием вертикальной силы.

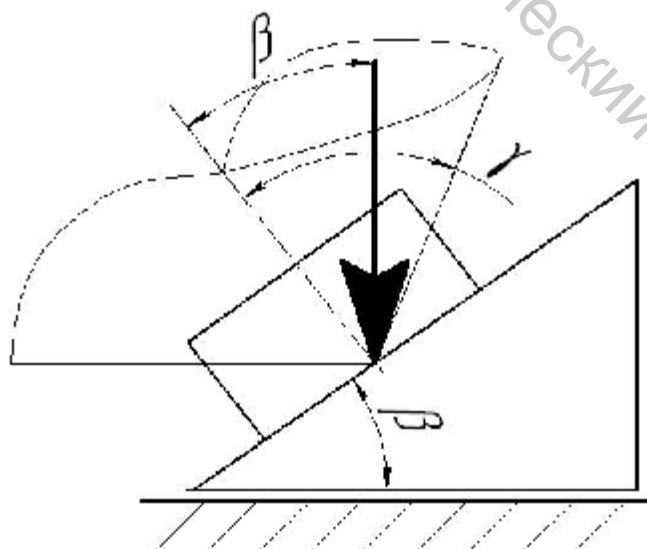


Рисунок 22.7 – Груз на наклонной плоскости

Условие равновесия (22.8) в этом случае

$$b < g. \quad (22.9)$$

Если сила, действующая на тело, находится в конусе трения, не касаясь его поверхности, тело покоится.

22.4 Трение в резьбе

При завинчивании гайки 4 болтового соединения (рис. 22.3) винт-болт 3, удерживаемый от вращения, перемещается в гайке подобно ходовому винту в передаче “гайка – винт” (см. эту передачу в испытательной машине УММ-5). Однако, перемещение болта как целого невозможно – оно тормозится его головкой. Перемещается нарезанная часть болта – как следствие, стержень болта получает упругое удлинение. Стремясь вернуться к прежнему размеру, болт прижимает гайку к поверхности детали. Сила давления гайки на деталь и противоположная сила (реакция детали), прижимающая резьбу гайки к резьбе болта, называются силами затяжки соединения. Как только завинчивание гайки прекращается, гайка оказывается в положении груза (рис. 22.7) на наклонной плоскости. Роль наклонной плоскости играет резьба болта; роль силы, действующей на груз, – сила затяжки. Если угол резьбы (22.1) – угол наклона плоскости на рисунке 22.7 – отвечает условию (22.9), гайка оказывается в режиме самоторможения, самоотвинчивания не происходит. В крепёжных резьбах $\beta = 1,5...4^\circ$; $\gamma = 6...16^\circ$ все крепёжные резьбы самотормозящие.

Однако, в соединениях, подверженных вибрациям, сцепление резьб болта и гайки слабеет, трение снижается, конус трения (рис. 22.8) сужается, сила затяжки $F_{\text{зат}}$ оказывается вне его, гайка, самоотвинчиваясь, скользит по резьбе болта. Пружинная шайба на рисунках 22.3, 22.4, расправляясь, поддерживает контакт и уровень сцепления резьб гайки и винта, препятствуя тем самым самоотвинчиванию гайки.

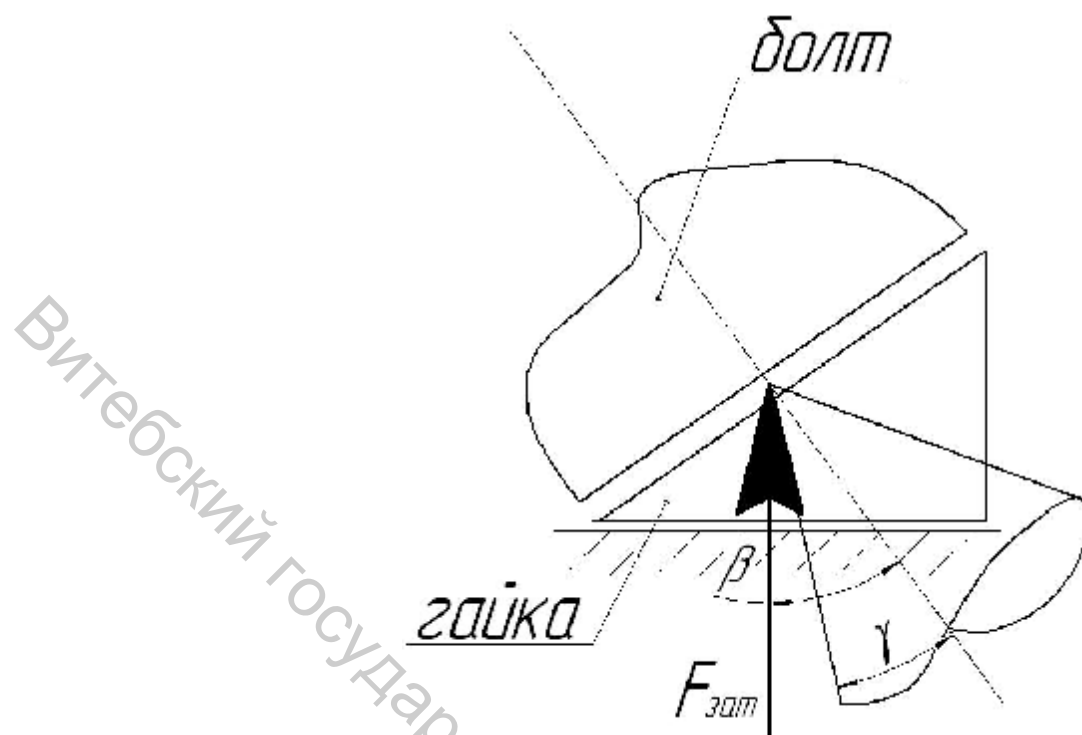


Рисунок 22.8 – Фрагменты гайки и болта

22.5 Резьба метрическая

Сравним резьбы треугольную ($\alpha = 60^\circ$) и прямоугольную (рис. 22.9).

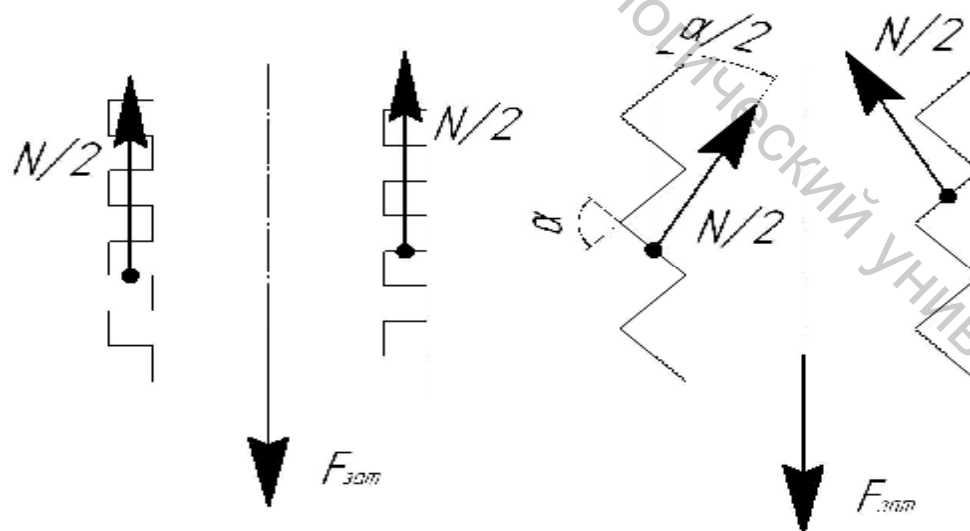


Рисунок 22.9 – Трение в прямоугольной и треугольной резьбах

Силы давления на поверхности резьбы распределены по ней. Представим (условно) эти силы двумя сосредоточенными силами. В прямоугольной резьбе

$$2 \cdot \frac{N}{2} = F_{\zeta \dot{\alpha} \dot{\alpha}} ,$$

суммарная наибольшая сила трения (22.6)

$$F_{\dot{\alpha} \dot{\alpha}} = fN = fF_{\zeta \dot{\alpha} \dot{\alpha}} ; \quad (22.10)$$

в треугольной резьбе

$$2 \cdot \frac{N}{2} \cos \frac{a}{2} = F_{\zeta \dot{\alpha} \dot{\alpha}} ,$$

$$F_{\dot{\alpha} \dot{\alpha}} = fN = \left(\frac{f}{\cos \frac{a}{2}} \right) \cdot F_{\zeta \dot{\alpha} \dot{\alpha}} . \quad (22.11)$$

Как видим, приведенный коэффициент трения в формуле (22.11) больше коэффициента (22.10) в

$$\frac{1}{\cos \frac{a}{2}} \approx 1.17 \text{ раз,}$$

или на 17%. Основные крепёжные резьбы - треугольные метрические – названы так, поскольку размеры измеряются в мм, в отличие от дюймовых резьб. Прямоугольные резьбы (и близкие к ним) используют в винтовых механизмах (например, в передачах “гайка – винт”), нуждающихся в малом трении, в интересах снижения износа и повышения КПД.

Если прибегнуть (рис. 22.10) в треугольной резьбе к мелкому шагу, угол β (22.1) уменьшится, что снизит (см. условие (22.9)) вероятность самоотвинчивания.

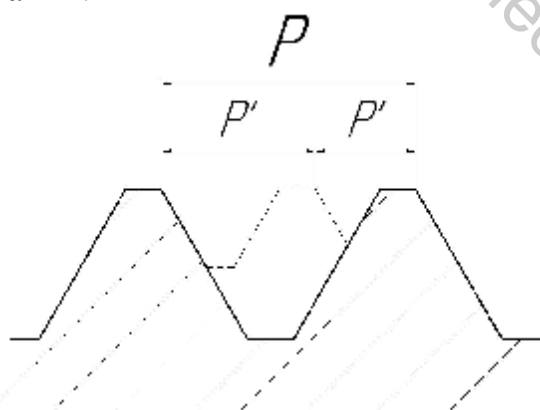


Рисунок 22.10 – Резьба с мелким шагом

Метрические резьбы с мелкими шагами используют в жезловых маслоуказателях, в отдушниках, в маслосливных пробках – в деталях, должных обеспечивать надёжное уплотнение.

22.6 Расчёт затянутого болта на прочность

Действуя гаечным ключом, мы закручиваем (рис. 22.3) посредством силы трения в резьбе стержень болта. Вместе с этим возникают силы затяжки, растягивающие болт. Напряжённое состояние стержня болта – упрощённое плоское (рис. 22.11).

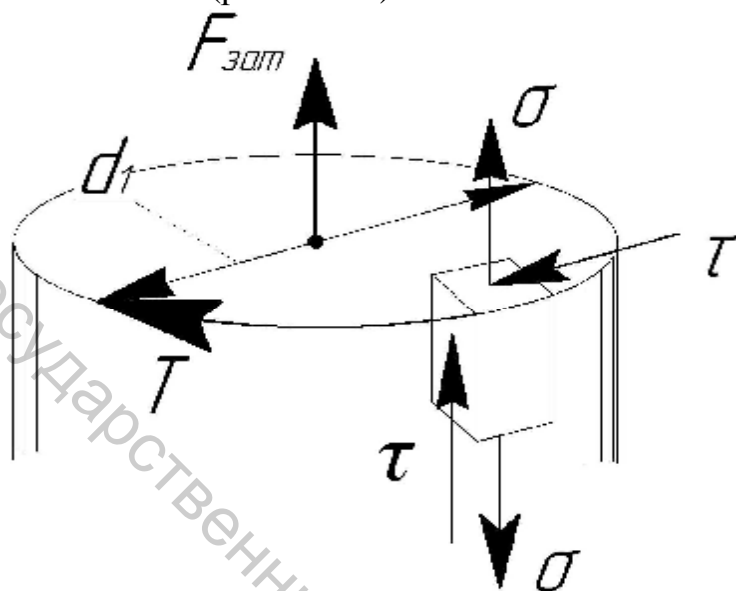


Рисунок 22.11 – Напряжённое состояние болта

Соответствующее эквивалентное напряжение

$$s_{\text{ýêâ}} = \sqrt{s^2 + 4t^2} . \quad (22.12)$$

Касательные напряжения при затяжке болтов со стандартной метрической резьбой (возникающие при кручении) могут быть учтены в формуле (22.12) коэффициентом 1,3:

$$s_{\text{ýêâ}} \approx 1,3s ,$$

где растягивающие напряжения

$$s = \frac{F_{\text{çàò}}}{\frac{pd_1^2}{4}}$$

где d_1 – внутренний диаметр резьбы.

Условие прочности:

$$s_{\text{ýêâ}} = 1,3 \cdot \frac{F_{\text{çàò}}}{\frac{pd_1^2}{4}} \leq [s] . \quad (22.13)$$

Предварительная затяжка болтов предотвращает раскрытие стыка при наличии внешней нагрузки, раскрывающей его. Под её действием (рис. 22.12) болт получает добавочное удлинение; упругие детали, сжа-

тые в соединении, частично восстанавливают свой первоначальный размер, т.е тоже удлиняются.

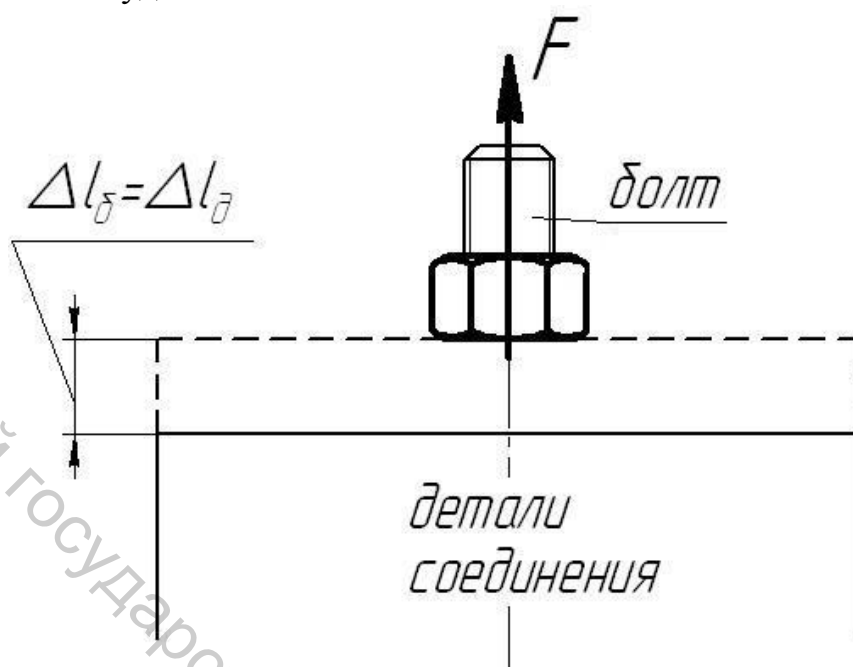


Рисунок 22.12 – Удлинения болта и деталей под действием внешней нагрузки

Можно считать, что на силы, действующие в затянутом соединении, налагаются силы при растяжении системы болт – детали (рис. 22.13).

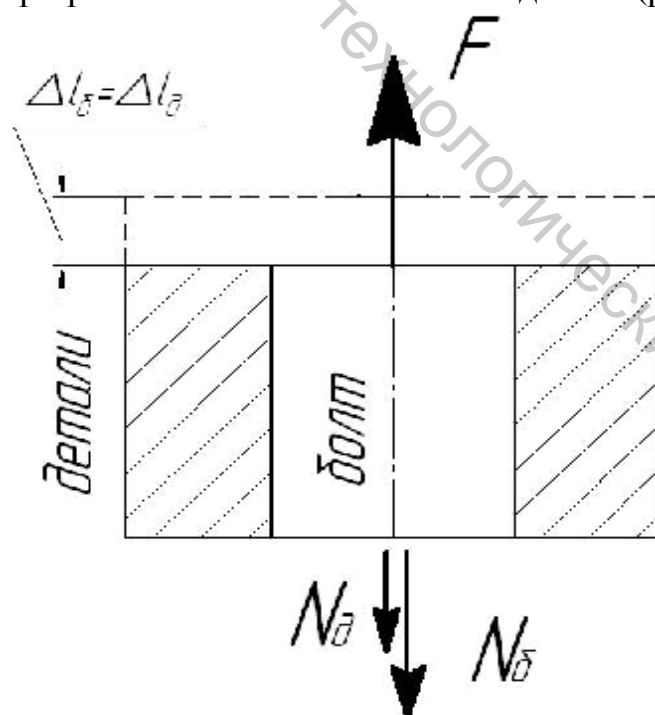


Рисунок 22.13 – Система болт – детали

Последние находятся из уравнения равновесия:

$$F = N_{\delta} + N_{\delta} \quad (22.14)$$

и уравнения совместности удлинений:

$$\Delta l_{\dot{a}} = \Delta l_{\ddot{a}} . \quad (22.15)$$

Уравнение (22.15) можно переписать, вспомнив, что упругое удлинение пропорционально растягивающей силе:

$$\frac{N_{\dot{a}}}{C_{\dot{a}}} = \frac{N_{\ddot{a}}}{C_{\ddot{a}}} , \quad (22.16)$$

где $C_{\dot{a}}$ и $C_{\ddot{a}}$ – жёсткости болта и деталей. Решая уравнения (22.14, 22.16) совместно, найдём силы в соединении при растяжении системы болт – деталь:

$$N_{\dot{a}} = \frac{F}{1 + \frac{C_{\ddot{a}}}{\tilde{N}_{\dot{a}}}} , \quad (22.17)$$

$$N_{\ddot{a}} = \frac{F}{1 + \frac{C_{\dot{a}}}{\tilde{N}_{\ddot{a}}}} .$$

Вводя в выражения (22.17) обозначения

$$I = \frac{1}{1 + \frac{\tilde{N}_{\ddot{a}}}{\tilde{N}_{\dot{a}}}} ,$$

$$1 - I = \frac{1}{1 + \frac{\tilde{N}_{\dot{a}}}{\tilde{N}_{\ddot{a}}}}$$

(I – коэффициент внешней нагрузки), напомним формулы для сил, действующих в предварительно затянутом соединении при его растяжении внешней нагрузкой F : расчётная нагрузка на болт

$$F_{\dot{\delta}} = F_{\dot{\delta}0} + I F , \quad (22.18)$$

остаточная затяжка стыка

$$F_{\ddot{\delta}} = -F_{\ddot{\delta}0} + (1 - I) F . \quad (22.19)$$

Графики зависимостей (22.18, 22.19) показаны на рисунке 22.14.

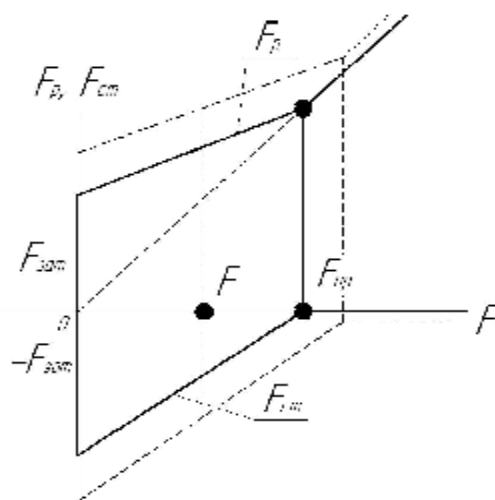


Рисунок 22.14 – Чем больше силы затяжки, тем далее действующая нагрузка F от нагрузки $F_{пр}$, раскрывающей стык (при ней $F_{ст} = 0$).

На рисунке видно: чем больше усилие затяжки, тем далее действующая нагрузка F от нагрузки $F_{пр}$, раскрывающей стык. Полагают

$$F_{\text{зат}} = KF, \quad (22.20)$$

где $K = 1,3 \dots 2$ – коэффициент затяжки (коэффициент запаса по нераскрытию стыка).

В приближённых расчётах коэффициент $\lambda = 0,2 \dots 0,3$; расчётная нагрузка на болт (22.18)

$$F_p = F_{\text{зат}} + (0,2 \dots 0,3) F, \quad (22.21)$$

усилие затяжки соединения даётся рекомендацией (22.20). Расчётная нагрузка (22.21) подставляется в условие прочности (22.13), коэффициент 1,3 сохраняем, учитывая касательные напряжения при возможной затяжке соединения под нагрузкой (что не рекомендуется).

Затяжка соединения может потребоваться и как гарантия против сдвига деталей в стыке (рис. 22.15).

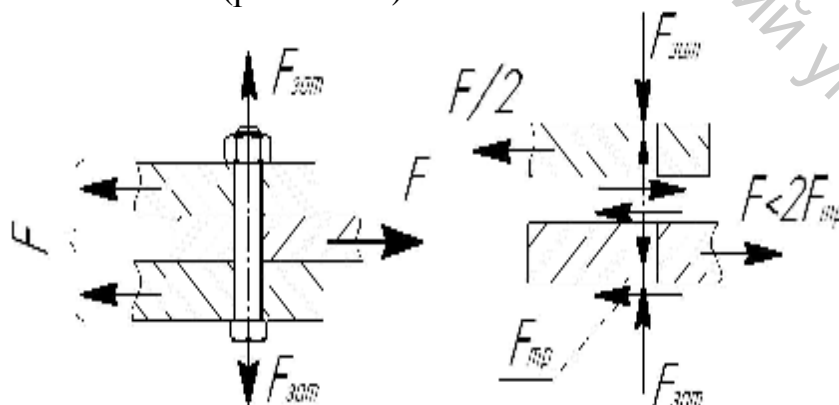


Рисунок 22.15 – Действующая сила F не превышает наибольших сил трения (силы трения действуют в двух плоскостях стыка)

Если болт вставлен в отверстие деталей с зазором, внешняя нагрузка уравнивается силами трения, гарантия против сдвига даётся условием

$$F \leq i \cdot F_{\text{до}} = i \cdot F_{\text{задо}} \cdot f ,$$

где i – число плоскостей стыка деталей. Вводя здесь коэффициент запаса K , найдём требуемое усилие затяжки:

$$F_{\text{задо}} = \frac{KF}{if} ,$$

где $K = 1,3 \dots 1,5$.

Если болт вставляется в отверстия деталей без зазора, он работает (рис. 22.16) на срез и смятие.

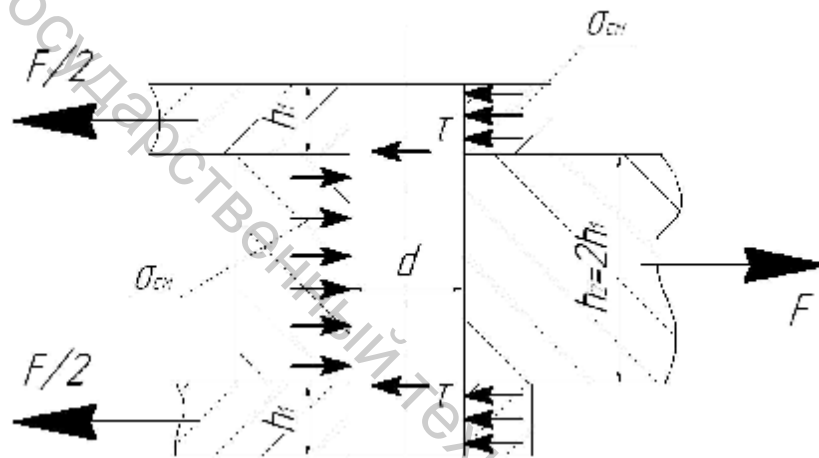


Рисунок 22.16 – Болт, вставленный в отверстия деталей без зазора, работает на срез и смятие

Условие прочности болта на срез по плоскости стыка деталей

$$t = \frac{F}{\frac{\pi d^2}{4} \cdot i} \leq [t] ,$$

где $[t]$ – допускаемое напряжение на срез; условие прочности на смятие (см. формулу для давления в шарнирах цепи (21.10)):

$$s_{\text{смя}} = \frac{F}{dh_2} \leq [s_{\text{смя}}] ,$$

где $[\sigma_{\text{смя}}]$ – допускаемое напряжение на смятие того из материалов деталей или болта, который слабее. Условие равнопрочности всех частей соединения

$$h_2 = 2h_1 .$$

Требуемый диаметр болта находится из обоих условий, принимается больший из них.

Лекция 23. Шероховатость поверхностей деталей, допуски и посадки

23.1 Высотные параметры шероховатости

Рабочие свойства поверхности детали определяются её качеством. Геометрическая сторона последнего – её шероховатость – чередующиеся или беспорядочно расположенные микронеровности. Они – результат копирования формы режущих кромок инструмента, остаточных деформаций при его воздействии на деталь, вибраций, возникающих в процессе обработки и т.п.

Шероховатость поверхности рассматривают на небольших участках до нескольких мм², выделяя их, пользуясь, например, базовой длиной – длиной отрезка базовой линии (заданной формы), которая проводится “по неровностям” определённым образом. Выбирают базовую длину, стараясь исключить, по возможности, влияние волнистости поверхности (рис. 23.1).

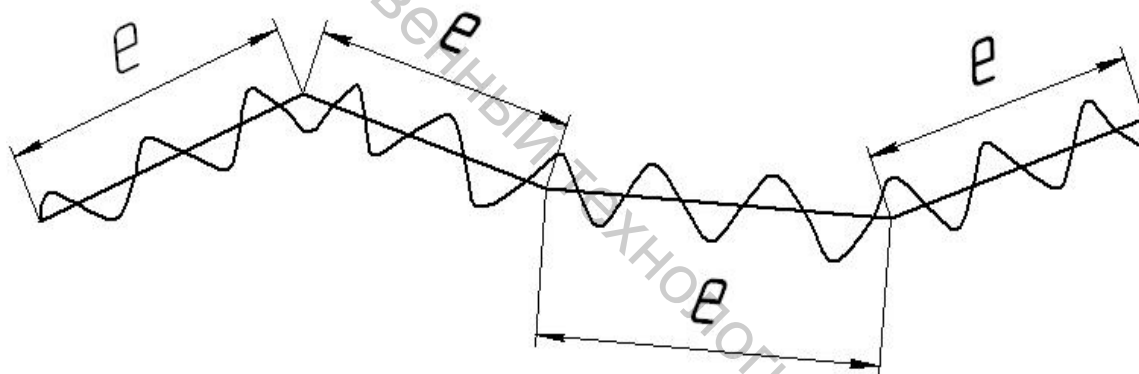


Рисунок 23.1 – Базовая длина и волнистость поверхности

Заданная форма базовой линии – форма номинального профиля на чертеже детали, среднеквадратическое отклонение профиля неровностей от неё (рис. 23.2) минимально:

$$\int_0^l y^2 dx.$$

(23.1)

В рамках приближённого подхода требование (23.1) заменяется требованием

$$\sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n A'_i ,$$

где A_i – площадь выступа профиля неровностей над базовой линией, A'_i – площадь впадины под базовой линией.

Профилограмма на рисунке 23.2 получается путём “ощупывания” поверхности детали алмазной иглой или фотографированием на специальном микроскопе. Профилограмма всегда утрирована, поскольку увеличение по вертикали (100...200000) больше увеличения по горизонтали (10...10000).

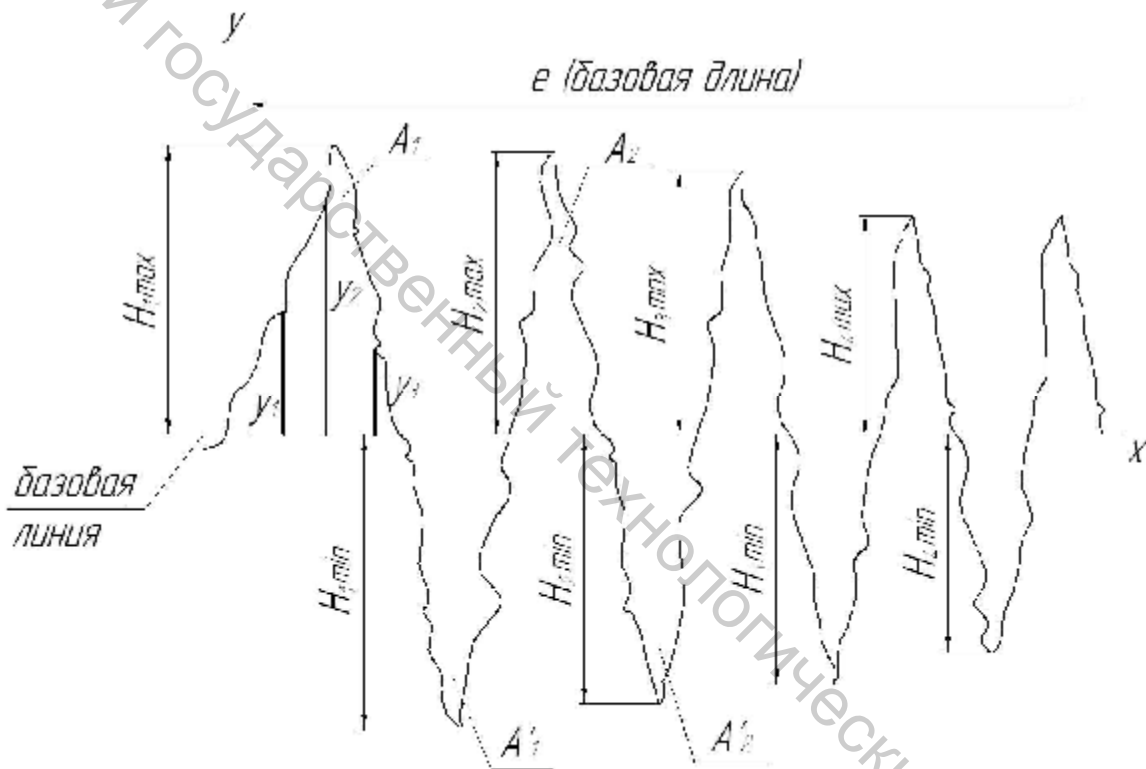


Рисунок 23.2 – Профилограмма микрогеометрии поверхности

Сравнительно грубые поверхности высотой 320...10 мкм не ощупывают – алмазная игла может сломаться; не ощупывают и очень гладкие поверхности высотой 0,1...0,025 мкм – закруглённый конец иглы не фиксирует очень малые неровности. Высотный параметр шероховатости R_z определяют бесконтактными методами, например, на специальных микроскопах. R_z – высота неровностей профиля по десяти точкам:

$$R_z = \frac{1}{5} \left(\sum_{i=1}^5 |H_{i\max}| + \sum_{i=1}^5 |H_{i\min}| \right), \quad (23.2)$$

$H_{i \max}$ в первой из двух сумм (23.2) – одна из пяти наибольших высот выступов профиля в пределах базовой длины, $H_{i \min}$ во второй сумме – одна из пяти наибольших глубин впадин профиля.

Итак, параметр (23.2) характеризует шероховатость либо очень грубых, либо очень гладких поверхностей. Во всех других случаях, а их большинство, шероховатость нормируют по высоте заданием среднего арифметического отклонения профиля:

$$R_a = \frac{1}{l} \int_0^l |y(x)| dx \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i|, \quad (23.3)$$

где y_i – ордината профилограммы (рис. 23.2). Ясно, что параметр R_a (23.3) – лучшая (чем параметр R_z) характеристика шероховатости поверхности; при её определении ощупывают поверхности всех выступов и впадин неровностей.

23.2 Обозначение шероховатости на рабочих чертежах

Знаки, обозначающие шероховатость поверхности, показаны на рисунке 23.3; высотные параметры (23.2 – 23.3) и их истинные значения в мкм указывают “под полкой радикала”.



Рисунок 23.3 – Знаки, обозначающие шероховатость поверхности

В первом случае слева вид обработки поверхности не оговаривается, инициатива технолога не стесняется. Этот способ обозначения шероховатости предпочтительный. Второй знак, не оговаривая способа обработки, устанавливает, однако, что поверхность образована удалением слоя материала. Вид обработки оговаривается, если нужно, соответствующим указанием над полкой знака (рис. 23.4). В третьем случае поверхность обрабатывается без удаления материала. Четвёртый знак обозначает поверхности, не обрабатываемые по данному чертежу.



Рисунок 23.4 – Знак оговаривает способ обработки

Если шероховатость поверхности детали везде одна и та же, её обозначение выносится в правый верхний угол чертежа.

Если шероховатость различных поверхностей детали нормируется в разной степени, в угол выносится наиболее часто повторяющееся требование (рис. 23.5). За ним помещается (в скобках) предпочтительный

знак – он указывает на поверхности с иными показателями шероховатости, нанесёнными прямо на изображении детали (рис. 23.5).

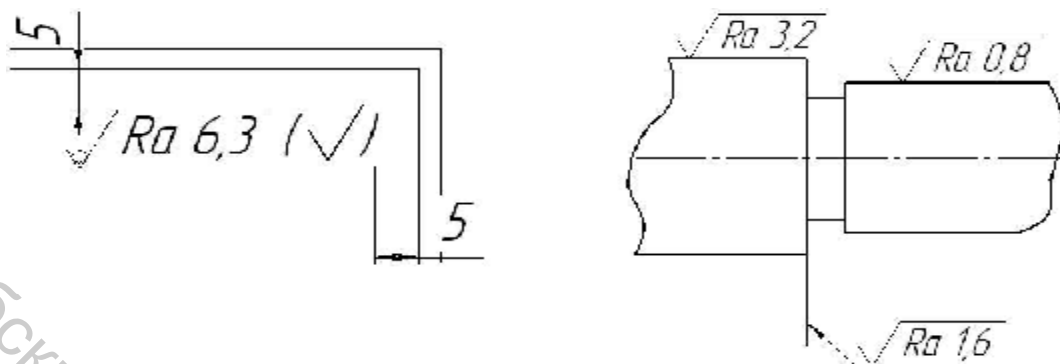


Рисунок 23.5 – Показатели шероховатости в углу чертежа и непосредственно на изображении детали

23.3 Размеры детали

Свободные размеры определяют поверхности детали, которые не соприкасаются с поверхностями других деталей, входящих в изделие. Размеры поверхностей, по которым детали соприкасаются, называются сопрягаемыми. Именно они обеспечивают взаимозаменяемость деталей.

Вовсе не обязательно, чтобы действительный размер детали совпадал с номинальным, указанным на рабочем чертеже. Действительному размеру предписано быть не больше наибольшего (предельного) и не меньше наименьшего (второго предельного) размеров.

23.4 Допуск и предельные отклонения

Допуск - разность между наибольшим и наименьшим предельными размерами. На рисунке 23.6 показано сопряжение вала и отверстия в детали. Номинальные диаметры отверстия D и вала d , разумеется, одинаковы. Допуски

$$T_D = D_{\max} - D_{\min}, \quad (23.4)$$

$$T_d = d_{\max} - d_{\min}.$$

Предельные отклонения размеров:

1) верхние:

$$ES = D_{\max} - D, \quad (23.5)$$

$$es = d_{\max} - d;$$

2) нижние:

$$EI = D_{\min} - D, \quad (23.6)$$

$$ei = d_{\min} - d.$$

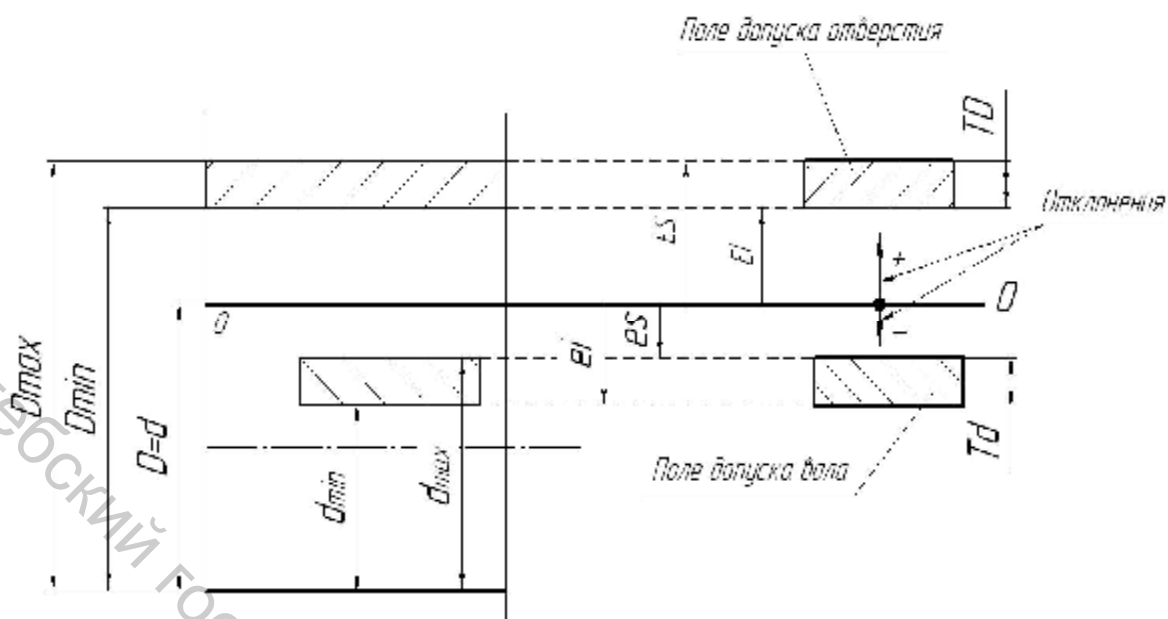


Рисунок 23.6 – Предельные размеры и предельные отклонения отверстия и вала

Предельные размеры:

1) наибольшие: $D_{\max} = D + ES$, (23.7)

$$d_{\max} = d + es;$$

2) наименьшие: $D_{\min} = D + EI$, (23.8)

$$d_{\min} = d + ei .$$

Заметим, что допуски (23.4) всегда положительные, предельные отклонения (23.5 – 23.6) могут быть положительными и отрицательными, они указываются со знаками.

Подставим предельные размеры (23.7 - 23.8) в разности (23.4).

Допуски выражаются через предельные отклонения:

$$T_D = ES - EI , \quad T_d = es - ei. \quad (23.9)$$

Поля допусков определяют не только величины допусков (23.9), но и расположение допусков относительно номинального размера (относительно нулевой линии – линии номинального размера).

23.5 Посадки подвижные, неподвижные и переходные

Соединения деталей в изделии могут быть подвижными и неподвижными. Характер соединения называют посадкой. Требуемая посадка достигается относительным смещением полей допуска отверстия и вала. На рисунке 23.7 показана подвижная посадка - с зазорами.

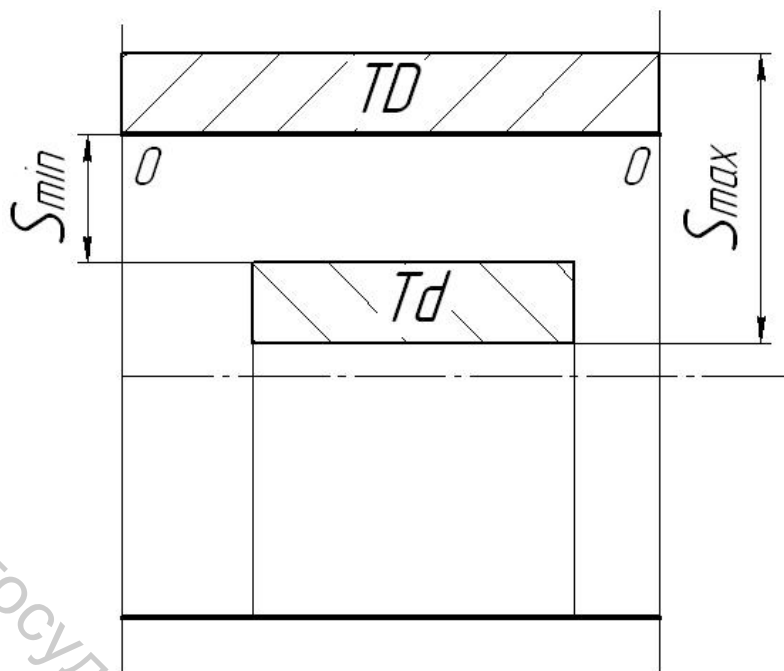


Рисунок 23.7 – Подвижная посадка – поле допуска отверстия располагается над полем допуска вала

Наибольший и наименьший зазоры

$$S_{\max} = D_{\max} - d_{\min} , \quad (23.10)$$

$$S_{\min} = D_{\min} - d_{\max} ,$$

или, если воспользоваться формулами (23.7 – 23.8):

$$S_{\max} = ES - ei , S_{\min} = EI - es ;$$

допуск зазора

$$T_S = S_{\max} - S_{\min} = (ES - EI) + (es - ei) ,$$

т.е. допуск зазора равен сумме допусков (23.9) отверстия и вала:

$$T_S = T_D + T_d . \quad (23.11)$$

На рисунке 23.8 показана неподвижная посадка с натягом (отрицательными зазорами). Наибольший и наименьший натяги

$$N_{\max} = d_{\max} - D_{\min} ,$$

$$N_{\min} = d_{\min} - D_{\max} ,$$

или (см. формулы (23.7 - 23.8))

$$N_{\max} = es - EI , N_{\min} = ei - ES ;$$

допуск натяга

$$T_N = N_{\max} - N_{\min} = (ES - EI) + (es - ei) ,$$

что опять даёт сумму (23.11).

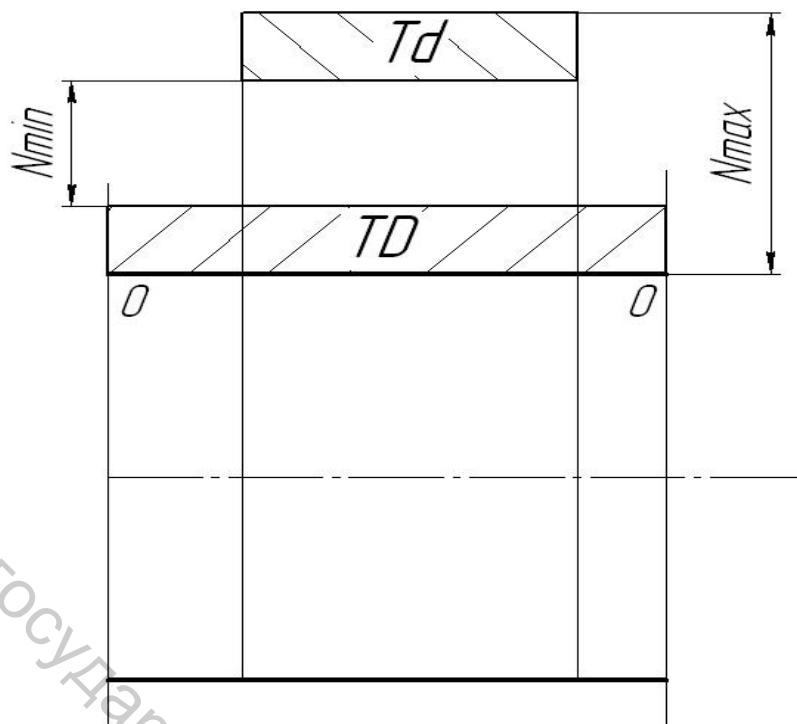


Рисунок 23.8 – Неподвижная посадка – поле допуска отверстия располагается под полем допуска вала

Разновидность неподвижных посадок – посадки переходные (рис. 23.9): после сборки вала с отверстием может получиться либо зазор, либо натяг. Неподвижность посадки обеспечивается введением в соединение шпонки, стопорного винта, штифта и т.п.

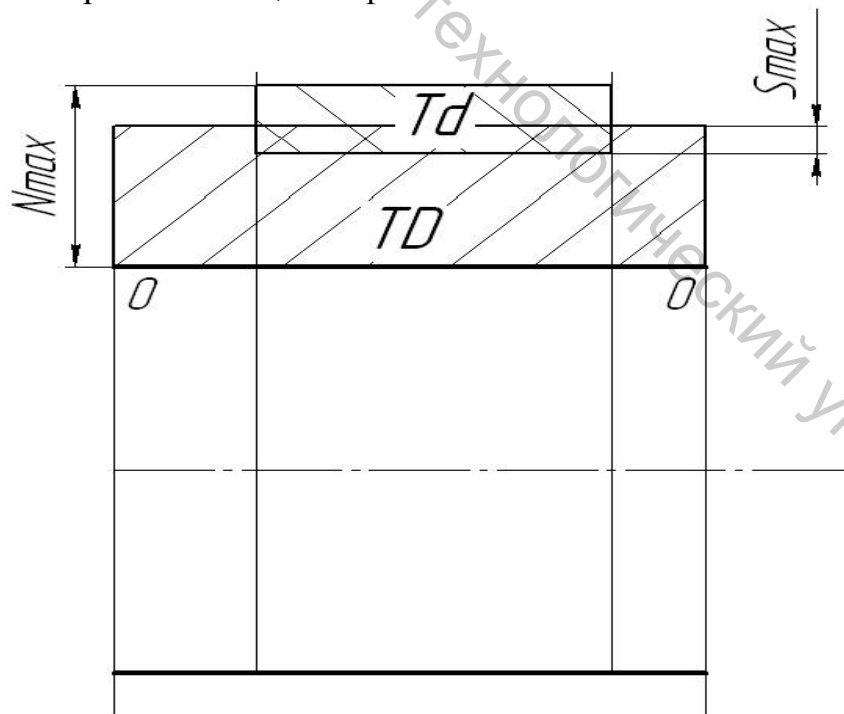


Рисунок 23.9 – Переходная посадка – поле допуска отверстия и вала пересекаются

Наибольший зазор

$$S_{\max} = D_{\max} - d_{\min} , \quad (23.12)$$

наибольший натяг

$$N_{\max} = d_{\max} - D_{\min} . \quad (23.13)$$

Вспомним теперь, что натяг (23.13) можно рассматривать как отрицательный зазор; наименьший зазор тогда равен:

$$S_{\min} = -N_{\max} = D_{\min} - d_{\max} . \quad (23.14)$$

Формулы (23.12 – 23.14) совпадают с формулами (21.10), соответственно, допуск переходной посадки дается суммой (23.11):

$$T_{S,N} = T_D + T_d .$$

Лекция 24. Системы отверстия и вала

24.1 Система отверстия

Система отверстия предусматривает основной элемент – отверстие, допуск его направлен «в тело» детали, основное предельное отклонение (ближайшее к нулевой линии) равно нулю (рис. 23.7 – 23.9). Поле допуска отверстия во всех посадках (при заданном номинальном размере и заданной точности) одно и то же. Сама же посадка определяется основным отклонением диаметра вала, одним и тем же для интервала номинальных размеров и не зависящим от точности – точностью определяется величина допуска вала. Стандарт предусматривает (в порядке убывания точности) 17 квалитетов – степеней точности. Обозначение поля допуска включает в себя букву (заглавную для отверстия, строчную для вала) и номер квалитета – буква обозначает основное отклонение размера, независимое от квалитета, номер квалитета задаёт величину допуска.

На рисунке 24.1 показано поле допуска отверстия и основные отклонения размера вала в системе отверстия. Заметим: поле допуска вала j_s симметрично относительно нулевой линии.

24.2 Система вала

В системе вала основной элемент – вал. Допуск его направлен «в тело», основное отклонение равно нулю. Поле допуска вала – одно и то же во всех посадках. Сама же посадка определяется основным отклонением размера отверстия. На рисунке 24.2 показан фрагмент системы вала. Заметим: поле допуска отверстия J_s симметрично относительно нулевой линии.

Система отверстия и система вала формально равноправны. Однако, обработка отверстий (с целью получить различные посадки) производится набором дорогостоящих инструментов, тогда как валы обрабатываются одним инструментом – резцом. Система отверстия предпочтительнее.

24.3 Обозначение посадок на чертежах

Желая обозначить на сборочном чертеже посадку вала в отверстие, указываем номинальный размер в мм и «в дроби» поля допусков отверстия и вала: поле допуска отверстия – «в числителе дроби», поле допуска вала – «в знаменателе дроби»:

$$\varnothing 50 \frac{H7}{p6}, 16 \frac{D10}{h9}. \quad (24.1)$$

Первое из обозначений (24.1) сделано в системе отверстия (поле допуска основного отверстия H7), второе – в системе вала (поле допуска основного вала h9).

24.4 Посадки подшипников качения в отверстие корпуса и на вал

Если наружное кольцо подшипника, посаженное в корпус, неподвижно в работе, нагрузки на него приходятся в одно и то же место беговой дорожки. Износ её при таком (местном) нагружении неравномерный. Его можно сделать относительно равномерным (и сделать подшипник долговечнее), если допустить проворачивание (под воздействием толчков, сотрясений и т.п.) нагруженного кольца в отверстии корпуса. Допуск наружного кольца подшипника направляют с этой целью «в тело» (основное отклонение h равно нулю), т.е. делают наружное кольцо «валом» – в системе вала (рис. 24.3); допуск отверстия может быть направлен «в тело» (как в системе отверстия).

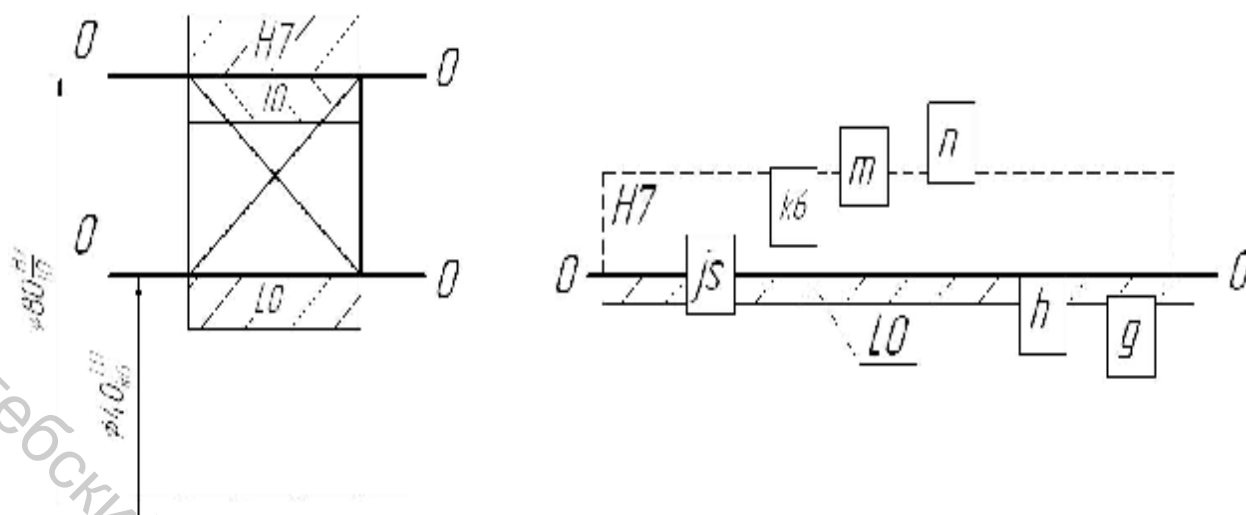


Рисунок 24.3 – Посадки подшипника качения в корпус и на вал

Посадка подшипника в корпус получается подвижной. В её обозначении (рис.24.3)

$$\varnothing 80 \frac{H7}{l0},$$

только внешне похожем на обозначение (24.1), $H7$ – поле допуска отверстия в корпусе, в обозначении поля допуска наружного кольца l – первая буква немецкого слова *das Lager* (подшипник), 0 – номер класса точности подшипника (здесь нормального).

Внутреннее кольцо подшипника, насаженное на вращающийся вал, воспринимает нагрузку на подшипник всей своей вращающейся поверхностью. Износ беговой дорожки внутреннего кольца при таком (циркуляционном) нагружении равномерный и вовсе не он определяет характер посадки внутреннего кольца на вал. Здесь требуется обеспечить неподвижную посадку, проскальзывание внутреннего кольца по валу приведёт к развальцовке поверхностей отверстия и вала в подшипнике, потере точности, нагреву и, как результат, выходу подшипника из строя. Поле допуска отверстия в подшипнике направляют в системе отверстия не «в тело», как положено в этой системе (рис. 24.1), а «в минус» (рис. 24.3). Ряд неподвижных посадок расширяется, две посадки, бывшие подвижными в системе отверстия, становятся переходными. В обозначении посадки внутреннего кольца (рис. 24.3)

$$\varnothing 40 \frac{L0}{k6}$$

где L – первая буква немецкого слова *das Lager*, 0 – номер класса точности подшипника, $k6$ – поле допуска вала в переходной посадке в системе отверстия и в неподвижной посадке подшипника.

24.5 Посадки призматической шпонки на вал и во втулку

Различают три вида шпоночного соединения по ширине: соединение свободное, соединение нормальное, соединение плотное. За основную деталь (вал) принимают шпонку, и посадки шпонки в шпоночные пазы назначают в системе вала (рис. 24.4). В свободном соединении посадки шпонки подвижные, в нормальном и плотном соединениях – переходные. Обозначения посадок в нормальном соединении см. на рисунке 24.5.

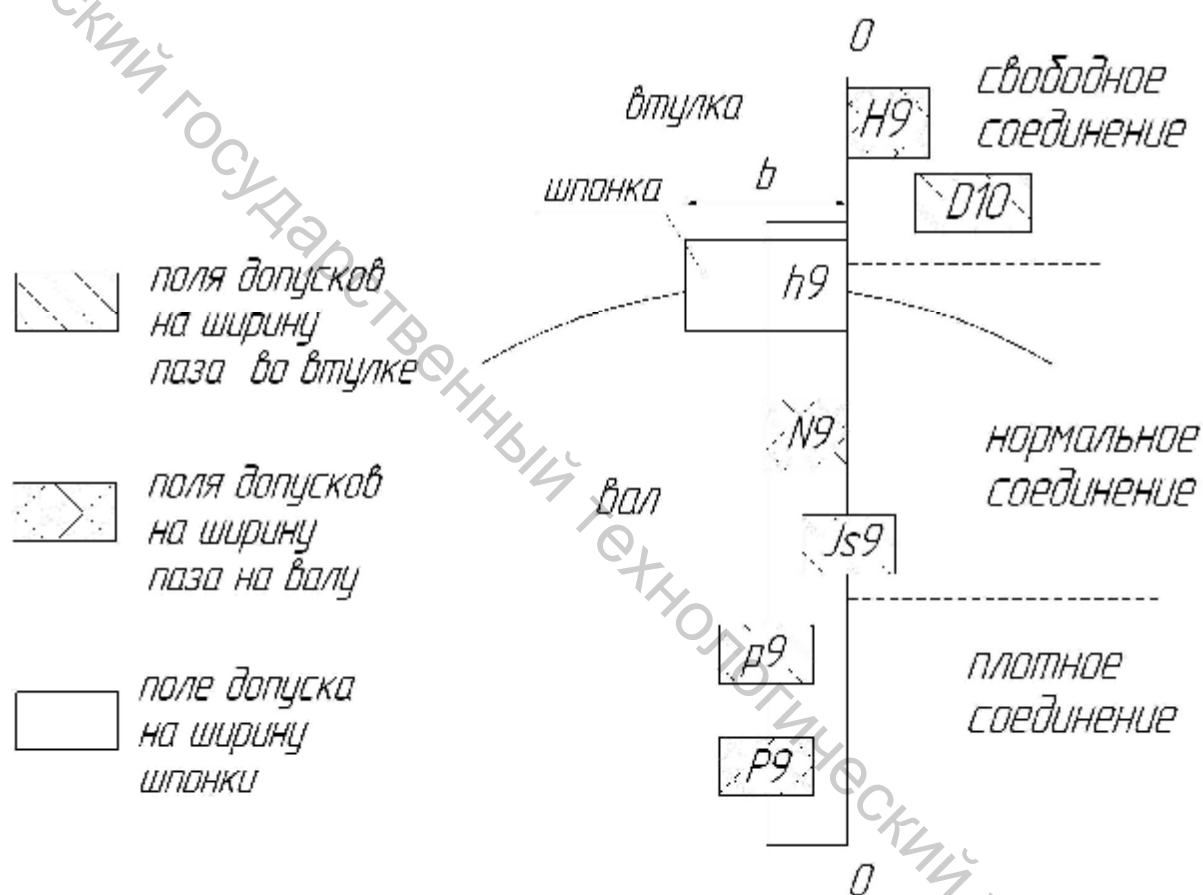


Рисунок 24.4 – Поля допуска ширины шпоночных пазов во втулке (ступице) и на валу в системе вала (шпонки)

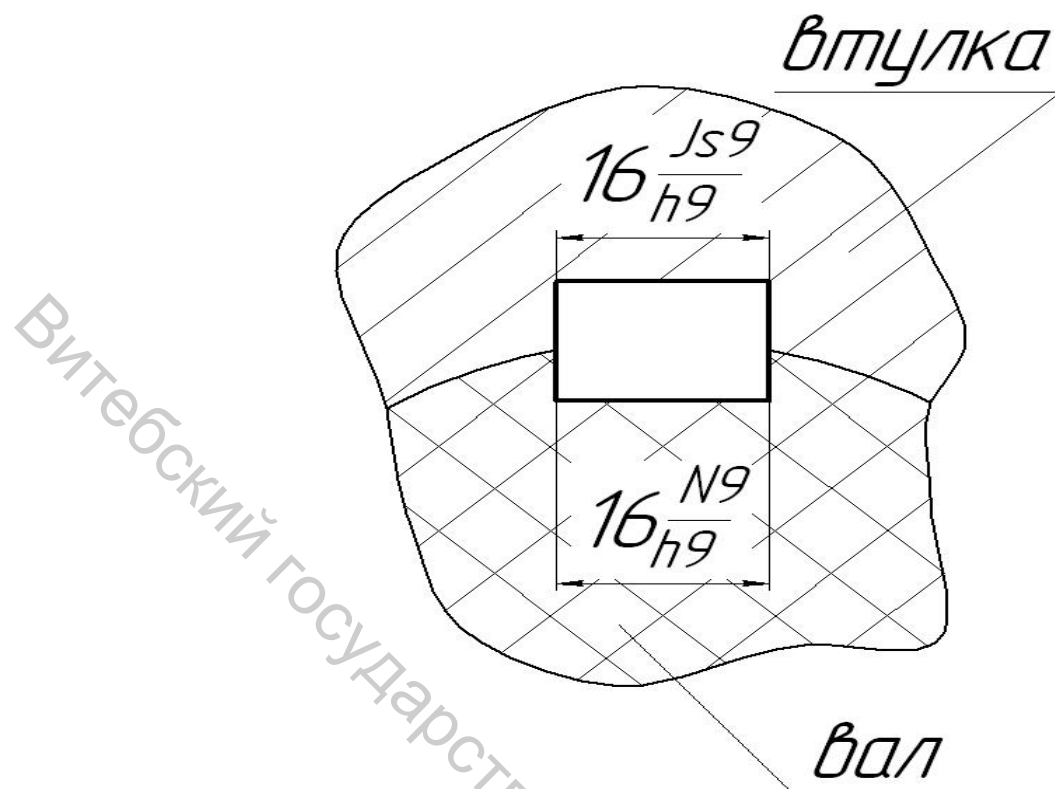


Рисунок 24.5 – Обозначения посадок шпонки в пазы во втулке и на валу

24.6 Степени точности и виды сопряжений в цилиндрических зубчатых передачах

Для зубчатых колёс и передач предусмотрено (в порядке убывания точности) 12 степеней точности. В каждой из них установлены и отдельно контролируются нормы кинематической точности, плавности работы и контакта зубьев. 6 и 7 степени точности по нормам плавности используются в ответственных передачах станков, 8 и 9 – в пределах общего машиностроения (например, в редукторах). Чем выше окружная скорость передачи, тем строже требования к точности её колёс.

Эвольвентное зацепление в зубчатой передаче, теоретически, беззазорно (двухпрофильное зацепление). В прямозубой передаче, например, боковых зазоров между нерабочими профилями зацепляющихся зубьев на общих касательных к основным окружностям нет (рис. 24.6).

Реальное зацепление – однопрофильное, боковой зазор между нерабочими профилями зацепляющихся зубьев обязателен. Он необходим для размещения слоя смазки, в целях компенсации температурных и упругих деформаций зубьев, а также погрешностей изготовления колёс и монтажа передачи. Гарантированный боковой зазор (рис. 24.7) $j_{n\min}$ определяет вид сопряжения, назначаемый независимо от степени точности передачи.

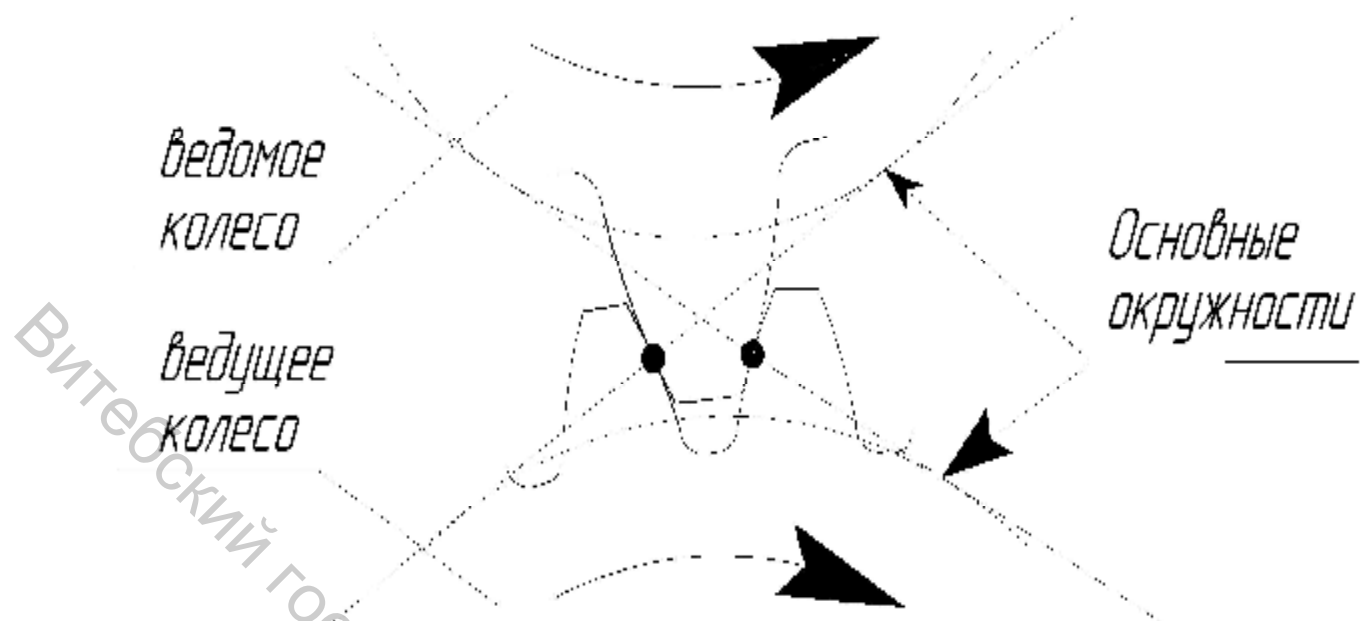


Рисунок 24.6 – Нерабочие профили зацепляющихся зубьев соприкасаются – зазора между ними нет

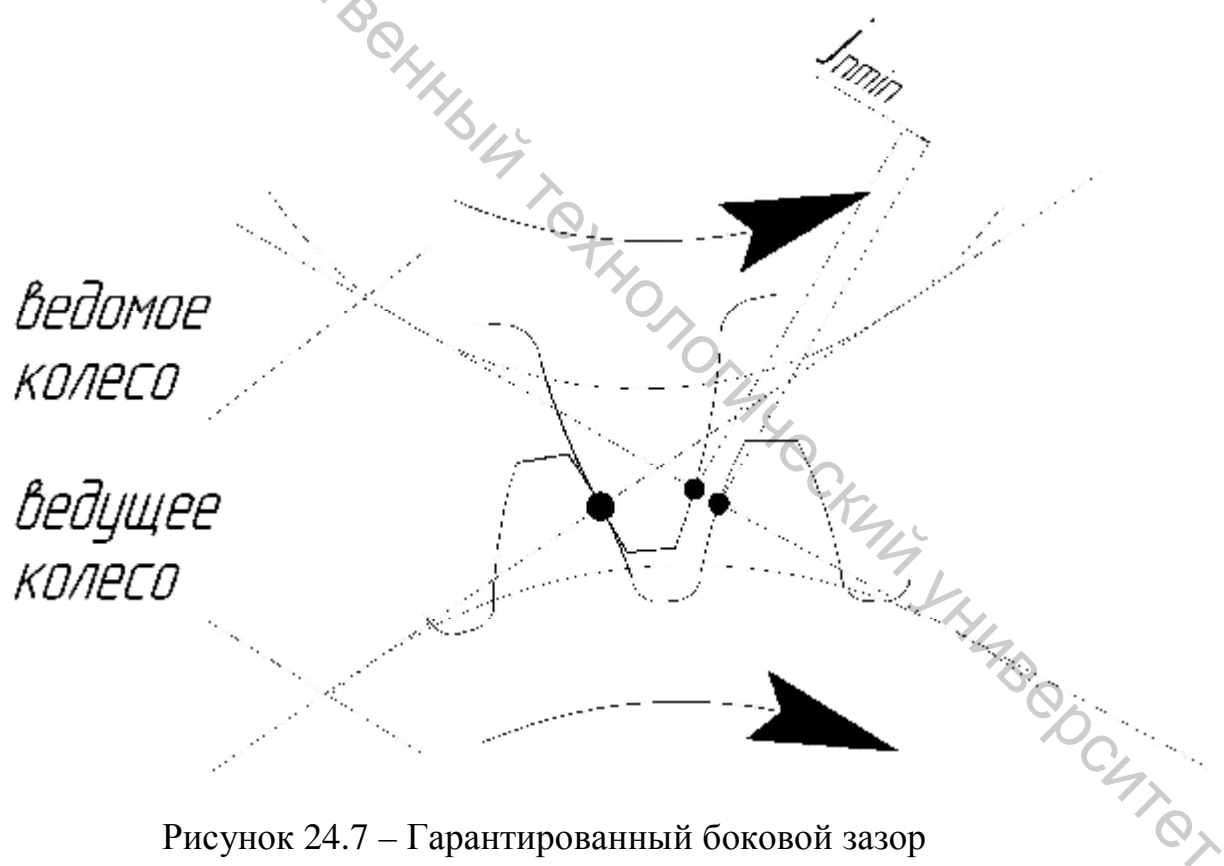


Рисунок 24.7 – Гарантированный боковой зазор

Стандарт устанавливает шесть сопряжений (рис. 24.8), обозначаемых заглавными латинскими буквами, и пять основных допусков T_{jn} на гарантированный боковой зазор (обозначаются строчными латинскими буквами).

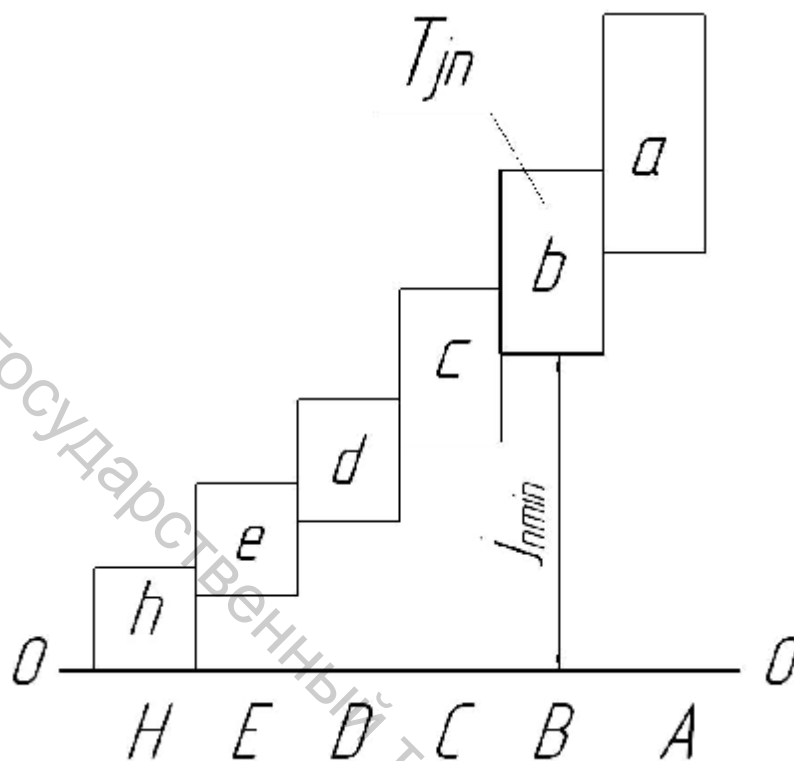


Рисунок 24.8 – Виды сопряжений зацепляющихся зубьев

В передачах общего назначения чаще других используется сопряжение В. Соответствующее обозначение степени точности на рабочем чертеже (с указанием сопряжения) – 8-В ГОСТ 1643-81.

24.7 Предельные отклонения размеров с неуказанными допусками

В технических требованиях рабочего чертежа всегда есть запись «Неуказанные предельные отклонения размеров: охватывающих (отверстий) по H14, охватываемых (валов) по h14, прочих $\pm IT14/2$ ». В этой записи H14 и h14 – поля допусков, направленных «в тело» деталей, гарантирующих собираемость; $\pm IT14/2$ (IT значит международный допуск) – допуск, симметричный относительно нулевой линии.

Кстати, поле допуска длины шпонки (вала) – h14, поле допуска длины шпоночного паза (отверстия) – H15.

ЛИТЕРАТУРА

1. Артоболевский, И. И. Сборник задач по теории механизмов и машин / И. И. Артоболевский [и др.]. – Москва : Наука, 1973. – 256 с.
2. Айзерман, М. А. Классическая механика / М. А. Айзерман. – Москва : Наука, 1974. – 367 с.
3. Артоболевский, И. И. Теория механизмов и машин / И. И. Артоболевский. – Москва : Наука, 1975. – 640 с.
4. Иванов, М. Н. Детали машин / М. Н. Иванов. – Москва : Высшая школа, 1976. – 400 с.
5. Ничипорчик, С. Н. Детали машин в примерах и задачах / С. Н. Ничипорчик [и др.]. – Минск : Высшая школа, 1981. – 432 с.
6. Кузьмин, А. В. Курсовое проектирование деталей машин : справочное пособие. Часть 2 / А. В. Кузьмин [и др.]. – Минск : Высшая школа, 1982. – 334 с.
7. Болдин, Л. А. Основы взаимозаменяемости и стандартизации в машиностроении / Л. А. Болдин. – Москва : Машиностроение, 1984. – 272 с.

Учебное издание

Федосеев Гелий Николаевич
Корнеенко Дмитрий Викторович
Ильюшенко Евгений Николаевич

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Курс лекций

Редактор А.А. Калинин
Технический редактор Л.Г. Германенко
Корректор Е.М. Богачёва
Компьютерная верстка Л.Г. Германенко

Подписано к печати _____ Формат 60х84/1/16. Бумага офсетная № 1.
Гарнитура "Таймс". Усл. печ. листов _____. Уч.-изд. листов _____.
Тираж _____ экз. Заказ № _____

Учреждение образования "Витебский государственный технологический университет" 210035, г. Витебск, Московский пр., 72

Отпечатано на ризографе учреждения образования "Витебский государственный технологический университет".
Лицензия № 02330/0494384 от 16 марта 2009 г.