Применение данной технологии получения керамики показало, что синтезированные составы имеют улучшенные физико-механические свойства: высокую плотность, увеличенную механическую прочность и большие пробивные напряжения.

Список использованных источников

1. Рубаник В. В. Перспективные материалы / В. В. Рубаник [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2009. – 542 с.

Работа выполнена в рамках ГПНИ «Функциональные и машиностроительные материалы и технологии, наноматериалы» под общим руководством д.т.н., проф. Рубаника В.В.

УДК 517.9

МИНИМИЗАЦИЯ НОРМЫ КОМПЛЕКСНОГО ПОЛИНОМА $P(z)=\frac{1}{z}+c_1+c_2z$ НА РАЗЛИЧНЫХ МНОЖЕСТВАХ

Студ. Волкова А.С., студ. Драцкая А.И., студ. Родионова К.Ю., ст. преп. Силивончик В.В.

УО «Витебский государственный технологический университет»

Рассмотрим комплексный полином $P(z)=\frac{1}{z}+c_1+c_2z$ в замкнутом ограниченном множестве M, являющемся подмножеством комплексной плоскости. Определим норму полинома $P(z)$ на этом множестве равенством

$$\| P(z)\|_M = \max_M |P(z)|$$

и рассмотрим задачу минимизации этой нормы на различных множествах.

1. Множество M является трёхточечным: $M=\{z_1,z_2,z_3\}$. Воспользуемся известным критерием минимальности нормы на конечном множестве: параметры c_1,c_2 минимизируют норму $\| P(z)\|_M$, если существуют действительные неотрицательные числа $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, при которых справедлива система равенств

$$\begin{cases} \lambda_1(\frac{1}{z_1}+c_1+c_2z_1)+\lambda_2(\frac{1}{z_2}+c_1+c_2z_2)+\lambda_3(\frac{1}{z_3}+c_1+c_2z_3)=0 \\ \lambda_1(\frac{1}{z_1}+c_1+c_2z_1)\overline{z}_1+\lambda_2(\frac{1}{z_2}+c_1+c_2z_2)\overline{z}_2+\lambda_3(\frac{1}{z_3}+c_1+c_2z_3)\overline{z}_3=0 \\ |\frac{1}{z_1}+c_1+c_2z_1|=|\frac{1}{z_2}+c_1+c_2z_2|=|\frac{1}{z_3}+c_1+c_2z_3| \\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1 \end{cases} \quad (1)$$

Система уравнений (1) содержит два комплексных и три действительных уравнения с двумя комплексными и тремя действительными неизвестными $c_1, c_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Решим эту систему в частом случае, когда

$$z_1 = a,\ z_2 = a - bi,\ z_3 = a + bi \qquad (2)$$

при действительных и положительных a и b.

Подставив z_1, z_2, z_3 в виде (2) в систему(1), получим:

$$\begin{cases} \lambda_1(\frac{1}{a} + c_1 + c_2 a) + \lambda_2(\frac{1}{a-bi} + c_1 + c_2(a-bi)) + \\ +\lambda_3(\frac{1}{a+bi} + c_1 + c_2(a+bi)) = 0 \\ \lambda_1(1 + c_1 a + c_2 a^2) + \lambda_2(\frac{a+bi}{a-bi} + c_1(a+bi) + c_2(a^2+b^2)) + \\ +\lambda_3(\frac{a-bi}{a+bi} + c_1(a-bi) + c_2(a^2+b^2)) = 0 \\ |\frac{1}{a} + c_1 + c_2 a| = |\frac{1}{a-bi} + c_1 + c_2(a-bi)| = |\frac{1}{a+bi} + c_1 + c_2(a+bi)| \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1,\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ge 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Покажем, что эта система разрешима при действительных c_1, c_2. Пусть $c_1, c_2 \in R$. Умножим первое уравнение на a и вычтем из второго, получим:

$$\lambda_2(\frac{bi}{a-bi} + c_1 bi + c_2(b^2 + abi)) + \lambda_3(\frac{-bi}{a+bi} - c_1 bi) + c_2(b^2 - abi)) = 0,$$

$$\lambda_2(\frac{a+bi}{a^2+b^2} + c_1 + c_2(a-bi)) - \lambda_3(\frac{a-bi}{a^2+b^2} + c_1 + c_2(a+bi)) = 0.$$

Равенство действительной и мнимой части даёт систему двух действительных уравнений

$$\begin{cases} (\lambda_2 - \lambda_3)(\frac{a}{a^2+b^2} + c_1 + c_2 a) = 0 \\ (\lambda_2 + \lambda_3)(\frac{b}{a^2+b^2} - c_2 b) = 0 \end{cases}$$

Из первого уравнения имеем $\lambda_2 = \lambda_3$, из второго

$$c_2 = \frac{1}{a^2+b^2}. \qquad (4)$$

Рассмотрим третье и четвёртое уравнения в системе (3).

$$|\frac{1}{a} + c_1 + c_2 a| = |\frac{1}{a-bi} + c_1 + c_2(a-bi)| = |\frac{1}{a+bi} + c_1 + c_2(a+bi)|.$$

Второе равенство означает равенство сопряжённых комплексных чисел и выполняется автоматически. Рассмотрим первое равенство и возведём его в квадрат:

$$\frac{1}{a^2}+c_1^{\ 2}+c_2^{\ 2}a^2+2c_1\frac{1}{a}+2c_2+2c_1c_2a=$$

$$=\frac{1}{a^2+b^2}+c_1^{\ 2}+c_2^{\ 2}(a^2+b^2)+2c_1\frac{a}{a^2+b^2}+2c_2\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+2c_1c_2a$$

Учитывая (4), имеем

$$c_1\left(\frac{2}{a}-\frac{2a}{a^2+b^2}\right)=-\frac{1}{a^2}-\frac{a^2}{(a^2+b^2)^2}+2\frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)^2},$$

$$c_1\frac{2b^2}{a(a^2+b^2)}=\frac{-(a^2+b^2)^2-a^4+2a^2(a^2-b^2)}{a^2(a^2+b^2)^2},\ c_1\frac{2b^2}{a(a^2+b^2)}=\frac{-4a^2b^2-b^4}{a^2(a^2+b^2)^2},$$

$$c_1=-\frac{4a^2+b^2}{2a(a^2+b^2)}. \qquad (5)$$

Рассмотрим первое и пятое уравнение в системе (3). Т.к. $\lambda_2=\lambda_3$, то

$$\begin{cases}\lambda_1\left(\frac{1}{a}+c_1+c_2a\right)+2\lambda_2\left(\frac{a}{a^2+b^2}+c_1+c_2a\right)=0\\ \lambda_1+2\lambda_2=1,\ \lambda_1,\lambda_2\geq 0.\end{cases}$$

Тогда $2\lambda_2=1-\lambda_1$, $\lambda_1\frac{b^2}{a(a^2+b^2)}=\frac{b^2}{2a(a^2+b^2)}$. Значит, $\lambda_1=\frac{1}{2}$, $\lambda_2=\lambda_3=\frac{1}{4}$ и $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3>0$. Система (3) решена.

$$\min\|P(z)\|_M=\left|\frac{1}{z_1}+c_1+c_2z_1\right|=\left|\frac{1}{a}-\frac{4a^2+b^2}{2a(a^2+b^2)}+\frac{a}{a^2+b^2}\right|=\frac{b^2}{2a(a^2+b^2)}$$

Список использованных источников

1. Иоффе, А. Д. Теория экстремальных задач / А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. – Москва : Наука, 1976. – 480 с.

УДК 539.194

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПАРАМЕТРОВ ИНТЕНСИВНОСТИ В ЛАЗЕРНЫХ СТЕКЛАХ

Студ. Ковалева В.А., доц. Дунина Е.Б., проф. Корниенко А.А.
УО «Витебский государственный технологический университет»

Для описания интенсивности спектров поглощения лазерных стекол применяют различные варианты теории интенсивности. Вопрос о наиболее адекватном варианте не решен до настоящего времени. Вместе с тем важная информация заключена в величине погрешностей параметров интенсивности. Однако алгоритмы и