РАЗДЕЛ 3.
ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

3.1 Математика и информационные технологии

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ В ОБОЛОЧКАХ БЛИЗКИХ К ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ

Никонова Т.В., к.ф.-м.н., доц., Дервоед М.А., студ., Карелин В.С., студ.

Витебский государственный технологический университет,

г. Витебск, Республика Беларусь

Реферат. *В статье описывается построение математической модели, позволяющей решить начально-краевую задачу для уравнений в частных производных, описывающих волновые формы движения тонкой упругой оболочки, срединная поверхность которой мало отличается от цилиндрической. Исследование устойчивости и вынужденных колебаний в цилиндрических оболочках, имеющих начальные погиби, обусловленные технологическими неточностями, важно, так как отклонение от цилиндрической поверхности существенно влияет на величину критической нагрузки, частоты собственных колебаний.*

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка близкая по форме к цилиндрической, волновой пакет, частота колебаний.

При проектировании тонкостенных строительных конструкций необходимо проводить анализ напряженно-деформированного состояния, возникающего в оболочке при заданных внешних нагрузках и условиях закрепления краев, а также исследовать вопросы потери устойчивости.

Рассмотрим оболочку (рисунок 1), поверхность которой отклонена от цилиндрической. Радиус кривизны оболочки считаем постоянным в окружном направлении.

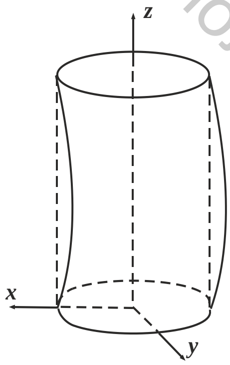

Рисунок 1 – Оболочка, близкая по форме к цилиндрической

Введем на поверхности оболочки ортогональную систему координат: s, φ, где s – продольная координата, а φ – координата по направляющей, выбираемая так, чтобы первая квадратичная форма поверхности имела вид $d\sigma^2=R^2(ds^2+d\varphi^2)$.

Пусть оболочка ограничена двумя краями и необязательно замкнута в направлении φ:

$$-\frac{l}{2} \le s \le \frac{l}{2}, \quad \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2. \tag{1}$$

Витебский государственный технологический университет

Для исследования динамики волновых пакетов в данной оболочке будем использовать систему уравнений [1], записанную в безразмерном виде:

$$\varepsilon^4 \Delta^2 W + \Delta_k F + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \quad \varepsilon^4 \Delta^2 \Phi - \Delta_k W = 0, \tag{2}$$

где операторы $\Delta z = \dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}, \quad \Delta_k z = \dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2} - \varepsilon^2 \eta''_{ss} \dfrac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} + 2\varepsilon^2 \eta''_{s\varphi} \dfrac{\partial^2 z}{\partial \varphi \partial s} + \varepsilon^2 \eta'''_{s\varphi\varphi} \dfrac{\partial z}{\partial s}$,

$\varepsilon^8=h^2/[12R^2(1-\nu^2)]$, $t = t_* T_*^{-1}$, $W=\varepsilon^4 W^* R^{-1}$, $F=\varepsilon^{-4} F^* E^{-1} h^{-1}$, $T_*^2 =\varepsilon^{-6} R^2 \rho E^{-1}$, W^* F^* – нормальный прогиб и функция напряжений, t^* – время, ρ – плотность материала, ε – малый параметр, E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона, h – толщина оболочки, T^*– характерное время, $\eta(s,\varphi)$ – функция, описывающая форма погиби. Все рассматриваемые линейные величины отнесены к радиусу R.

В качестве граничных условий рассмотрим условия шарнирного опирания:

$$W = \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} = 0 \quad \text{при} \quad s = \pm \frac{l}{2}. \tag{3}$$

Рассмотрим задачу Коши для системы (2)

$$W\big|_{t=0} = W_0^*(s,\varphi,\varepsilon)\Phi_0(\varphi,\varepsilon), \quad \dot{W}\Big|_{t=0} = i\varepsilon^{-1} V_0^*(s,\varphi,\varepsilon)\Phi_0(\varphi,\varepsilon), \quad \Phi_0(\varphi,\varepsilon) = \exp\left[i\varepsilon^{-1}\left(a_0\varphi + \frac{1}{2} i b_0 \varphi^2 \right)\right], \tag{4}$$

где i – мнимая единица, $b_0>0$, $a_0\neq 0$ – вещественные числа, такие, что $\dfrac{\partial W_0^*}{\partial \varphi}, \dfrac{\partial W_0^*}{\partial s}, \dfrac{\partial V_0^*}{\partial \varphi}, \dfrac{\partial V_0^*}{\partial s} \sim 1$ при $\varepsilon \to 0$. Перечисленные условия задают на поверхности оболочки начальный волновой пакет с изменяемостью ε^{-1} в направлении координаты φ и локализованный в окрестности образующей $\varphi=0$.

Для решения поставленной задачи будем использовать комплексный ВКБ-метод, описанный в статье [2].

Решение задачи (2)-(4) будем искать в виде

$$W = \sum_{n=1}^{N} W_n, \quad V = \sum_{n=1}^{N} V_n, \tag{5}$$

где W_n, V_n – искомые функции, локализованные в момент времени t в окрестности некоторой образующей $\varphi=q_n(t)$. Пару функций W_n, V_n будем называть n-ым волновым пакетом с центром в точке $\varphi=q_n(t)$. Здесь $q_n(t)$ дважды дифференцируемая функция и $q_n(0)=0$.

Перейдя к новой системе координат, связанной с центром qn(t) по формуле:

$$\varphi=q_n(t)+ \varepsilon^{1/2}\xi_n, \tag{6}$$

получим систему уравнений, описывающую поведение п-го волнового пакета $n = \overline{1..N}$.

Решение полученной системы с начальными условиями (4) будем искать в виде:

$$\begin{gathered} W_n = W_n^* \Phi_n, \quad F_n = F_n^* \Phi_n, \quad W_n^* = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m/2} w_{nm}(s,\xi_n,t), \quad F_n^* = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m/2} f_{nm}(s,\xi_n,t), \\ \Phi_n = \exp\left\{ i\left[\varepsilon^{-1} \int_0^t \omega_n(\tau) d\tau + \varepsilon^{-1/2} p_n(t)\xi_n + \frac{1}{2} b_n(t) \xi_n^2 \right]\right\}, \end{gathered} \tag{7}$$

где ω_n, p_n, b_n – дважды дифференцируемые по t функции, $Im\, b_n(t)>0$ для $\forall\ t>0$, а w_{nm}, f_{nm} – полиномы по ξ_n, $\omega_n(t)$ имеет смысл мгновенной частоты оболочки в окрестности центра $\varphi=q_n(t)$, $p_n(t)$ определяет изменяемость в направлении φ, а $b_n(t)$ характеризует скорость затухания амплитуды волн при удалении от центра $\varphi=q_n(t)$.

В результате подстановки выражений (5), (7) с учетом (6) в исходные уравнения приходим к последовательности краевых задач

$$\sum_{j=0}^{m} L_{nj} w_{n\,m-j} = 0, \quad w_{nm} = \frac{\partial^2 w_{nm}}{\partial s^2} = 0 \ \text{при} \ s = \pm\frac{l}{2}, \quad m = 0, 1, 2..., \tag{8}$$

Витебский государственный технологический университет

где оператор $L_{n0} = \frac{1}{p_n^4(t)}\frac{\partial^4}{\partial s^4} + \frac{2}{p_n^2(t)}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\eta''_{ss} + \left[p_n^4(t) - (\omega_n(t) - p_n(t)\dot{q}_n(t))^2 + \eta''^2_{ss}\right]$,

$L_{n1} = \left(b_n L_p + L_q + \dot{p}_n L_\omega\right)\xi_n - iL_p\frac{\partial}{\partial \xi_n}$. Здесь L_p, L_q, L_ω – производные оператора L_{n0} по переменным p_n, q_n, ω_n соответственно.

В качестве функции, описывающей отклонение срединной поверхности от цилиндрической, рассмотрим

$$\eta(s,\varphi) = m(\varphi)\left(\frac{l^2}{4} - s^2\right). \tag{9}$$

Рассмотрение условия разрешимости нулевого приближения, приводит к соотношению для мгновенной частоты ω_n:

$$\omega_n(t) = \dot{q}_n\, p_n(t) \mp H_n[p_n(t), q_n(t)], \tag{10}$$

где $H_n[p_n(t), q_n(t)] = \sqrt{p_n^4 + \left(\frac{\pi^2 n^2}{p_n^2 l^2} + 2m(\varphi)\right)^2}$ – гамильтониан.

Рассмотрение первого приближения краевых задач приводит к уравнению относительно $P_{n0}(\xi_n,t)$. Так как $Im\ b_n(t)>0$ для $\forall t$, условием существования решения в виде полинома по ξ_n является обращение функциями $p_n(t)$, $q_n(t)$ системы Гамильтона

$$\begin{cases} \dot{q}_n = H_p \\ \dot{p}_n = -H_q \end{cases} \tag{11}$$

в тождество, где $p_n(0)=0$, $q_n(0)=a_0$ – начальные условия для этих функций.

Рассмотрение условий разрешимости краевой задачи во втором приближении приводит к уравнению Риккати:

$$\dot{b}_n + H_{pp}b_n^2 + 2H_{pq}b_n + H_{qq} = 0, \tag{12}$$

позволяющему найти функции $b_n(t)$, а также к амплитудному уравнению для определения коэффициентов $P_{n0}(\xi_n,t)$.

Таким образом, с использованием асимптотического комплексного ВКБ-метода, исходная двумерная начально-краевая задача сведена последовательности одномерных начально-краевых задач. Построенное решение задает на поверхности оболочки бегущие в окружном направлении волновые пакеты. Получена явная формула для мгновенной частоты бегущих колебаний, а так же функция Гамильтона, определяющая динамику волновых пакетов.

Список использованных источников

1. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы. – М.: Наука. Физматлит, 1995.– 320 с.
2. Михасев Г.И. Локализованные семейства изгибных волн в некруговой цилиндрической оболочке с косыми краями // Прикл. мат. и мех.– 1996.– Т. 60, № 4.– С. 635-643.

Витебский государственный технологический университет