

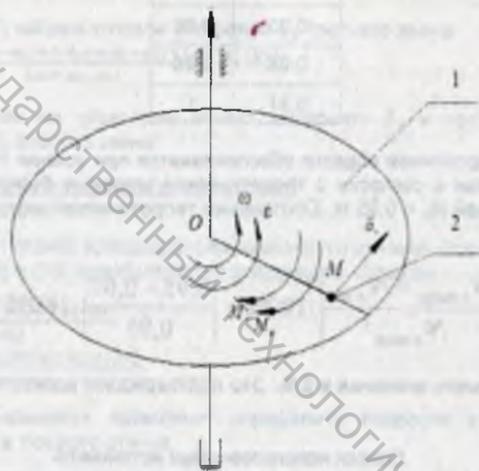
УДК 531.8

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ НАПРАВЛЕНИЯ МОМЕНТОВ СИЛ ИНЕРЦИИ НА РАСЧЕТ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА ТЕЛА, ПЕРЕМещаЮЩЕГОСЯ В РАДИАЛЬНОМ НАПРАВЛЕНИИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА

д.т.н., проф. Локтионов А.В.

Витебский государственный технологический университет

Рассмотрим движение системы тел при их вращении вокруг неподвижной оси (рисунок) при условии, что одно из тел системы перемещается в радиальном направлении, то есть при условии, что момент инерции системы является величиной переменной.



Рисунок

Система состоит из двух тел, одно из которых представляет собой диск, а второе – тело точечной массы. Диск характеризуется моментом инерции I_0 , тело точечной массы – массой m . Тело 2 способно перемещаться в радиальном направлении ($r = OM$) по диску 1.

Момент инерции системы $I = I_0 + mr^2$. Кинетический момент системы $L = I\omega$,

дифференцируя, получим $\frac{dL}{dt} = 2m\dot{r}\omega = 2m\dot{r}v$. Момент кориолисовых сил

инерции при движении тела 2 $M_k = 2m(\omega\dot{r})r = 2m\dot{r}\omega r$

Следовательно, $\frac{dL}{dt} = M_k$. Полученная формула определяет взаимосвязь геометрии

масс с проявлением сил инерции. Установлено, что изменение осевого момента инерции, наряду с угловой скоростью, также является причиной появления моментов сил инерции. Изменение осевого момента инерции вызвано перемещением точки в радиальном направлении.

Рассмотрим влияние сил инерции отдельно на каждое тело системы.

Кинетический момент первого тела $L_1 = I_0 \omega = I_0 \frac{L}{I}$; второго тела

$L_2 = (mv) \cdot r = mr^2 \omega = mr^2 \frac{L}{I}$. Тогда $I_0 \frac{L}{I} + mr^2 \frac{L}{I} = L$. Следовательно, соблюдается условие $L_1 + L_2 = L$.

При перемещении тела 2 на тело 1 действует кориолисова сила инерции и сила инерции углового ускорения. Производная от кинетического момента первого тела

$$\frac{dL_1}{dt} = -M_k - M_i, \text{ где } M_k = \frac{iL}{I}.$$

Моменты реакций связей и силы тяжести равны нулю. Найдем момент M_i сил инерции углового ускорения. При этом

$$a_r = \varepsilon r = \frac{d\omega}{dt} r; \Phi_i = ma_r = m \left(\frac{d\omega}{dt} \right) r; M_i = (ma_r) \cdot r = m \frac{d\omega}{dt} r^2, \text{ где } \omega = \frac{L}{I};$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{L}{I} \right) = L \frac{d}{dt} (I^{-1}) = -LI^{-2} \dot{I} = -\frac{\dot{I}}{I^2} L.$$

$$\text{Следовательно, } M_i = -m \left(\frac{\dot{I}}{I^2} L \right) r^2 = -\frac{\dot{I}}{I^2} mr^2 L.$$

Рассмотрим влияние направления моментов сил инерции на расчет кинетического момента тела 2 при условии, что момент M_k кориолисовых сил инерции и момент M_i сил инерции углового ускорения направлены так же, как и при рассмотрении влияния сил инерции на тело 1 при перемещении тела 2 в радиальном направлении. Тогда производная от кинетического момента второго тела

$$\frac{dL_2}{dt} = -M_k - M_i = -\frac{iL}{I} + \frac{\dot{I}}{I^2} mr^2 L = -\frac{iL}{I} + \frac{\dot{I}}{I^2} L (mr^2 + I_0 - I_0) = -\frac{iL}{I} + \frac{\dot{I}L}{I} - \frac{\dot{I}}{I^2} LI_0 = -\frac{iLI_0}{I^2}$$

Следовательно, $\frac{dL_2}{dt} = -\frac{iLI_0}{I^2}$. Решая данное уравнение $L_2 = -I_0 L \int \frac{\dot{I}}{I^2} dt$ и введя замену $\frac{\dot{I}}{I} = Z; \frac{1}{I^2} dt = -dZ$, получим $L_2 = I_0 L \int dZ = I_0 LZ + c = \frac{I_0 L}{I} + c$.

При $t = 0$ $L_2 = \frac{mr^2 L}{I_0 + mr^2}$. Откуда $c = \frac{L(mr^2 - I_0)}{I_0 + mr^2}$, а

$$L_2 = \frac{LI_0}{I} + \frac{L(mr^2 - I_0)}{I_0 + mr^2} = \frac{LI_0}{I} + \frac{Lmr^2}{I} - \frac{LI_0}{I} = \frac{L(I_0 + mr^2)}{I} - \frac{LI_0}{I} = L - L_1.$$

Из расчета следует, что при отрицательных значениях моментов сил инерции соблюдается равенство $L_2 = L - L_1$ и условие $L_1 + L_2 = L$.

При расчете производной от кинетического момента второго тела из выражения $\frac{dL_2}{dt} = M_k + M_i$ получим, что $L_2 = L - L_1$ и соблюдается условие $L_1 + L_2 = L$.

Из рассмотренного следует, что при оценке влияния направления моментов сил инерции на тело 2, перемещающееся в радиальном направлении тела 1, и расчете его кинетического момента необходимо знать только численные значения моментов сил инерции M_k и M_i . Как при положительных, так и отрицательных значениях моментов сил инерции для тела 2 точечной массы, участвующего в сложном движении, соблюдается равенство $L_1 + L_2 = L$.

Следовательно, направления моментов сил инерции для второго тела не влияют на расчет его кинетического момента $L_2 = L - L_1$.