ченной линией уровня $f(x; y) = r^2$, что равносильно $|P_*(z)| = r$. Аналогичный вывод можно сделать для треугольника B с вершинами $z_2 = a - ib$, $z_3 = a + ib$, $z_6 = \frac{a^2 + b^2}{a}$. Поэтому

$$\min \|P(z)\|_A = \min \|P(z)\|_B = \|P_*(z)\|_A = \|P_*(z)\|_B = r$$

и завершена оптимизация на указанных прямоугольнике и треугольнике.

Список использованных источников

1. Иоффе, А. Д. Теория экстремальных задач / А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. – Москва : Наука, 1976. – 480 с.
2. Лаврентьев, В. А. Методы теории функции комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – Москва : Наука, 1977. – 456 с.

УДК 517.925

О ЕДИНСТВЕННОСТИ УСТОЙЧИВОГО ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА ОДНОЙ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ ЛЬЕНАРА

Студ. Сафронов К.С., доц. Денисов В.С., ст. преп. Завацкий Ю.А.

УО «Витебский государственный технологический университет»

Рассматривается система уравнений

$$\frac{dx}{dt} = Ay^5 + By + f(x), \quad \frac{dy}{dt} = g(x), \quad (A > 0, B > 0). \quad (1)$$

При $A = 0$, $B = 1$ получается система, которую называют системой Льенара (или системой нелинейных колебаний). Она широко изучалась на предмет существования, единственности предельного цикла, оценки числа предельных циклов, их расположения. В статьях [1, 2] были найдены достаточные условия существования, по крайней мере, двух предельных циклов системы нелинейных колебаний.

В работе [3] были получены более общие теоремы существования предельных циклов. В статье [4] были найдены достаточные условия единственности устойчивого предельного цикла системы Льенара, охватывающего конечное число особых точек.

Для систем, обобщающих систему Льенара, результатов намного меньше. В работе [5] доказана теорема существования, по крайней мере, двух предельных циклов системы с кубической нелинейностью. В тезисах [6] опубликован результат существования по крайней мере одного устойчивого предельного цикла системы (1). В данной статье методами работ [2, 4] для системы (1) доказана единственность устойчивого предельного цикла, окружающего, по крайней мере, один неустойчивый предельный цикл.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены, непрерывны, обеспечивают существование и единственность решений системы (1) и удовлетворяют условиям:

Функции $f(x)$ и $g(x)$ нечётные.

Существуют точки x_1 , x_3 , такие что $f(0) = f(x_1) = g(0)$;

$f(x) < 0$ на $(0; x_1)$; $f(x) > 0$ на $(x_1; x_3)$; $g(x) < 0$ на $(0; +\infty)$.

Введём обозначения:

$$G(x) = \int_0^x -g(s) ds; \quad M = \max_{[0; x_1]} |f(x)|; \quad \varphi(x) = \int_0^x -g(s) f(s) ds \quad (2)$$

$$V(x; y) = \frac{Ay^6}{6} + \frac{By^2}{2} + G(x) \quad (3)$$

При $A > 0$, $B > 0$ и уравнение $Ay^5 + By - u = 0$ имеет один действительный корень. Будем обозначать его $y(u) = d_u$. В дальнейшем будем предполагать, что выполнено условие

$$G(x) \rightarrow +\infty \text{ при } x \rightarrow +\infty$$

Лемма 1. Если выполнены условия I, II, III, то семейство кривых $V(x; y) = C$ есть топографическая система кривых Пуанкаре, симметричных относительно оси абсцисс.

(Доказана в работе [6])

Лемма 2. Если выполнены условия I, II, III, то система (1) в полуплоскости $x > 0$ не имеет траекторий вида

$$x(t) \rightarrow C \ (C > 0), \ y(t) \rightarrow +\infty \ [y(t) \rightarrow -\infty] \text{ при } t \rightarrow -\infty \ [t \rightarrow +\infty]. \quad (4)$$

$$x(t) \rightarrow +\infty, \ y(t) \rightarrow b \text{ при } t \rightarrow +\infty. \quad (5)$$

Теорема 1. Если выполнены условия I, II, III и

$\exists \gamma > 1$, $\exists x_2 \in (x_1; x_3)$ такие, что выполнены неравенства

$$\varphi(x_2) \geq \frac{-4\varphi(x_1)}{(\gamma-1)^2}, \quad (6)$$

$$G(x_3) - G(x_2) \geq \frac{A}{6}d^6 + \frac{B}{2}d^2 + 2Md, \text{ где } d = d_{\gamma M}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-f(x)) > 0, \ f(x_3) = 0, \ f'(x) < 0 \text{ при } x \geq x_3,$$

то система (1) имеет, по крайней мере, один неустойчивый предельный цикл, лежащий в полосе $-x_3 \leq x \leq x_3$, и единственный устойчивый предельный цикл, охватывающий неустойчивый.

Доказательство. Из неравенства (6) при $\gamma > 1$ следует неравенство $\varphi(x_2) \geq \frac{2\varphi(x_1)}{(1-\gamma)}$,

тогда из [6] следует существование неустойчивого предельного цикла. Существование устойчивого предельного цикла проводится аналогично работе [5], заменой во всех выкладках функции $\psi(y) = Ay^3 + By$ на функцию $\psi(y) = Ay^5 + By$. Единственность устойчивого предельного цикла доказывается методом сближения интегральных кривых. Рассмотрим две произвольные траектории $L_j(t) [y = y_j(x)]$, $j = 1, 2$, проходящие через точки $(x_3; y_j^+(x_3))$, для которых выполняются условия $y_2^+(x_3) > y_1^+(x_3) > 0$. Полутраектории $L_j(t)$ в силу поля направлений, отсутствия траекторий вида (4), выходят на ось ординат при $y > 0$ в точках $A_j(0; y_j^+(0))$, где $y_2^+(0) > y_1^+(0) > d$, а полутраектории $L_j^-(t)$ в силу поля направлений и отсутствия траекторий вида (4) и (5) выходят на ось ординат при $y < 0$ в точках $B_j(0; y_j^-(0))$, где $y_2^-(0) < y_1^-(0) < -d$. При этом на отрезке $[0; x_2]$ выполнены неравенства $y_2^+(x) > y_1^+(x) > d$ и $y_2^-(x) < y_1^-(x) < -d$.

В силу монотонного возрастания функции $\psi(y) = Ay^5 + By$, отрицательности $g(x)$ и положительности A и B будем иметь:

$$\frac{d}{dx}(\psi(y_1^+(x)) - \psi(y_2^+(x))) = \frac{(5A(y_1^+)^4 + B)g(x)[A(y_2^+)^5 + By_2^+ - A(y_1^+)^5 - By_1^+]}{[A(y_1^+)^5 + By_1^+ + f(x)][A(y_2^+)^5 + By_2^+ + f(x)]} < 0, \quad (7)$$

откуда

$$r = \psi(y_1^+(x_1)) - \psi(y_2^+(x_1)) = \min_{[0; x_1]}[\psi(y_1^+(x)) - \psi(y_2^+(x))] = \max_{[x_1; x_2]}[\psi(y_1^+(x)) - \psi(y_2^+(x))] \quad (8)$$

Производная функции (2) по аргументу x в силу системы (1) имеет вид:

$$\frac{dV}{dx} = \frac{-f(x)g(x)}{Ay^5 + By + f(x)} = \frac{-f(x)g(x)}{\psi(y) + f(x)} \quad (9)$$

Будем обозначать $V(b; y_j^+(b)) - V(a; y_j^+(a)) = V_j^+ \Big|_a^b$ при $y > 0$ и $V_j^- \Big|_a^b$ при $y < 0$. Интегрируя равенство (9) вдоль $L_j(t)$ на $[0; x_1]$ и $[x_1; x_2]$ с учетом (8) находим оценки в полуплоскости $y > d$.

$$V_2^+ \Big|_0^{x_1} - V_1^+ \Big|_0^{x_1} < \frac{2\varphi(x_1)}{[\psi(y_2^+(x_1)) - M][\psi(y_1^+(x_1)) - M]}$$

$$V_2^+ \Big|_{x_1}^{x_2} - V_1^+ \Big|_{x_1}^{x_2} < \frac{2[\varphi(x_2) - \varphi(x_1)]}{[\psi(y_2^+(x_1)) + M][\psi(y_1^+(x_1)) + M]}$$

Складывая последние два неравенства и учитывая неравенство (6) теоремы, получим оценку разности изменений значений функции $V(x; y)$ вдоль траектории $L_j(t)$ на отрезке $[0; x_2]$ в полуплоскости $y \geq d$.

$$V_2^+ \Big|_0^{x_2} - V_1^+ \Big|_0^{x_1} < 2\varphi(x_1) \left[\frac{1}{(\gamma-1)^2 M^2} - \frac{1}{(\gamma+1)^2 M^2} \right] = 0. \quad (10)$$

Для полуплоскости $y < -d$ аналогично доказывается неравенство $V_2^- \Big|_{x_2}^0 - V_1^- \Big|_{x_2}^0 < 0$.

Рассмотрим конечную область σ , ограниченную контуром Γ , состоящим из дуг траекторий $L_j(t)$ при $x \geq x_3$ и вертикальных отрезков $[N_2; N_1]$, $[0; x_2]$ прямой $x = x_3$, где $M_j(x_3; y_j^+(x_3))$, $N_j(x_3; y_j^+(x_3))$, $j = 1, 2$. Применим к этой области формулу Грина:

$$\int_{\Gamma} f(x) dy = \iint_{\sigma} f'(x) dx dy.$$

Двойной интеграл в правой части формулы Грина отрицателен, так как подынтегральная функция по условию (V) теоремы отрицательна. Тогда вычисляя криволинейный интеграл, получим оценку

$$[V_2^-(x_3; y_2^-(x_3)) - V_2^+(x_3; y_2^+(x_3))] - [V_1^-(x_3; y_1^-(x_3)) - V_1^+(x_3; y_1^+(x_3))] < 0.$$

Далее, складывая все полученные оценки, аналогично [2, 4], получим окончательную оценку.

$$[V_2^-(0; y_2^-(0)) - V_2^+(0; y_2^+(0))] - [V_1^-(0; y_1^-(0)) - V_1^+(0; y_1^+(0))] < 0. \quad (11)$$

Пусть $L_j(t) [y = y_j(x)]$ — устойчивый предельный цикл. Тогда в силу леммы 1 $V^-(0; y_1^-(0)) = V^+(0; y_1^+(0))$. Из неравенства (11) следует, что $V_2^-(0; y_2^-(0)) < V_2^+(0; y_2^+(0))$. В силу симметрии кривых $V(x; y) = C$ относительно оси абсцисс — $y_2^-(0) < y_2^+(0)$, т. е. интегральная кривая $L_2(t) [y = y_2(x)]$ не может быть предельным циклом.

Теорема доказана.

Список использованных источников

1. Кушков, Н. Н. Некоторые теоремы о предельных циклах для системы нелинейных колебаний / Н. Н. Кушков // УМН. — 1958. — Т.13. - вып. 2 (80). — С. 203-209.
2. Кушков, Н. Н. О предельных циклах системы нелинейных колебаний / Н. Н. Кушков // Труды Ленинградского технологического института целлюлозно-бумажной промышленности. — 1962. — Вып.10. — С. 135-143.
3. Денисов, В. С. Предельные циклы одной автономной системы / В. С. Денисов // Дифференциальные уравнения. — 1979. — Т.15. — № 9. — С.1572-1579.
4. Денисов, В. С. О единственности устойчивого предельного цикла системы нелинейных колебаний с конечным числом особых точек / В. С. Денисов, С. И. Примакова // Вестник Витебского государственного технологического университета. Вып.1 / УО «ВГТУ». — Витебск, 1995. — С. 85-88.
5. Денисов, В. С. О существовании предельных циклов одной динамической системы с кубической нелинейностью / В. С. Денисов, О. О. Примакова // Дифференциальные уравнения и системы компьютерной алгебры: материалы Международной конференции, г. Брест, 2005. В 2-х ч. — Ч. 1. — Минск : БГПУ, 2005. — С. 102-107.
6. Мачихо, А. А. Существование предельных циклов систем, обобщающих систему нелинейных колебаний / А. А. Мачихо, Е. В. Назаренко, В. С. Денисов. Тезисы докладов XLII научно-технической конференции преподавателей и студентов университета. — Витебск, 2009. — С. 38.

УДК 004.31

ПОДГОТОВКА СПЕЦИАЛИСТОВ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ В ОБЛАСТИ МАТЕМАТИКИ

Доц. В.И. Попечиц

НИУ "Институт прикладных физических проблем имени А.Н.Севченко" БГУ

Прикладная математика, информатика, информационные технологии, промышленные технологии, системы и технологии искусственного интеллекта в последние годы стремительно развиваются, совершенствуются и модернизируются [1 – 7]. Быстрыми темпами происходит обновление, автоматизация и интеллектуализация промышленного оборудования. Вследствие этого значительно повышаются требования к специалистам инженерно-технологического и инженерно-технического профиля. Для того, чтобы, получив инженерно-технологическое и/или инженерно-техническое образование, хорошо ориентироваться в новой технике и новых технологиях, успешно эксплуатировать современное интеллектуальное оборудование, студенты в процессе обучения в инженерно-технологическом вузе должны получить достаточно широкую и глубокую фундаментально-ориентированную подготовку и навыки практического применения теоретических знаний. Математическое образование технолога и инженера является основой для освоения дисциплин естественнонаучного, технологического и технического направления. Общеизвестно, что математика – язык и логика всех естественных, технологических и техниче-