МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Учреждение образования
«Витебский государственный технологический университет»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. РЯДЫ

Практикум

для студентов первого курса специальностей
6-05-0611-04 «Электронная экономика»,
6-05-0611-01 «Информационные системы и технологии»

Витебск
2025

УДК 517 (076.1) (075.8)

Составители:

А. В. Коваленко
А. П. Дмитриев

Одобрено кафедрой «Математика и информационные технологии»
УО «ВГТУ», протокол № 2 от 01.10.2025.

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом
УО «ВГТУ», протокол № 2 от 31.10.2025.

Математический анализ. Дифференциальные уравнения. Ряды : практикум / сост. А. В. Коваленко, А. П. Дмитриев. – Витебск : УО «ВГТУ», 2025. – 99 с.

Практикум содержит основные теоретические сведения, задания к практическим занятиям, примеры для самостоятельного выполнения заданий, вопросы к экзамену или зачёту по четырём разделам курса «Математический анализ» для студентов специальностей 6-05-0611-04 «Электронная экономика», 6-05-0611-01 «Информационные системы и технологии»: дифференциальные уравнения, системы дифференциальных уравнений, числовые ряды, функциональные ряды. Данное издание предназначено для проведения практических занятий у студентов первого курса факультетов «Информационные технологии и робототехника» и «Экономика и бизнес-управление», а также может быть использовано в ходе изучения указанных тем студентами заочной и дистанционной форм обучения.

УДК 517 (076.1) (075.8)

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Учебный практикум составлен на основе практических занятий, которые авторы проводили на протяжении многих лет работы преподавания дисциплины «Математический анализ» в Витебском государственном технологическом университете. Приведённый материал проверен на нескольких поколениях студентов и содержит необходимые сведения для будущих выпускников. Большинство рассматриваемых задач носят практическую направленность и имеют тесную связь с дисциплинами, которые будут изучать студенты в следующих семестрах.

Настоящие учебно-методические материалы предназначены для студентов факультетов «Информационные технологии и робототехника» и «Экономика и бизнес-управление» УО «ВГТУ», которые изучают курс «Математический анализ». В работе приведён краткий теоретический материал для проведения практических занятий по указанному выше курсу. Практикум написан в соответствии с учебной программой дисциплины «Математический анализ».

В работе выделяются десять тем курса «Математический анализ». Каждая тема представляет собой методический материал для проведения преподавателем практических занятий и выполнения контролируемой самостоятельной работы студентами. В начале каждого раздела приведён краткий теоретический материал (определения, теоремы, формулы), который необходим студенту для решения задач по рассматриваемой теме. В то же время этих сведений недостаточно для итоговой аттестации по предмету. Прежде чем приступать к решению задач практического занятия или выполнения домашнего задания, студенту необходимо изучить теоретический курс лекционного материала или обратиться к академическим изданиям для более детального изучения разделов курса, которые его интересуют. Наименование тем курса, а также их структура построены в соответствии с учебной программой дисциплины «Математический анализ» для студентов специальностей 6-05-0611-04, 6-05-0611-01. Некоторые темы курса «Математический анализ» могут применяться на практических занятиях студентами всех видов специальностей и форм обучения вуза в процессе изучения других дисциплин.

На кафедре «Математика и информационные технологии» по дисциплине «Математический анализ» разработана тестовая форма контроля знаний с применением компьютерной техники. Предложенная методическая разработка позволяет подготовиться студентам к прохождению теста как по отдельным темам курса, так и по всему материалу.

Данный практикум может быть использован преподавателем для проведения практических занятий у студентов не только дневной формы обучения, но и заочной. Студенты заочной формы обучения могут применять теоретический и практический материалы практикума для самостоятельной работы по предмету и выполнению контрольных заданий.

ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ ПО КУРСУ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. РЯДЫ» ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ 6-05-0611-04, 6-05-0611-01

1. Дифференциальные уравнения (общие понятия). Теорема существования задачи Коши.

2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.

4. Решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка методом подстановки Бернулли.

5. Решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка методом вариации произвольной постоянной.

6. Решение дифференциальных уравнений первого порядка, сводящихся к однородным и линейным уравнениям.

7. Уравнения в полных дифференциалах.

8. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающих понижение порядка.

9. Свойства решений однородных линейных дифференциальных уравнений n-ого порядка.

10. Линейная зависимость и линейная независимость системы решений однородных линейных дифференциальных уравнений n-ого порядка (ОЛДУ). Определитель Вронского. Теорема об общем решении ОЛДУ.

11. Решение однородных линейных дифференциальных уравнений n-ого порядка с постоянными коэффициентами (случай действительных корней характеристического уравнения).

12. Решение однородных линейных дифференциальных уравнений n-ого порядка с постоянными коэффициентами (случай комплексных корней характеристического уравнения).

13. Решение неоднородных линейных дифференциальных уравнений n-ого порядка с постоянными коэффициентами методом вариации произвольной постоянной.

14. Решение неоднородных линейных дифференциальных уравнений n-ого порядка с постоянными коэффициентами с правой специальной частью.

15. Системы дифференциальных уравнений. Нормальные системы. Теорема существования и единственности задачи Коши для нормальных систем дифференциальных уравнений.

16. Решение нормальной системы дифференциальных уравнений методом исключений.

17. Свойства решений однородных линейных систем дифференциальных уравнений.

18. Решение однородных линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (случай действительных корней характеристического уравнения).

19. Решение однородных линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (случай комплексных корней характеристического уравнения).

20. Решение неоднородных линейных систем дифференциальных уравнений.

21. Числовой ряд. Сходимость числового ряда. Примеры сходящихся рядов (геометрический и гармонический ряды).

22. Необходимый признак сходимости и достаточный признак расходимости числового ряда. Свойства сходящихся рядов.

23. Признак сравнения для рядов с положительными членами.

24. Предельный признак сравнения для рядов с положительными членами.

25. Предельный признак Даламбера для рядов с положительными членами.

26. Предельный радикальный признак Коши для рядов с положительными членами.

27. Интегральный признак Коши для рядов с положительными членами.

28. Знакопеременные ряды. Условная и абсолютная сходимость знакопеременного ряда.

29. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница и следствие из него.

30. Функциональные ряды. Область сходимости функционального ряда.

31. Степенной ряд. Теорема Абеля и следствие из неё.

32. Степенной ряд. Радиус и область сходимости степенного ряда.

33. Теорема существования и единственности разложения функции в степенной ряд. Необходимое и достаточное условие разложения функции в степенной ряд.

34. Разложение элементарных функций в степенной ряд.

35. Вычисление приближённых значений функции с помощью степенных рядов.

36. Нахождение и вычисление интегралов с помощью степенных рядов.

37. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.

38. Периодические функции и их свойства. Понятие числового тригонометрического ряда.

39. Ортогональные системы тригонометрических функций.

40. Тригонометрический ряд Фурье.

41. Разложение четных и нечетных функций в ряд Фурье.

42. Сходимость тригонометрического ряда. Теорема о разложении периодической функции в тригонометрический ряд Фурье.

43. Разложение в ряд Фурье функции, заданной на промежутке $(0;l)$.

ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

1 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Содержание: дифференциальные уравнения (общие понятия), дифференциальные уравнения первого порядка (общие понятия), дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными, однородные дифференциальные уравнения первого порядка, дифференциальные уравнения, приводящиеся к однородным.

1.1 Теоретический материал по теме практического занятия

1.1.1 Дифференциальные уравнения (общие понятия)

Использование дифференциальных уравнений – наиболее эффективное и распространённое средство решения прикладных задач. Однако разнообразные приложения теории обыкновенных дифференциальных уравнений требуют в первую очередь знания соответствующих теоретических положений и законов различных областей знаний. Составить дифференциальное уравнение означает найти зависимость между аргументом, функцией и её производной.

Определение 1.1.1.1 *Дифференциальным уравнением* называется уравнение, которое связывает независимую переменную, функцию и её производные.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной.

$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$ – общий вид дифференциального уравнения n-го порядка.

$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right)$ – нормальный вид дифференциального уравнения n-го порядка.

Решением дифференциального уравнения называется n раз дифференцируемая функция, которая при подстановке в это уравнение обращает его в тождество.

Функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ называется общим решением дифференциального уравнения, а функция $\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$ – общим интегралом дифференциального уравнения, где $C_i = Const, i = \overline{1, n}$.

Теорема 1.1.1.1 (Коши). Если функция $f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right)$ и её частные производные по аргументам $y, y', y'', ..., y^{(n-1)}$ определены и непрерывны в окрестности точки $\left(x_0, y_0, y_0', y_0'', ..., y_0^{(n-1)}\right)$, то в некоторой окрестности точки x_0

существует единственное решение уравнения $y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right)$, удовлетворяющее условиям:

$$y(x_0) = y_0,\; y'(x_0) = y'_0,\; ...,\; y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \qquad (1.1.1.1)$$

Условия (1.1.1.1) называются начальными условиями, а задача нахождения решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего этим условиям − задачей Коши для дифференциального уравнения.

1.1.2 Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, которое связывает независимую переменную, функцию и её производную.

Общий вид дифференциального уравнения 1-го порядка: $F(x, y, y') = 0$.

Нормальный вид дифференциального уравнения 1-го порядка: $y' = f(x, y)$.

Общее решение дифференциального уравнения 1-го порядка: $y = \varphi(x, C)$.

Общий интеграл дифференциального уравнения 1-го порядка: $\Phi(x, y, y') = 0$.

Теорема 1.1.2.1 (Коши). Если функция $f(x, y)$ и её частная производная $f'_y(x, y)$ определены и непрерывны в окрестности точки (x_0, y_0), то в некоторой окрестности точки x_0 существует единственное решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$.

С геометрической точки зрения это означает, что через каждую точку (x_0, y_0) проходит единственная интегральная кривая дифференциального уравнения.

Существуют различные виды дифференциальных уравнений первого порядка. Найдём общие решения основных типов этих уравнений.

1.1.3 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными представляет собой уравнение, левая часть которого является дифференциалом функции от одной переменной, а правая часть – от другой переменной.

Определение 1.1.3.1 Уравнение вида

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0, \qquad (1.1.3.1)$$

где $M_1(x), N_1(y), M_2(x), N_2(y)$ – заданные функции, называется *дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными*.

Если функции $N_1(y) \neq 0$ и $M_2(x) \neq 0$, то, разделив обе части уравнения (1.1.3.1) на произведение $N_1(y) \cdot M_2(x) \neq 0$, получим равносильное уравнение

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0. \qquad (1.1.3.2)$$

Проинтегрировав уравнение (1.1.3.2), находим общий интеграл дифференциального уравнения (1.1.3.1):

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C. \qquad (1.1.3.3)$$

Решение уравнений $N_1(y) = 0$ и $M_2(x) = 0$ являются особыми решениями дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

1.1.4 Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Однородное дифференциальное уравнение представляет собой уравнение, в котором все члены, содержащие неизвестные функции и их производные, имеют одинаковую общую степень.

Определение 1.1.4.1 Функция $f(x, y)$ называется *однородной* функцией измерения α относительно переменных x и y, если справедливо тождество

$$f(tx, ty) = t^{\alpha} f(x, y), \ \forall t \in R, t \neq 0.$$

Определение 1.1.4.2 Дифференциальное уравнение первого порядка

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \qquad (1.1.4.1)$$

называется *однородным*, если $P(x, y), Q(x, y)$ – однородные функции одного и того же измерения.

Разрешив уравнение (1.1.4.1) относительно производной, получим

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}. \qquad (1.1.4.2)$$

Поскольку $P(x,y), Q(x,y)$ – однородные функции одного и того же измерения, то функция, стоящая в правой части уравнения (1.1.4.2), является однородной функцией нулевого измерения. Следовательно, $\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Таким образом, однородное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1.1.4.3}$$

Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены $\dfrac{y}{x} = u$. Тогда $y' = u'x + u$, а уравнение (1.1.4.3) принимает вид $u'x + u = f(u)$. Общий интеграл уравнения (1.1.4.3): $\displaystyle\int \frac{du}{f(u) - u} - \ln|x| = C$. Выполнив обратную замену, находим общий интеграл первоначального уравнения.

1.1.5 Дифференциальные уравнения, приводящиеся к однородным

Уравнения вида

$$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_1 x + b_1 y + c_1}\right)$$

при $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ приводятся к однородным подстановкой $x = X + \alpha$, $y = Y + \beta$, где (α, β) – единственное решение системы $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0. \end{cases}$

Если $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, то подстановка $a_1 x + b_1 y = z$ позволяет разделить переменные, так как $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = k$.

1.2 Примеры решения типовых задач

1.2.1 Найти общий интеграл уравнения $y' = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$.

Решение. Данное уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Полагая $y' = \frac{dy}{dx}$ и разделяя переменные, приходим к уравнению $\operatorname{ctg} y\, dy = \operatorname{tg} x\, dx$. Интегрируем: $\int \operatorname{ctg} y\, dy = \int \operatorname{tg} x\, dx$, или $\ln|\sin x| = -\ln|\cos x| + \ln C$. В данном случае постоянную интегрирования удобнее обозначить через $\ln C$. Из последнего равенства находим: $\sin y = C/\cos x$, или $\sin y \cos x = C$ – общий интеграл заданного уравнения.

1.2.2 Найти частное решение уравнения $y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}$, если $y(1) = \pi/2$.

Решение. Заданное уравнение является однородным дифференциальным уравнением. Сделаем подстановку $y/x = z$, $y = zx$, $y' = z'x + z$. Приходим к уравнению с разделяющимися переменными $xz' = \sin z$. Разделяем переменные: $\frac{dz}{\sin z} = \frac{dx}{x}$. Интегрируя уравнение, находим $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{z}{2}\right| = \ln|x| + \ln C$, откуда $z = 2\operatorname{arctg} Cx$. Совершая обратную замену, находим общее решение исходного уравнения $y = 2x \operatorname{arctg} Cx$.

Подставляем заданные начальные условия: $\pi/2 = 2\operatorname{arctg} C$, откуда $C = 1$.

Искомым частным решением будет функция $y = 2x \operatorname{arctg} x$.

1.2.3 Найти общий интеграл уравнения $y' = \frac{2x + y + 1}{x + 2y - 1}$.

Решение. Данное уравнение является дифференциальным уравнением, приводящимся к однородному, причём $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. Находим решение системы $\begin{cases} 2x + y + 1 = 0, \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$: $x = \alpha = -1$; $y = \beta = 1$. Сделаем в исходном уравнении замену переменных, полагая $x = X - 1$, $y = Y + 1$. Уравнение преобразуется к виду $\frac{dY}{dX} = \frac{2X + Y}{X + 2Y}$ или $\frac{dY}{dX} = \frac{2 + Y/X}{1 + 2Y/X}$. В полученном однородном уравнении положив $\frac{Y}{X} = u$, приходим к уравнению с разделяющимися переменными: $\frac{1 + 2u}{2 - 2u^2} du = \frac{dX}{X}$, общим интегралом является функция $C^4 x^4 (u - 1)^3 (u + 1) = 1$ или $C^4 (Y - X)^3 (Y + X) = 1$. Возвращаясь к переменным x и y, находим общий интеграл исходного уравнения: $C^4 (y - x - 2)^3 (y + x) = 1$.

1.2.4 Тело движется прямолинейно со скоростью v, пропорциональной квадрату времени. Установим зависимость между пройденным путём s и временем t, если известно, что $s(0) = 5$ *м*.

Решение. Так как $v = \dfrac{ds}{dt}$, то $s(t)$ и t связаны дифференциальным уравнением $\dfrac{ds}{dt} = k\,t^2$ или $ds = k\,t^2 dt$. Проинтегрировав обе части равенства, получим общее решение дифференциального уравнения: $s(t) = \dfrac{1}{3}k\,t^3 + C$.

Используя начальное условие $s(0) = 5$, получим значение C: $5 = 0 + C$ или $C = 5$.

Следовательно, $s(t) = \dfrac{1}{3}k\,t^3 + 5$ – искомая зависимость.

1.2.5 Найти семейство кривых, для которых треугольник, образованный осью Oy, касательной к кривой в произвольной её точке и радиус-вектором точки касания, является равнобедренным. Основанием треугольника служит отрезок касательной от точки касания до оси Oy.

Решение. Пусть искомое уравнение кривой будет $y = f(x)$. Проведём касательную MN в произвольной точке кривой $M(x, y)$ до пересечения с осью OY в точке N.

По условию задачи должно быть справедливо равенство $ON = OM$; но $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$; из уравнения касательной $Y - y = y' \cdot (X - x)$ находим, полагая $X = 0$: $Y = ON = y - x \cdot y'$. В результате приходим к однородному уравнению: $\sqrt{x^2 + y^2} = y - xy'$ или $y' = \dfrac{y}{x} - \sqrt{1 + \dfrac{y^2}{x^2}}$. Полагаем $\dfrac{y}{x} = u$. После замены и разделения переменных получаем уравнение $\dfrac{du}{\sqrt{1+u^2}} = -\dfrac{dx}{x}$. Интегрируя уравнение, находим $\ln\left|u + \sqrt{1+u^2}\right| = \ln C - \ln|x|$, откуда $x \cdot \left(u + \sqrt{1+u^2}\right) = C$. Совершая обратную замену, находим общее решение исходного уравнения $y + \sqrt{x^2 + y^2} = C$.

1.3 Задания для решения на практическом занятии

1.3.1 Найти общий интеграл уравнения $\ln\cos y\,dx + x\,\mathrm{tg}\,y\,dy = 0$.

1.3.2 Найти общее решение дифференциального уравнения $yy' + x = 1$.

1.3.3 Найти общий интеграл уравнения $\sqrt{1 - y^2}\,dx + y\,dy = 0$.

1.3.4 Найти частный интеграл уравнения $yy' + xe^y = 0$, если $y(0) = -1$.

1.3.5 Найти частное решение уравнения $e^{2x+y}\,dx + e^{2y+x}\,dy = 0$, если $y(\ln 2) = \ln 3$.

1.3.6 Найти общее решение уравнения $\left(x^2+y^2\right)dx-xy\,dy=0$.

1.3.7 Найти общее решение дифференциального уравнения $y-x\,y'=y\ln(x/y)$.

1.3.8 Решить дифференциальное уравнение $ydy+(x-2y)dx=0$.

1.3.9 Решить дифференциальное уравнение $y-xy'=x\sec\dfrac{y}{x}$, $y(1)=\pi$.

1.3.10 Решить уравнение $\left(y^2-3x^2\right)dy+2xy\,dx=0$, при условии $y(1)=-2$.

1.3.11 Решить уравнение $(x-y+4)\,dy+(x+y-2)\,dx=0$.

1.3.12 Решить дифференциальное уравнение $y'=\dfrac{x+y+2}{1-2x-2y}$.

1.3.13 Решить дифференциальное уравнение $y'=\dfrac{x+y-2}{y-x-4}$. Найти интегральную кривую, проходящую через точку $P_0(1{,}1)$.

1.3.14 Решить уравнение $2(x+y)\,dy+(3x+3y-1)\,dx=0$, при заданном начальном условии $y(0)=2$.

1.3.15 Найти кривую, у которой отрезок касательной, заключённый между осями координат, делится пополам в точке касания.

1.3.16 Найти линию, у которой квадрат длины отрезка, отсекаемого любой касательной от оси ординат, равен произведению координат точек касания.

1.3.17 Материальная точка массой в 1 *г* движется прямолинейно под действием силы, прямо пропорциональной времени, отсчитываемому от момента времени $t=0$, и обратно пропорциональной скорости движения точки. В момент $t=10\,c$ скорость равнялась 0, 5 *м/с*, а сила – $4\cdot10^{-3}$ *Н*. Какова будет скорость спустя 30 секунд после начала движения?

1.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

1.4.1 Найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения. При решении задачи необходимо указать тип уравнения.

1.4.1.1	$(xy^2-x)dx+(yx^2-y)dy=0$.	**1.4.1.2**	$y'\sqrt{1-x^2}-\cos^2 y=0$.
1.4.1.3	$(xy^2+x)dx+(yx^2+y)dy=0$.	**1.4.1.4**	$(1+x^2)dy=(9+y^2)dx$.
1.4.1.5	$y'=\dfrac{xy^2+y^2}{x^2y-x^2}$.	**1.4.1.6**	$(x+2)^3dy-(y-3)^2dx=0$.
1.4.1.7	$\sin 3y\cos x dy=\cos 3y\sin x dx$.	**1.4.1.8**	$(x-5)^4dy-(y+1)^3dx=0$.
1.4.1.9	$\dfrac{dx}{\cos^2 x\cos y}+ctgx\sin y dy=0$.	**1.4.1.10**	$e^{2x+5y}dy-xdx=0$.

1.4.1.11 $(xy^2+x)dx+(yx^2+y)dy=0$.

1.4.1.12 $3^{y^2-x^2}=\dfrac{y\cdot y'}{x}$.

1.4.1.13 $y'-\dfrac{\cos(2x+y)}{\cos^3 y}=\dfrac{\cos(2x-y)}{\cos^3 y}$.

1.4.1.14 $(1+e^{3y})xdx=e^{3y}dy$.

1.4.1.15 $y'+\sin(x+y)=\sin(x-y)$.

1.4.1.16 $\sin x\cdot y'=y\cdot\cos x+2\cos x$.

1.4.1.17 $e^x\cdot tgy\,dx=\dfrac{(1-e^x)}{\cos^2 y}dy$.

1.4.1.18 $\dfrac{\cos y}{\sqrt{1+x^2}}dx=2\,dy+\cos y\,dy$.

1.4.1.19 $1+(1+y')\cdot e^y=0$.

1.4.1.20 $e^x\cdot\sin y\,dx+tgy\,dy=0$.

1.4.1.21 $x\sqrt{4+y^2}dx+y\sqrt{9+x^2}dy=0$.

1.4.1.22 $y'\cdot\left(\sqrt{x\cdot y}+\sqrt{x}\right)-y=0$.

1.4.1.23 $\sqrt{9-y^2}\,dx+y\cdot\sqrt{4-x^2}\,dy=0$.

1.4.1.24 $\sec^2 x\cdot tgy+y'\sec^2 y\cdot tgx=0$.

1.4.1.25 $x(y^6+1)\,dx+y^2(x^4+1)\,dy=0$.

1.4.1.26 $y\cdot\ln^3 y+y'\cdot\sqrt{x+1}=0$.

1.4.1.27 $dy+\sin(x+y)dx=\sin(x-y)dx$

1.4.1.28 $3^{x+2y}+5^{x-2y}\cdot y'=0$.

1.4.1.29 $\dfrac{dy}{dx}+\cos(x+2y)=\cos(x-2y)$.

1.4.1.30 $\ln\left(\cos y\right)dx+x\cdot tgy\,dy=0$.

1.4.2 Найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения. При решении задачи необходимо указать тип уравнения.

1.4.2.1 $(x^2-y^2)\,dy=2\cdot x\cdot y\,dx$.

1.4.2.2 $y\cdot(\ln y-\ln x)\,dx-x\,dy=0$.

1.4.2.3 $(x\cdot y'-y)\cdot\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}=x$.

1.4.2.4 $\dfrac{x}{y}dy=\dfrac{x}{y}\cdot e^{\frac{y}{x}}\,dx+dx$.

1.4.2.5 $\left(y+x\right)dy=(y-x)\,dx$.

1.4.2.6 $x\,dy=y\cdot\left(1-\ln x+\ln y\right)dx$.

1.4.2.7 $x\cdot y'=x\cdot\cos\dfrac{y}{x}+y$.

1.4.2.8 $x\,dy=\left(y+x\cdot\sin\dfrac{y}{x}\right)dx$.

1.4.2.9 $\left(x^2+2\cdot x\cdot y\right)dx+x\cdot y\,dy=0$.

1.4.2.10 $y=x\cdot(y'-\sqrt[x]{e^y})$.

1.4.2.11 $x\cdot y+y^2=(2\cdot x^2+x\cdot y)\cdot y'$.

1.4.2.12 $\left(2\cdot\sqrt{x\cdot y}-y\right)dx+x\,dy=0$.

1.4.2.13 $x\cdot y'+y\cdot\left(\ln\dfrac{y}{x}-1\right)=0$.

1.4.2.14 $\left(x^2+y^2\right)dx+2\cdot x\cdot y\,dy=0$.

1.4.2.15 $\left(y^2-2\cdot x\cdot y\right)dx-x^2\,dy=0$.

1.4.2.16 $\left(x^2-y^2\right)dx+2\cdot x\cdot y\,dy=0$.

1.4.2.17 $\left(x+2\cdot y\right)dx+x\,dy=0$.

1.4.2.18 $\left(2\cdot x-y\right)dx+(x+y)\,dy=0$.

1.4.2.19 $2\cdot x^3\cdot y'=y\cdot(2\cdot x^2-y^2)$.

1.4.2.20 $y'=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$.

1.4.2.21 $x\,dy=\sqrt{x^2-y^2}\,dx+y\,dx$.

1.4.2.22 $x\,dy=y\,dx+x\cdot\cos^2\dfrac{y}{x}\,dx$.

1.4.2.23 $x\cdot y'=y+2\cdot\sqrt{y^2+9\cdot x^2}$.

1.4.2.24 $x^2\,dy=x\cdot y\,dx+y^2\cdot e^{-x/y}\,dx$.

1.4.2.25 $\left(1-\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\cos\frac{y}{x}dy=0$.

1.4.2.26 $2\cdot x^2\,dy=(x^2+y^2)\,dx$.

1.4.2.27 $x\,dy-y\,dx=y\,dy$.

1.4.2.28 $\left(2\sqrt{x\cdot y}-y\right)dx+x\,dy=0$.

1.4.2.29 $\left(y+\sqrt{x\cdot y}\right)dx=x\,dy$.

1.4.2.30 $\sqrt{y^2+x^2}\,dx=y\,dx-x\,dy$.

1.4.3 Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

1.4.3.1 $y'=\frac{2x-3y+1}{4x+y-5}$.

1.4.3.2 $y'=\frac{6x-5y+1}{2x-y-1}$.

1.4.3.3 $y'=\frac{4x+3y-7}{2x-5y+3}$.

1.4.3.4 $y'=\frac{7x-12y+5}{3x+2y-5}$.

1.4.3.5 $y'=\frac{4x-5y+1}{3x+y-4}$.

1.4.3.6 $y'=\frac{x+3y-4}{5x+y-6}$.

1.4.3.7 $y'=\frac{4x+2y-6}{3x+y-4}$.

1.4.3.8 $y'=\frac{7x-3y-4}{4x-9y+5}$.

1.4.3.9 $y'=\frac{3x-3y}{2x+2y-4}$.

1.4.3.10 $y'=\frac{x-y}{2x+y-3}$.

1.4.3.11 $y'=\frac{6x+y-7}{8x+y-9}$.

1.4.3.12 $y'=\frac{4x-y-3}{4x+3y-7}$.

1.4.3.13 $y'=\frac{4x-5y+1}{2x+7y-9}$.

1.4.3.14 $y'=\frac{x-y}{3x+2y-5}$.

1.4.3.15 $y'=\frac{2x+y-3}{x-y}$.

1.4.3.16 $y'=\frac{x-3y+2}{x+y-2}$.

1.4.3.17 $y'=\frac{x-5y+4}{9x-4y-5}$.

1.4.3.18 $y'=\frac{6x+y-7}{3x+y-4}$.

1.4.3.19 $y'=\frac{6x-2y-4}{3x+y-4}$.

1.4.3.20 $y'=\frac{3x+3y-6}{4x+5y-9}$.

1.4.3.21 $y'=\frac{5x-6y+1}{7x+2y-9}$.

1.4.3.22 $y'=\frac{3x-2y+1}{5x+2y-7}$.

1.4.3.23 $y'=\frac{x-7y+8}{2x-y-1}$.

1.4.3.24 $y'=\frac{x+8y-9}{4x-y-3}$.

1.4.3.25 $y'=\frac{2x+y-3}{x+6y-7}$.

1.4.3.26 $y'=\frac{6x-5y-1}{2x+5y-7}$.

1.4.3.27 $y'=\frac{2x-y-1}{4x-y-3}$.

1.4.3.28 $y'=\frac{6x-y-5}{4x-y-3}$.

1.4.3.29 $y'=\frac{5x-y-4}{7x+y-8}$.

1.4.3.30 $y'=\frac{4x+3y-7}{2x+y-3}$.

2 ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Содержание: линейные дифференциальные уравнения первого порядка, уравнение Бернулли, уравнение в полных дифференциалах.

2.1 Теоретический материал по теме практического занятия

2.1.1 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка представляет собой уравнение, в котором функция и её производная содержится в первой степени.

Определение 2.1.1.1 Уравнение

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x), \qquad (2.1.1.1)$$

где $P(x)$, $Q(x)$ – заданные функции, которые являются линейными относительно неизвестной функции y и её производной, называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка*.

Если $Q(x) \equiv 0$, то уравнение называется *линейным однородным*, в противном случае – *линейным неоднородным*.

Существуют различные методы решения линейных уравнений.

Линейные дифференциальные уравнения можно интегрировать методом вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа).

Пусть задано неоднородное линейное дифференциальное уравнение (2.1.1.1). Записываем соответствующее однородное уравнение $y' + P(x) \cdot y = 0$. Разделяя переменные в однородном уравнении, находим его общее решение $y = C \cdot e^{-\int P(x)dx}$, где $C-$ произвольная постоянная.

Общее решение неоднородного уравнения можно найти исходя из общего решения, соответствующего однородного уравнения по методу Лагранжа, варьируя произвольную постоянную, то есть, полагая $y = C(x) \cdot e^{-\int P(x)dx}$, где $C(x)-$ некоторая, подлежащая определению, дифференцируемая функция от переменной x. Для нахождения $C(x)$ подставляем функцию y в исходное уравнение (2.1.1.1), что приводит к уравнению $C'(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$. Откуда $C(x) = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + C$, где $C-$ произвольная постоянная. Тогда искомое общее решение неоднородного линейного уравнения будет иметь вид

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx + C\right). \qquad (2.1.1.2)$$

Линейные дифференциальные уравнения можно интегрировать также методом Бернулли. Полагаем $y = u\cdot v$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ две неизвестные функции, преобразуем исходное уравнение к виду

$$u'\cdot v + v'\cdot u + P(x)\cdot u\cdot v = Q(x), \qquad (2.1.1.3)$$

или

$$u'\cdot v + u\cdot\left(v' + P(x)\cdot v\right) = Q(x). \qquad (2.1.1.4)$$

Функцию $v = v(x)$ находим как частное решение уравнения $v' + P(x)\cdot v = 0$. Разделяя переменные в уравнении, находим функцию $v = e^{-\int P(x)dx}$. Учитывая, что выражение в скобках равно нулю, уравнение (2.1.1.4) равносильно уравнению $u'\cdot v = Q(x)$ или $u' = Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}$, из которого находим функцию $u = u(x)$: $u = \int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx + C$. Умножая u на v, находим решение уравнения (2.1.1.1) в виде формулы (2.1.1.2).

2.1.2 Уравнение Бернулли

Определение 2.1.2.1 Дифференциальное уравнение

$$y' + P(x)\cdot y = Q(x)\cdot y^{\alpha} \quad (\alpha\in R, \alpha\neq 0, \alpha\neq 1) \qquad (2.1.2.1)$$

называется *уравнением Бернулли*.

Уравнение Бернулли можно преобразовать в линейное уравнение, выполнив замену неизвестной функции при помощи замены $z = y^{1-\alpha}$, которая преобразует исходное уравнение в уравнение $\frac{1}{1-\alpha}\cdot z' + P(x)\cdot z = Q(x)$.

При интегрировании конкретных уравнений Бернулли их не обязательно преобразовывать в линейное уравнение, а сразу можно применять либо метод вариации произвольной постоянной, либо метод Бернулли.

2.1.3 Дифференциальное уравнение в полных дифференциалах

Определение 2.1.3.1 Дифференциальное уравнение вида

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0 \qquad (2.1.3.1)$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$.

Теорема 2.1.3.1 Уравнение (2.1.3.1) с непрерывно дифференцируемыми функциями $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ является уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (2.1.3.2)$$

Общий интеграл уравнения (2.1.3.1) находится по одной из следующих формул:

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy=C \qquad (2.1.3.3)$$

или

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy=C, \qquad (2.1.3.4)$$

где точка $M_0(x_0;y_0)$ принадлежит области определения функций $P(x,y)$ и $Q(x,y)$.

2.2 Примеры решения типовых задач

2.2.1 Найти общее решение уравнения $y'-y/x=x$.

Решение. Заданное уравнение является линейным дифференциальным уравнением. Решим его методом вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа). Интегрируем соответствующее однородное уравнение $\overline{y}'-\dfrac{\overline{y}}{x}=0$, разделив переменные $\dfrac{d\overline{y}}{\overline{y}}-\dfrac{dx}{x}=0$, $\ln|\overline{y}|-\ln|x|=\ln C$, $\overline{y}=C\cdot x$. Находим решение исходного неоднородного уравнения в виде $y=C(x)\cdot x$, где $C(x)$ – неизвестная функция.

Подставляя в исходное уравнение функцию $y=C(x)\cdot x$ и её производную $y'=C'(x)x+C(x)$, приходим к уравнению $C'(x)\cdot x+C(x)-\dfrac{C(x)\cdot x}{x}=x$ или

$C'(x)=1$, откуда $C(x)=x+C$. Таким образом, общим решением исходного уравнения будет функция $y=C(x)\cdot x=(x+C)\cdot x=x^2+C\cdot x$.

2.2.2 Найти частное решение уравнения $y'-y\,\mathrm{th}\,x=\mathrm{ch}^2 x$, если $y(0)=1$.

Решение. Заданное уравнение является линейным дифференциальным уравнением. Решим его по методу Бернулли. Положим $y=u\cdot v$. Тогда после подстановки функции и её производной получаем уравнение вида $u'\cdot v+v'\cdot u-u\cdot v\cdot \mathrm{th}\,x=\mathrm{ch}^2 x$ или $u'\cdot v+u\cdot(v'-v\cdot\mathrm{th}\,x)=\mathrm{ch}^2 x$. Полагаем $v'-v\,\mathrm{th}\,x=0$, откуда $\dfrac{dv}{v}=\mathrm{th}\,x\,dx$; интегрируя, находим: $\ln|v|=\ln|\mathrm{ch}\,x|$ или $v=\mathrm{ch}\,x$ (постоянную интегрирования не вводим, так как нам достаточно найти функцию $v=v(x)$ как частное решение уравнения).

Для определения функции $u=u(x)$ решим уравнение $u'\cdot v=\mathrm{ch}^2 x$ или $u'\cdot\mathrm{ch}\,x=\mathrm{ch}^2 x$. Откуда находим $u=\int\mathrm{ch}\,x\,dx+C=\mathrm{sh}\,x+C$. Умножая u на v, записываем общее решение заданного уравнения $y=\mathrm{ch}\,x\cdot(\mathrm{sh}\,x+C)$. По начальному условию $y(0)=1$ находим произвольную постоянную C: $1=\mathrm{ch}\,0(\mathrm{sh}\,0+C)$, откуда $C=1$. Следовательно, искомое частное решение $y=\mathrm{ch}\,x(\mathrm{sh}\,x+1)$.

2.2.3 Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'=\frac{1}{x\cos y+\sin 2y}.$$

Решение. Данное уравнение не является линейным относительно функции y, однако оно приводится к линейному уравнению относительно x и x':

$$x'-x\cos y=\sin 2y.$$

Положим $x=u(y)\cdot v(y)$. Тогда после подстановки функции и её производной $x'=u'v+v'u$ получаем уравнение вида $u'\cdot v+v'\cdot u-u\cdot v\cdot\cos y=\sin 2y$ или $u'\cdot v+u\cdot(v'-v\cdot\cos y)=\sin 2y$. Найдём функцию $v=v(y)$ как частное решение уравнения $v'-v\cos y=0$, откуда $\dfrac{dv}{v}=\cos y\,dy$. Интегрируя уравнение, находим: $\ln|v|=\sin y$ или $v=e^{\sin y}$.

Для определения функции $u=u(y)$ решим уравнение $u'\cdot v=\sin 2y$ или $u'\cdot e^{\sin y}=\sin 2y$. Откуда находим $u=\int\sin 2y\cdot e^{-\sin y}\,dx+C$. При помощи подстановки $\sin y=t$ и применяя метод интегрирования по частям, определяем функцию $u(y)=-2\cdot(\sin y+1)\cdot e^{-\sin y}+C$. Умножая u на v, записываем общее решение заданного уравнения $x(y)=-2\sin y-2+C\cdot e^{\sin y}$.

2.2.4 Найти общее решение уравнения $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{4\sqrt{y}\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Решение. Данное уравнение является дифференциальным уравнением Бернулли. Проинтегрируем его методом Бернулли, для чего положим $y = u \cdot v$. Подставляя в исходное уравнение $y = u \cdot v$ и $y' = u' \cdot v + v' \cdot u$, сгруппируем члены, содержащие u в первой степени:

$$u'v + u\left(v' - \frac{2xv}{1+x^2}\right) = \frac{4\sqrt{uv}\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Примем за v какое-либо частное решение уравнения $v' - \frac{2xv}{1+x^2} = 0$. Разделяя в нём переменные, находим: $\frac{dv}{v} = \frac{2x\,dx}{1+x^2}$, откуда $\ln|v| = \ln\left(1+x^2\right)$ или $v = 1+x^2$. Для нахождения u имеем уравнение $u'v = \frac{4\sqrt{uv}\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt{1+x^2}}$, или (поскольку $v = 1+x^2$) $u'v = \frac{4\sqrt{u}\,\mathrm{arctg}\,x}{1+x^2}$. Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{2\,\mathrm{arctg}\,x}{1+x^2}dx, \quad \int\frac{du}{2\sqrt{u}} = \int\frac{2\,\mathrm{arctg}\,x}{1+x^2}dx, \quad \sqrt{u} = \mathrm{arctg}^2\,x + C, \quad u = \left(\mathrm{arctg}^2\,x + C\right)^2.$$

Таким образом, $y = \left(1+x^2\right)\left(\mathrm{arctg}^2\,x + C\right)^2$ – общее решение уравнения.

2.2.5 Найти общий интеграл уравнения $(x+y-1)dx + (e^y + x)dy = 0$.

Решение. В условии задачи: $P(x,y) = x+y-1$, $Q(x,y) = e^y + x$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$, таким образом, условие полного дифференциала выполнено, то есть данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Найдём общий интеграл по формуле (2.1.3.4), положив в ней $x_0 = 0,\ y_0 = 0$.

$$\int_0^x (x+y-1)dx + \int_0^y e^y dy = C_0, \quad \left.\left(\frac{1}{2}x^2 + xy - x\right)\right|_0^x + \left.e^y\right|_0^y = C_0.$$

Подставляя пределы интегрирования, находим общий интеграл уравнения $x^2/2 + xy - x + e^x = C$, где $C = C_0 + 1$.

2.2.6 Сила тока I в цепи с сопротивлением R, индукцией L и электродвижущей силой $E = kt$, которая пропорциональна времени, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$L \cdot \frac{dI}{dt} + R \cdot I = E.$$

Найти зависимость силы тока I от времени t, считая сопротивление R и индукцию величинами постоянными, а сила тока I в начальный момент времени равна нулю.

Решение. Дифференциальное уравнение $L\cdot\frac{dI}{dt}+R\cdot I=k\cdot t$ является линейным, где неизвестной функцией является сила тока $I(t)$. Положим $I=u\cdot v$. Тогда, после подстановки функции I и её производной получаем уравнение вида $L\cdot u'\cdot v+L\cdot v'\cdot u+R\cdot u\cdot v=\mathrm{ch}^2 x$ или $L\cdot u'\cdot v+u\cdot(L\cdot v'+R\cdot v)=k\cdot t$. Полагаем $L\cdot v'+R\cdot v=0$, откуда $\frac{dv}{v}=-\frac{R}{L}dt$; интегрируя, находим: $\ln|v|=-\frac{R}{L}dt$ или $v=e^{-\frac{R}{L}\cdot t}$. Для определения функции $u=u(t)$ решим уравнение $u'\cdot v=k\cdot t$ или $u'\cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t}=k\cdot t$. Откуда находим $u=\frac{k}{L}\int te^{\frac{R}{L}t}\,dt+C=\left(\frac{k}{R}t-\frac{kL}{R^2}\right)e^{\frac{R}{L}t}+C$ (при нахождении интеграла использовалась формула интегрирования по частям). Умножая u на v, записываем общее решение заданного уравнения $I(t)=\frac{k}{R}\cdot t-\frac{kL}{R^2}+Ce^{-\frac{R}{L}t}$. По начальному условию $I(0)=0$ находим произвольную постоянную C: $0=-\frac{k\cdot L}{R^2}+C$, откуда $C=\frac{k\cdot L}{R^2}$. Следовательно, искомая зависимость между силой тока и временем имеет вид

$$I(t)=\frac{k}{R}\cdot t-\frac{kL}{R^2}+\frac{kL}{R^2}e^{-\frac{R}{L}t}.$$

2.3 Задания для решения на практическом занятии

2.3.1 Найти общее решение уравнения $xy'-y=x^2\cos x$.

2.3.2 Найти общее решение уравнения $y'\cos^2 x+y=\mathrm{tg}\,x$.

2.3.3 Найти общее решение уравнения $y'\cos x+y=1-\sin x$.

2.3.4 Найти частное решение уравнения $y'-\frac{4y}{x}=\frac{7}{x^4}$, если $y(1)=0$.

2.3.5 Из семейства интегральных кривых дифференциального уравнения $y'+2xy=2x^3e^{-x^2}$ найти кривую, проходящую через точку $M_0(0;1)$.

2.3.6 Найти общее решение уравнения $y'=\frac{y}{y^4+2x}$.

2.3.7 Найти общее решение уравнения $4xy'+3y=-e^x x^4 y^5$.

2.3.8 Найти общее решение уравнения $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{4\sqrt{y}}{\sqrt{1+x^2}} \operatorname{arctg} x$.

2.3.9 Найти общее решение уравнения $\left(x^2 \ln y - x\right) \cdot y' = y$.

2.3.10 Найти частное решение уравнения $y' + y = e^{x/2}\sqrt{y}$, если $y(0) = \frac{9}{4}$.

2.3.11 Найти частное решение уравнения $y' + \frac{3x^2 y}{x^3+1} = y^2(x^3+1)\sin x$, если $y(0)=1$.

2.3.12 Найти общий интеграл уравнения $(x^2 + \sin y)dx + (x\cos y + 1)dy = 0$.

2.3.13 Найти общий интеграл уравнения $ye^x dx + (y + e^x)dy = 0$.

2.3.14 Найти частный интеграл уравнения $ye^x dx + (y + e^x)dy = 0$, при заданном начальном условии $y(0) = 2$.

2.3.15 Найти частный интеграл уравнения $(2y-3)dx + (2x+3y^2)dy = 0$, при заданном начальном условии $y(2) = 1$.

2.3.16 Найти линию, у которой начальная ордината любой касательной на две единицы масштаба меньше абсциссы точки касания.

2.3.17 Найти ток в катушке в момент времени t, если её сопротивление равно R, индуктивность равна L, начальный ток $I_0 = 0$, электродвижущая сила меняется по закону $E = E_0 \sin \omega t$, а падение напряжения вдоль проводника равно $L \cdot \frac{dI}{dt} + R \cdot I$.

2.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

2.4.1 Найти частное решение дифференциального уравнения, которое удовлетворяет начальному условию $y(x_0) = y_0$. При решении задачи необходимо указать тип уравнения.

2.4.1.1 $\begin{cases} (x+1)y' + y = x^2, \\ y(0) = 5. \end{cases}$

2.4.1.2 $\begin{cases} y' \sin x - y\cos x = \sin^2 x, \\ y(\pi/2) = \pi/2. \end{cases}$

2.4.1.3 $\begin{cases} y' \cos x = y \sin x + \cos^2 x, \\ y(3\pi/2) = -1/4. \end{cases}$

2.4.1.4 $\begin{cases} y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x, \\ y(0) = -1. \end{cases}$

2.4.1.5 $\begin{cases} y' + \frac{x \cdot y}{1-x^2} = x + \arcsin x, \\ y(0) = 0. \end{cases}$

2.4.1.6 $\begin{cases} y' + y \cdot \cos x = e^{-\sin x}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$

2.4.1.7 $\begin{cases} x\cdot y' + y - 3\cdot\sin x = 0, \\ y(\pi/2) = 2/\pi. \end{cases}$

2.4.1.8 $\begin{cases} y' - y\cdot \mathrm{tg}x = 4\cdot x^3\cdot \sec x, \\ y(0) = 0. \end{cases}$

2.4.1.9 $\begin{cases} (1+x^2)y' - 2xy = 3x^2(1+x^2)^2, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

2.4.1.10 $\begin{cases} xy' + y - 2x^2 = 0, \\ y(1) = 1. \end{cases}$

2.4.1.11 $\begin{cases} \left(x+1\right)\cdot y' + y = x^3 + x^2, \\ y(0) = 0. \end{cases}$

2.4.1.12 $\begin{cases} x\cdot y' - 2\cdot y + x^2 = 0, \\ y(1) = 0. \end{cases}$

2.4.1.13 $\begin{cases} x\cdot y' + y = \sin x, \\ y(\pi/2) = 2/\pi. \end{cases}$

2.4.1.14 $\begin{cases} \left(x^2-1\right)\cdot y' - x\cdot y = x^3 - x, \\ y(\sqrt{2}) = 1. \end{cases}$

2.4.1.15 $\begin{cases} (1-x^2)\cdot y' + x\cdot y = 1, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

2.4.1.16 $\begin{cases} y'\cdot \mathrm{ctg}x - y = 2\cos^2 x\cdot \mathrm{ctg}x, \\ y(0) = 0. \end{cases}$

2.4.1.17 $\begin{cases} x^2\cdot y' = 2\cdot x\cdot y + 3, \\ y(1) = -1. \end{cases}$

2.4.1.18 $\begin{cases} y' - 2\cdot x\cdot y = x\cdot e^{-x^2}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$

2.4.1.19 $\begin{cases} y' - 3\cdot x^2\cdot y - x^2\cdot e^{x^3} = 0, \\ y(0) = 0. \end{cases}$

2.4.1.20 $\begin{cases} x\cdot y' + y = \ln x + 1, \\ y(1) = 0. \end{cases}$

2.4.1.21 $\begin{cases} y' - y\cdot \mathrm{tg}x = \sec x, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

2.4.1.22 $\begin{cases} y'\cdot \sin x - y\cdot\cos x = -\dfrac{\sin^2 x}{x^2}, \\ y(\pi/2) = 2/\pi. \end{cases}$

2.4.1.23 $\begin{cases} \sin 2x\, dy = 2\cdot(y+\cos x)\, dx, \\ y(\pi/4) = -\sqrt{2}. \end{cases}$

2.4.1.24 $\begin{cases} y' = 2\cdot y\cdot\sin^2 x + 2\cdot x\cdot e^{x-\frac{1}{2}x^2}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$

2.4.1.25 $\begin{cases} x\cdot(x-1)\cdot y' + y = x^2\cdot(2x-1), \\ y(2) = 4. \end{cases}$

2.4.1.26 $\begin{cases} x\cdot y' + y - e^x = 0, \\ y(1) = e. \end{cases}$

2.4.1.27 $\begin{cases} y' - 2\cdot y\cdot \mathrm{ctg}x = \sin^3 x, \\ y(\pi/2) = 0. \end{cases}$

2.4.1.28 $\begin{cases} y' + 2\cdot y\cdot \mathrm{tg}x = x\cdot\cos^3 x, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

2.4.1.29 $\begin{cases} y' - y\cdot\cos x = -\sin 2x, \\ y(0) = 3. \end{cases}$

2.4.1.30 $\begin{cases} x\cdot y' - y + \ln x = 0x, \\ y(1) = 2. \end{cases}$

2.4.2 Решить задачу Коши при заданном начальном условии $y(3) = m$, где число m – номер варианта. При решении задания необходимо указать тип уравнения.

2.4.2.1 $y^2 y' + \dfrac{y^3}{x} = \dfrac{1}{x^2}$.

2.4.2.2 $y' + 4x^3 y = \dfrac{(x^3+1)e^{-4x}}{y^{-2}}$.

2.4.2.3 $y' + y = x\sqrt{y}$

2.4.2.4 $y' - y = \dfrac{x}{y}e^{2x}$.

2.4.2.5 $y' - \dfrac{2xy}{1+x^2} = \sqrt{y} \cdot \operatorname{arctg} x$.

2.4.2.6 $y' + x = \dfrac{3}{\sqrt[3]{y^2}}$.

2.4.2.7 $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$.

2.4.2.8 $2x^3yy' + 3x^2y^2 + 1 = 0$.

2.4.2.9 $y' + y = \dfrac{x}{y^2}$.

2.4.2.10 $xy' + y = y^2 \ln x$.

2.4.2.11 $x(x-1) \cdot y' + y^3 = x \cdot y$

2.4.2.12 $\dfrac{y'}{\sqrt{y}} = x + \dfrac{x\sqrt{y}}{x^2-1}$

2.4.2.13 $y' + y^2 \cos x = y$.

2.4.2.14 $y' + y^2 \cdot \cos x = y \cdot tgx$.

2.4.2.15 $\dfrac{y'}{y^3} + \dfrac{2x}{y^2} = 2x^3$.

2.4.2.16 $y' = \dfrac{y^2}{2} - \dfrac{y}{2x}$.

2.4.2.17 $y' - \dfrac{3y}{2x} = -\dfrac{(5x^2+3)y^3}{2x}$.

2.4.2.18 $\dfrac{y'}{x} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{y^2}{2}$.

2.4.2.19 $y' = \dfrac{y^2 \ln x}{3x} - \dfrac{y}{3x}$.

2.4.2.20 $\dfrac{y'}{1-x^3} + \dfrac{4x^3y}{1-x^3} = 4e^{4x}y^2$.

2.4.2.21 $y' - y = 2y^2x$.

2.4.2.22 $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{2y^2 \ln x}{x}$.

2.4.2.23 $\dfrac{y'}{x-1} + \dfrac{xy}{x-1} = e^x y^2$.

2.4.2.24 $\dfrac{y'}{x} - \dfrac{y}{x} = y^2$.

2.4.2.25 $y' + 2xy = 2x^3y^3$.

2.4.2.26 $2\left(\dfrac{y'}{x-1} + \dfrac{xy}{x-1}\right) = e^x y^2$.

2.4.2.27 $y' + y = y^2 x$.

2.4.2.28 $y' + \dfrac{y}{3x} = \dfrac{y^2}{3}$.

2.4.2.29 $3xy' + 5y = (4x-5)y^4$.

2.4.2.30 $y' + y = \dfrac{x}{y^2}$.

2.4.3 Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

2.4.3.1 $\left(1 + \dfrac{e^{\frac{x}{y}}}{y}\right)dx + \dfrac{y^2 - x}{y^2} e^{\frac{x}{y}} dy = 0$.

2.4.3.2 $y' = \dfrac{3x^2 - 2x - y}{x - 2y - 3y^2}$.

2.4.3.3 $(x^3 + xy^2)dx + (x^2y + y^3)dy = 0$.

2.4.3.4 $y' = -\dfrac{3x^2 + 6xy^2}{6x^2y + 4y^3}$.

2.4.3.5 $\left(2x-\frac{y}{x^2}\right)dx-\left(2y-\frac{1}{x}\right)dy=0$.

2.4.3.6 $y'=\frac{2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)}{\sqrt{x^2-y}}$.

2.4.3.7 $\left(\frac{1}{x^2}+\frac{3y^2}{x^4}\right)dx-\frac{2y}{x^3}dy=0$.

2.4.3.8 $y'=-\frac{3y^2+2xy+2x}{6xy+x^3+3}$.

2.4.3.9 $\frac{\sin 2x+xy}{y}dx=-\frac{y^3-\sin^2 x}{y^2}dy$.

2.4.3.10 $(2x-y)dx+(2y-x)dy=0$.

2.4.3.11 $e^{-y}dx+(1-xe^{-y})dy=0$.

2.4.3.12 $y'=\frac{2x\cos^2 y}{x^2\sin 2y-2y}$.

2.4.3.13 $e^y dx+(\cos y+xe^y)dy=0$.

2.4.3.14 $y'=\frac{x^2-3xy^2}{3x^2y-6y^2-1}$.

2.4.3.15 $(\ln y-2x)dx+\frac{x-2y^2}{y}dy=0$.

2.4.3.16 $\frac{2xdx}{y^3}+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$.

2.4.3.17 $3\cdot x^2\cdot e^y+(x^3\cdot e^y-1)\cdot y'=0$.

2.4.3.18 $(2x^3-xy^2)dx=-(2y^3-x^2y)dy$

2.4.3.19 $\frac{xdy}{x^2+y^2}=\left(\frac{y}{x^2+y^2}-1\right)dx$.

2.4.3.20 $e^y\,dx+(x\cdot e^y-2\cdot y)dy=0$.

2.4.3.21 $\frac{1+xy}{x^2y}dx+\frac{1-xy}{xy^2}dy=0$.

2.4.3.22 $\frac{dx}{y}-\frac{x+y^2}{y^2}dy=0$.

2.4.3.23 $(3x^2+4y^2)dx=-(8xy+e^y)dy$.

2.4.3.24 $\left(xe^x+\frac{1}{x^2}\right)dx-\frac{dy}{x}=0$.

2.4.3.25 $tgx\,dx+\left(\frac{y-\ln(\cos x)}{y}\right)dy=0$.

2.4.3.26 $y'=-\frac{e^x\sin y+x}{e^x\cos y+y}$.

2.4.3.27 $(3x^2y^2+7)dx+2x^3ydy=0$.

2.4.3.28 $\frac{dy}{y}-\frac{x+y^2}{y^2}dy=0$.

2.4.3.29 $(xy^2-x^3)dx+(x^2y-y)dy=0$.

2.4.3.30 $xe^{y^2}dx=-\left(x^2ye^{y^2}+\mathrm{tg}^2 y\right)dy$.

3 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

Содержание: дифференциальные уравнения высшего порядка, допускающие понижение порядка: тип $y^{(n)} = f(x)$, тип $F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}\right) = 0$, тип $F\left(y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$.

3.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Дифференциальным уравнением высшего порядка называется уравнение, которое связывает независимую переменную, функцию и её производные.

Задача интегрирования дифференциальных уравнений высших порядков значительно сложнее задачи решения дифференциальных уравнений первого порядка. Рассмотрим некоторые типы дифференциальных уравнений высших порядков, допускающих понижение порядка. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнений этого типа формулируется также, как и для любых уравнений высшего порядка (теорема 1.1.1.1).

1. *Уравнение типа* $y^{(n)} = f(x)$.

Общее решение дифференциального уравнения находим методом n-кратного интегрирования. Умножая обе его части на dx и интегрируя, получаем уравнение (n –1)-го порядка: $y^{(n-1)} = \int y^{(n)} dx = \int f(x) dx = \varphi_1(x) + \overline{C}_1$. Повторяя эту операцию, приходим к уравнению (n –2)-го порядка:

$$y^{(n-2)} = \int y^{(n-1)} dx = \int \left(\varphi_1(x) + C_1\right) dx = \varphi_2(x) + \overline{C}_1 x + \overline{C}_2.$$

После n-кратного интегрирования получаем общее решение уравнения:

$$y = \varphi_n(x) + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + ... + C_{n-1} x + C_n,$$

где $C_i \left(i = \overline{1, n}\right)$ – произвольные постоянные величины, связанные определённым образом с произвольными постоянными значениями $\overline{C}_i$.

2. *Уравнение типа* $F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}\right) = 0$, не содержащее явно искомую функцию y и её производные до (k –1)-го порядка включительно $\left(k = \overline{1, n}\right)$.

Порядок такого дифференциального уравнения можно понизить, взяв за новую неизвестную функцию наименьшую из производных данного уравнения, то есть положив $y^{(k)} = z$. Тогда получим уравнение $F\left(x, z, z', ..., z^{(n-k)}\right) = 0$. Таким образом, порядок уравнения понизили на «k» единиц. Если удастся найти общее решение исходного дифференциального уравнения в виде $z=\varphi(x,C_1,C_2,...,C_{n-k})$, то приходим к дифференциальному уравнению высшего порядка, допускающего понижение порядка, первого типа: $z=y^{(k)}=\varphi(x,C_1,C_2,...,C_{n-k})$, решение которого находим k-кратным интегрированием. В частности, если $n=2,\ k=1$, то после замены переходим от уравнения второго порядка к уравнению первого порядка.

3. *Уравнение типа* $F\left(y,y',y'',...,y^{(n)}\right)=0$, не содержащее явно независимую переменную x.

Порядок этого дифференциального уравнения можно понизить, если выполнить замену $y'=p(y)$, где y рассматривается как аргумент функции y'. В этом случае $y'',y''',...$, по правилам дифференцирования сложной функции, выразятся по формулам

$$y''=p\frac{dp}{dy},\ y'''=p^2\frac{d^2p}{dy^2}+p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2$$

и так далее. В итоге вместо исходного уравнения получаем уравнение вида

$$F_1\left(y,p,\frac{dp}{dy},\frac{d^2p}{dy^2}...,\frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right)=0.$$

Если последнее уравнение имеет общее решение $p=\varphi(y,C_1,C_2,...,C_{n-1})$, где $p=\dfrac{dy}{dx}$, то для нахождения общего интеграла исходного уравнения необходимо разделить переменные и решить полученное уравнение

$$\int\frac{dy}{\varphi(y,C_1,C_2,...,C_{n-1})}=\int dx \text{ или } \Phi(y,C_1,C_2,...,C_{n-1})=x+C_n.$$

В частности, если $n=2$, то после замены переходим от уравнения второго порядка к уравнению первого порядка.

3.2 Примеры решения типовых задач

3.2.1 Найти частное решение уравнения $y'''=24x-16\cos 2x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=3,\ y'(0)=8,\ y''(0)=6$.

Решение. Данное уравнение, которое является дифференциальным уравнением высшего порядка, допускающее понижение порядка, относится к уравнению первого типа. Найдём его решение путём трёхкратного интегрирования.

Интегрируем уравнение: $y''=\int(24x-16\cos 2x)\,dx+C_1=12x^2-8\sin 2x+C_1$. Используя начальное условие $y''(0)=6$, получаем, что $C_1=6$, а, следовательно, $y''=12x^2-8\sin 2x+6$. Интегрируем полученное дифференциальное уравнение: $y'=\int(12x^2-8\sin 2x+6)\,dx=4x^3+4\cos 2x+6x+C_2$. Используя начальное условие $y'(0)=8$, получаем, что $C_2=4$, а, следовательно, $y'=4x^3+4\cos 2x+6x+4$. Интегрируем полученное уравнение: $y=\int(4x^3+4\cos 2x+6x+4)\,dx+C_3=$ $y=x^4+2\sin 2x+3x^2+4x+C_3$. Используя начальное условие $y(0)=3$, получаем, что $C_3=3$, а, следовательно, $y=x^4+2\sin 2x+3x^2+4x+3$ – частное решение исходного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям.

3.2.2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y''=y'/x$.

Решение. Данное уравнение, которое является дифференциальным уравнением высшего порядка, допускающее понижение порядка, относится к уравнению второго типа. Сделаем замену $y'=z$, тогда $y''=z'$. Получаем дифференциальное уравнение первого порядка $z'=z/x$, которое является уравнением с разделяющимися переменными. Записав это уравнение в дифференциальной форме и разделив переменные, получаем равносильное уравнение $\dfrac{dz}{z}=\dfrac{dx}{x}$. Интегрируем последнее уравнение: $\int\dfrac{dz}{z}=\int\dfrac{dx}{x}+\ln C_1$, $\ln|z|=\ln|x|+\ln C_1$, $z=C_1x$. Возвращаясь к переменной y, приходим к уравнению $y'=C_1x$. Из него находим общее решение исходного уравнения: $y=\int C_1x\,dx=C_1x^2/2+C_2$.

3.2.3 Найти общее решение дифференциального уравнения $y''=\dfrac{y'^2}{y}$.

Решение. Данное уравнение, которое является дифференциальным уравнением высшего порядка, допускающее понижение порядка, относится к уравнению третьего типа. Выполнив замену $y'=p(y)$, с учётом того, что $y''=p\dfrac{dp}{dy}$, получим дифференциальное уравнение первого порядка $p\dfrac{dp}{dy}=\dfrac{p^2}{y}$, которое равносильно совокупности двух уравнений $p=0$ и $\dfrac{dp}{dy}=\dfrac{p}{y}$. Первое уравнение, после обратной замены, принимает вид $y'=0$, а его решение $y=C$. Разделив переменные во втором уравнении $\dfrac{dp}{p}=\dfrac{dy}{y}$ и интегрируя его, находим решение уравнения: $p = C_1 y$. Учитывая, что $p = y'$, приходим к дифференциальному уравнению первого порядка $y' = C_1 y$ или $\frac{dy}{y} = C_1\,dx$. Интегрируем последнее уравнение: $\int \frac{dy}{y} = C_1 \int dx + \ln C_2$, $\ln|y| = C_1 x + \ln C_2$, $y = C_2 e^{C_1 x}$. Функции $y = C$ и $y = C_2 e^{C_1 x}$ являются общими решениями исходного уравнения.

3.2.4 Тело массы m падает по вертикали с некоторой высоты без начальной скорости. При падении тело испытывает сопротивление воздуха, пропорциональное квадрату скорости тела. Найти закон движения тела.

Решение. По второму закону Ньютона получаем следующее дифференциальное уравнение движения тела: $ma = mg - kv^2$ или $m\frac{d^2S}{dt^2} = mg - k\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$. Выполним замену $\frac{dS}{dt} = v$. В результате получим дифференциальное уравнение первого порядка: $\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v^2$. Откуда, полагая $\frac{mg}{k} = b^2$, получим уравнение $\frac{dv}{b^2 - v^2} = \frac{k}{m}dt$. Интегрируя уравнение, находим общий интеграл ($v < b$):

$$\frac{1}{2b}\ln\frac{b+v}{b-v} = \frac{k}{m}t + C_1.$$

Учитывая, что $v(0) = 0$, получаем $C_1 = 0$. Таким образом, $\ln\frac{b+v}{b-v} = \frac{2bk}{m}t$ или $v = b\,\mathrm{th}\frac{bk}{m}t$. Заменяя v через $\frac{dS}{dt}$, приходим для определения S к уравнению $\frac{dS}{dt} = b\,\mathrm{th}\frac{bk}{m}t$. Интегрируя уравнение, определяем S:

$$S = \frac{m}{k}\ln\mathrm{ch}\frac{bk}{m}t + C_2 = \frac{m}{k}\ln\mathrm{ch}\sqrt{\frac{kg}{m}}t + C_2.$$

Учитывая начальное условие $S(0) = 0$, находим $C_2 = 0$.

Итак, закон падения тела при сопротивлении воздуха, пропорциональным квадрату скорости, описывается формулой

$$S = \frac{m}{k}\ln\mathrm{ch}\sqrt{\frac{kg}{m}}t.$$

3.2.5 Найти линию, у которой радиус кривизны равен кубу нормали. Известно, что линия проходит через точку $M_0(0,1)$ и имеет в этой точке касательную, которая составляет с осью абсцисс угол 135^0.

Решение. Так как радиус кривизны плоской кривой выражается формулой $R=\frac{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}{y''}$, а длина нормали $N=y\left(1+y'^2\right)^{3/2}$, то дифференциальное уравнение будет иметь вид

$$\frac{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}{y''}=y^3\left(1+y'^2\right)^{3/2}.$$

Откуда, сократив на $\left(1+y'^2\right)^{3/2}$, приходим к уравнению $y''y^3=1$.

Положив $y'=p(y)$, $y''=p\frac{dp}{dy}$, приходим к уравнению $p\frac{dp}{dy}y^3=1$. Интегрируя его, находим: $p\,dp=\frac{dy}{y^3}$ или $\frac{1}{2}p^2=-\frac{2}{2y^2}+\frac{1}{2}C_1$, то есть $p^2=C_1-\frac{1}{y^2}$. Возвращаясь к переменной y, приходим к уравнению $y'^2=C_1-\frac{1}{y^2}$.

Произвольную постоянную C_1 найдём из условия, что касательная в точке $M_0(0,1)$ составляет с осью абсцисс угол 135^0: $y'(0)=\text{tg}135^0=-1$. Следовательно, $1=C_1-1$ или $C_1=2$. Таким образом для определения функции y получено дифференциальное уравнение первого порядка $y'^2=2-\frac{1}{y^2}$ или $y'=-\frac{\sqrt{2y^2-1}}{y}$. Разделяем переменные $\frac{ydy}{\sqrt{2y^2-1}}=-dx$ и интегрируем уравнение: $\frac{1}{2}\sqrt{2y^2-1}=-x+C_2$ или $y^2=2\left(C_2-x\right)^2+\frac{1}{2}$ (при условии $C_2-x\ge 0$). Так как по условию $y(0)=1>0$, то $y=\sqrt{2\left(C_2-x\right)^2+\frac{1}{2}}$ и $C_2\ge 0$.

Произвольную постоянную C_2 определяем из условия прохождения линии через точку $M_0(0,1)$, то есть $1=\sqrt{2\left(C_2-0\right)^2+\frac{1}{2}}$ или $C_2=\frac{1}{2}$.

Таким образом, искомая линия определяется уравнением

$$y=\sqrt{2x^2-2x+1}.$$

3.3 Задания для решения на практическом занятии

3.3.1 Найти общее решение уравнения $y'''\sin^4 x = \sin 2x$.

3.3.2 Найти частное решение уравнения $y''' = xe^{-x}$ при заданных начальных условиях $y(0)=0$, $y'(0)=2$, $y''(0)=2$.

3.3.3 Найти частное решение уравнения $y^{\mathrm{IV}} = \cos^2 x$ при заданных начальных условиях $y(0)=1/32$, $y'(0)=0$, $y''(0)=1/8$, $y'''(0)=0$.

3.3.4 Найти общее решение уравнения $(1-x^2)\,y'' - xy' = 2$.

3.3.5 Найти частное решение уравнения $(x-1)y'' - y' = x(x-1)^2$ при заданных начальных условиях $y(2)=1$, $y'(2)=-1$.

3.3.6 Найти общее решение уравнения $yy'' - y'^2 = y^2 \ln y$.

3.3.7 Найти частное решение уравнения $yy'' - y'^2 = 0$ при заданных начальных условиях $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

3.3.8 Найти общее решение уравнения $xy'' = y' \cdot \ln(y' / x)$.

3.3.9 Найти общее решение уравнения $y'' = \sqrt{1-y'^2}$.

3.3.10 Найти частное решение уравнения $y'' + 2yy'^3 = 0$ при заданных начальных условиях $y(0)=0$, $y'(0)=-3$.

3.3.11 Найти уравнение линии, для которой проекция радиуса кривизны на ось ординат есть величина постоянная.

3.3.12 Найти линию, длина дуги которой, отсчитываемая от некоторой точки, пропорциональна угловому коэффициенту касательной в конечной точке дуги.

3.3.13 Найти закон прямолинейного движения материальной точки массы m, если известно, что работа силы, действующая в направлении движения и зависящая от пути, пропорциональна времени, протекшему с момента начала движения.

3.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

3.4.1 Найти общее решение дифференциального уравнения.

3.4.1.1 $xy'' = y'\ln\left(y'/x\right)$.

3.4.1.2 $xy'' + y' = \ln\left(y'/x\right)$.

3.4.1.3 $y''tgx - y' = 1$.

3.4.1.4 $xy'' - y' = x^2e^x$.

3.4.1.5 $x^2y'' + xy' = 1$.

3.4.1.6 $x^3y'' + x^2y' = 1$.

3.4.1.7 $xy''' + y'' = 1/\sqrt{x}$.

3.4.1.8 $xy'' + y' = \ln x$.

3.4.1.9 $y''\ln x - y'/x = 0$.

3.4.1.10 $xy''' - 2y'' = -2/x^2$.

3.4.1.11 $(1+x^2)y''+2xy'=12x^3$.

3.4.1.12 $x^4y''+x^3y'=4$.

3.4.1.13 $(x+1)y'''+y''=(x+1)$.

3.4.1.14 $xy'''+y''=\sqrt{x}$.

3.4.1.15 $y''-2y'ctgx=\sin^3 x$.

3.4.1.16 $y'''+y''/x=1\big/\sqrt{x^5}$.

3.4.1.17 $(x^2+1)y''+2xy'=x^3$.

3.4.1.18 $xy'''-y''+1/x=0$.

3.4.1.19 $y''-y'/(x-1)=x^2-x$.

3.4.1.20 $2xy'y''-y'^2=1$.

3.4.1.21 $y''+2xy'\big/(x^2+1)=2x$.

3.4.1.22 $xy'''-y''=0$.

3.4.1.23 $(1+x^2)y''-2xy'=0$.

3.4.1.24 $xy''-y'=x^2$.

3.4.1.25 $y''(e^x+1)+y'=0$.

3.4.1.26 $y''+y'=\sin x$.

3.4.1.27 $xy''+xy'^2-y'=0$.

3.4.1.28 $y''-y'/x=x^2\big/y'$.

3.4.1.29 $y''+y'tgx=\sin 2x$.

3.4.1.30 $y''=y'+x$.

3.4.2 Решить задачу Коши при заданных начальных условиях.

3.4.2.1 $y'''=y''^2$, $y''(0)=-1, y'(0)=0, y(0)=1.$

3.4.2.2 $2yy''=y'^2$, $y(-1)=4,\ y'(-1)=1.$

3.4.2.3 $y''^2=4(y'-1)$, $y(0)=0,\ y'(0)=2.$

3.4.2.4 $yy''-y'^2=y^3$, $y(0)=-0,5, y'(0)=0.$

3.4.2.5 $y''y^3=1$, $y(0)=1, y'(0)=1.$

3.4.2.6 $yy''-y'^2=y^2\ln y$, $y(0)=y'(0)=1.$

3.4.2.7 $yy''-y'^2=0$, $y(0)=1, y'(0)=2.$

3.4.2.8 $y''+yy'^3=0$, $y(0)=1,\ y'(0)=2.$

3.4.2.9 $2y'^2=(y-1)y''$, $y(0)=y'(0)=2.$

3.4.2.10 $4y''^2=y'^2+1$, $y(0)=1,\ y'(0)=0.$

3.4.2.11 $y''=1\big/\sqrt{y}$, $y(0)=y'(0)=0.$

3.4.2.12 $yy''-2yy'\ln y=y'^2$, $y(0)=y'(0)=1.$

3.4.2.13 $y''=y'/\sqrt{y}$, $y(0)=1,\ y'(0)=2.$

3.4.2.14 $y''(1+y)=y'^2+y'$, $y(0)=y'(0)=2.$

3.4.2.15 $y\left(1-\ln y\right)y''+\left(1+\ln y\right)y'^2=0$, $y(0)=y'(0)=1.$

3.4.2.16 $(1-y)y''=-2y'^2$, $y(0)=0, y'(0)=1.$

3.4.2.17 $y''-y'^2-y'=0$, $y(0)=0, y'(0)=1.$

3.4.2.18 $y''+yy''-5y'^2=0$, $y(0)=0,\ y'(0)=1.$

3.4.2.19 $2y'^2=yy''$, $y(0)=1, y'(0)=2.$

3.4.2.20 $y''=y^{-3}$, $y(0)=1,\ y'(0)=0.$

3.4.2.21 $2yy''-y'^2+1=0$, $y(0)=2,\ y'(0)=1.$

3.4.2.22 $y''^2-y'=0$, $y(0)=2/3,\ y'(0)=1.$

3.4.2.23 $y''+y'^2-1=0,$
$y(0)=0,\ y'(0)=0.$

3.4.2.24 $2yy''-y'^2=0,$
$y(0)=1, y'(0)=1.$

3.4.2.25 $y''=(1+y'^2)^{3/2},$
$y(0)=1,\ y'(0)=0.$

3.4.2.26 $y''-2\sin^3 y\cdot\cos y=0,$
$y(1)=\pi/2,\ y'(1)=1.$

3.4.2.27 $e^{-y}\cdot y''-y'=0,$
$y(0)=0, y'(0)=1.$

3.4.2.28 $y\cdot y''-2\cdot y\cdot y'\cdot\ln y=y^2,$
$y(0)=1,\ y'(0)=1.$

3.4.2.29 $y''+50\cdot\sin y\cdot\cos^3 y=0,$
$y(0)=0,\ y'(0)=5.$

3.4.2.30 $y''=-yy'^3,$
$y(0)=1,\ y'(0)=2.$

4 ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

Содержание: линейные однородные дифференциальные уравнения высшего порядка и структура их решений, линейные однородные дифференциальные уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами.

4.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Линейное однородное дифференциальное уравнение высшего порядка представляет собой уравнение в котором его правая часть равна нулю, а функция и все её производные содержатся в первой степени.

Определение 4.1.1 *Линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами* называется уравнение вида

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0, \qquad (4.1.1)$$

где $a_i,\ i=\overline{1,n}$ – постоянные числа, причём $a_0\neq 0$.

Определение 4.1.2 Система функций $y_i(x), i=\overline{1,n}$ называется *линейно зависимой* на интервале I, если существуют такие числа $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$, по крайней мере, одно из которых отлично от нуля, что для всех $x\in I$ линейная комбинация функций равна нулю, то есть выполняется равенство $\alpha_1y_1+\alpha_2y_2+\ldots+\alpha_ny_n=0$. Если равенство нулю линейной комбинации выполняется только при нулевых коэффициентах, то система функций называется *линейно независимой*.

Определение 4.1.3 Любая совокупность n линейно независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка называется *фундаментальной системой решений*.

Теорема 4.1.1 *Общее решение* линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка представляет собой линейную комбинацию фундаментальной системы решений.

Таким образом, если $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ – фундаментальная система решений дифференциального уравнения, то общее решение уравнения (4.1.1) имеет вид

$$y_{o.o} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x), \qquad (4.1.2)$$

где $C_1, C_2, ..., C_n$ – произвольные постоянные.

Для нахождения общего решения однородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами составляем *характеристическое уравнение*

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \qquad (4.1.3)$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ – корни характеристического уравнения. Тогда

1) каждому действительному однократному корню λ в фундаментальной системе решений линейного однородного дифференциального уравнения будет соответствовать функция

$$y = e^{\lambda x};$$

2) каждому действительному корню λ кратности k в фундаментальной системе решений линейного однородного дифференциального уравнения будут соответствовать функции

$$y_1 = e^{\lambda x}, \ y_2 = xe^{\lambda x}, \ \ ..., \ y_k = x^{k-1}e^{\lambda x};$$

3) каждой паре однократных комплексно-сопряжённых корней $\lambda = \alpha \pm \beta i$ в фундаментальной системе решений линейного однородного дифференциального уравнения будут соответствовать функции

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x;$$

4) каждой паре однократных комплексно-сопряжённых корней $\lambda = \alpha \pm \beta i$ в фундаментальной системе решений линейного однородного дифференциального уравнения будут соответствовать функции

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x,$$
$$y_3 = xe^{\alpha x}\cos\beta x, \quad y_4 = xe^{\alpha x}\sin\beta x,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_{2k-1} = x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad y_{2k} = x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Приведём схему решения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами.

1. Составляем характеристическое уравнение (4.1.3).

2. Находим корни характеристического уравнения $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$.

3. В зависимости от характера корней записываем фундаментальную систему решений.

4. Подставляя фундаментальную систему решений в формулу (4.1.2), получаем общее решение уравнения (4.1.1).

4.2 Примеры решения типовых задач

4.2.1 Найти решение уравнения $y'' - 5y' + 6y = 0$, если $y(0) = 3$, $y'(0) = 8$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$. Находим корни этого уравнения: $\lambda = 2$ или $\lambda = 3$. Корни характеристического уравнения действительные и различные, а, следовательно, фундаментальная система решений имеет вид: $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{3x}$. Тогда, согласно формуле (4.1.2), находим общее решение $y_{o.o} = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$.

Воспользуемся начальными условиями: $C_1 + C_2 = 3$, $2C_1 + 3C_2 = 8$. Откуда $C_1 = 1$, а $C_2 = 2$. Следовательно, искомое решение будет $y_{ч.о} = e^{2x} + 2e^{3x}$.

4.2.2 Найти общее решение уравнения $y''' - 3y'' + 3y' - 1 = 0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение: $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$. Находим корни этого уравнения: $\lambda_{1,2,3} = 1$ – корень кратности $k = 3$. Следовательно, фундаментальная система решений имеет вид: $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$, $y_3 = x^2e^x$. Тогда, согласно формуле (4.1.2), находим общее решение $y_{o.o} = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x$.

4.2.3 Найти общее решение уравнения $y'' - 6y' + 13y = 0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$. Находим корни этого уравнения: $\lambda_{1,2} = 3 \pm 2i$. Корни характеристического уравнения комплексные и различные, а, следовательно, фундаментальная система решений имеет вид: $y_1 = e^{3x}\cos 2x$, $y_2 = e^{3x}\sin 2x$. Тогда, согласно формуле (4.1.2), находим общее решение $y_{o.o} = C_1e^{2x}\cos 3x + C_2e^{2x}\sin 3x$.

4.2.4 Материальная точка массы 2 *г* движется по оси Ox под действием восстанавливающей силы, направленной к началу координат и пропорциональной расстоянию движущейся точки от начала, с коэффициентом пропорциональности $k_1 = 58$. Среда, в которой происходит движение, оказывает движению сопротивление, пропорциональное скорости движения, с коэффициентом пропорциональности $k_2 = 8$. Найти закон движения материальной точки.

Решение. Скорость точки x', её ускорение x'', действующие на неё силы: восстанавливающая $F_1 = -58x$, сила сопротивления среды $F_2 = -8x'$. По второму закону Ньютона находим: $2x'' = -8x' - 58x$ или $x'' + 4x' + 29x = 0$.

Составляем характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 4\lambda + 29 = 0$. Находим корни этого уравнения: $\lambda_{1,2} = -2 \pm 5i$. Корни характеристического уравнения комплексные и различные, а, следовательно, фундаментальная система решений имеет вид: $x_1 = e^{-2x}\cos 5x$, $x_2 = e^{-2x}\sin 5x$. Тогда, согласно формуле (4.1.2), находим общее решение уравнения $x_{o.o} = C_1 e^{-2x}\cos 5x + C_2 e^{-2x}\sin 5x$, которое описывает затухающие колебания.

4.3 Задания для решения на практическом занятии

4.3.1 В задачах 4.3.1.1 – 4.3.1.9 найти фундаментальную систему решений и общее решение для линейных однородных дифференциальных уравнений.

4.3.1.1 $y'' - 6y' + 8y = 0$. **4.3.1.2** $y'' + y' - 2y = 0$. **4.3.1.3** $y'' - 4y' = 0$.

4.3.1.4 $y'' + 4y' + 4y = 0$. **4.3.1.5** $y'' + 6y' + 9y = 0$ **4.3.1.6** $y'' - 2y' + y = 0$

4.3.1.7 $y'' + 6y' + 25y = 0$. **4.3.1.8** $y'' - 4y' + 5y = 0$ **4.3.1.9** $y'' + 4y = 0$.

4.3.2 В задачах 4.3.2.1 – 4.3.2.4 найти фундаментальную систему решений и общее решение для линейных однородных дифференциальных уравнений.

4.3.2.1 $y''' + 6y'' + 12y' + 8 = 0$. **4.3.2.2** $y''' - 9y'' + 26y' - 24y = 0$.

4.3.2.3 $y''' - y'' - 5y' - 3y = 0$. **4.3.2.4** $y^{\mathrm{V}} + 5y''' + 4y = 0$.

4.3.3 Найти решение уравнения $y'' - 5y' + 4y = 0$, если $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

4.3.4 Решить задачу Коши: $y''' - 2y'' = 0$, $y(0) = 6$, $y'(0) = 7$, $y''(0) = 8$.

4.3.5 Найти интегральную кривую уравнения $y'' + 9y = 0$, проходящую через точку $M_0(\pi, -1)$ и касающуюся в этой точке прямой $y + 1 = x - \pi$.

4.3.6 Решить задачу № 4.2.4, если сила сопротивления среды равна нулю.

4.3.7 Решить задачу № 4.2.4, если $k_1 = 16$, а $k_2 = 12$.

4.3.8 Решить задачу № 4.2.4, если $k_1 = 50$, а $k_2 = 20$.

4.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

4.4.1 Найти общее решение дифференциальных уравнений.

4.4.1.1 а) $y''+3y'-18y=0$; б) $y''+4y'+4y=0$; в) $y''+4y'+5y=0$.

4.4.1.2 а) $y''-11y'+18y=0$; б) $y''-28y'+196y=0$; в) $y''+25y=0$.

4.4.1.3 а) $y''+y'-20y=0$; б) $y''+8y'+16y=0$; в) $2y''+2y'+y=0$.

4.4.1.4 а) $y''-6y'+8y=0$; б) $y''+22y'+121y=0$; в) $y''+y=0$.

4.4.1.5 а) $y''+11y'+28y=0$; б) $y''+16y'+64y=0$; в) $16y''+y=0$.

4.4.1.6 а) $y''-7y'+12y=0$; б) $y''-14y'+49y=0$; в) $y''-2y'+2y=0$.

4.4.1.7 а) $y''+4y'-32y=0$; б) $y''+6y'+9y=0$; в) $36y''+25y=0$.

4.4.1.8 а) $y''-7y'+10y=0$; б) $y''-26y'+169y=0$; в) $5y''-2y'+y=0$.

4.4.1.9 а) $y''+12y'+32y=0$; б) $y''+20y'+100y=0$; в) $25y''+y=0$.

4.4.1.10 а) $y''-8y'+15y=0$; б) $y''-18y'+81y=0$; в) $y''+4y=0$.

4.4.1.11 а) $y''+4y'-21y=0$; б) $y''+12y'+36y=0$; в) $y''+2y'+5y=0$.

4.4.1.12 а) $y''-9y'+20y=0$; б) $y''-8y'+64y=0$; в) $9y''+25y=0$.

4.4.1.13 а) $y''-4y'-21y=0$; б) $y''+18y'+81y=0$; в) $5y''+4y'+y=0$.

4.4.1.14 а) $y''-8y'+12y=0$; б) $y''-4y'+4y=0$; в) $4y''+25y=0$.

4.4.1.15 а) $y''-5y'-24y=0$; б) $y''+26y'+169=0$; в) $81y''+y=0$.

4.4.1.16 а) $y''-9y'+18y=0$; б) $y''-10y'+25y=0$; в) $y''-4y'+5y=0$.

4.4.1.17 а) $y''-7y'-18y=0$; б) $y''+28y'+196=0$; в) $4y''+9y=0$.

4.4.1.18 а) $y''-10y'+24y=0$; б) $y''-24y'+144y=0$; в) $9y''+y=0$.

4.4.1.19 а) $y''-3y'-10y=0$; б) $y''+14y'+49y=0$; в) $y''-2y'+5y=0$.

4.4.1.20 а) $y''-9y'+14y=0$; б) $y''-16y'+64y=0$; в) $y''+81y=0$.

4.4.1.21 а) $y''+3y'-18y=0$; б) $y''+30y'+225y=0$; в) $25y''+36y=0$.

4.4.1.22 а) $y''-10y'+21y=0$; б) $y''-6y'+9y=0$; в) $5y''-4y'+y=0$.

4.4.1.23 а) $y''+7y'-18y=0$; б) $y''+22y'+121y=0$; в) $49y''+4y=0$.

4.4.1.24 а) $y''-11y'+28y=0$; б) $y''-2y'+y=0$; в) $2y''-2y'+y=0$.

4.4.1.25 а) $y''+2y'-15y=0$; б) $y''+10y'+25y=0$; в) $y''+9y=0$.

4.4.1.26 а) $y''-10y'+16y=0$; б) $y''-20y'+100y=0$; в) $16y''+49y=0$.

4.4.1.27 а) $y''-3y'-28y=0$; б) $y''+24y'+576y=0$; в) $5y''+2y'+y=0$.

4.4.1.28 а) $y''-11y'+24y=0$; б) $y''-12y'+36y=0$; в) $4y''+y=0$.

4.4.1.29 а) $y''-12y'+32y=0$; б) $y''+2y'+y=0$; в) $y''+16y=0$.

4.4.1.30 а) $y''+11y'+30y=0$; б) $y''-30y'+225y=0$; в) $y''+2y'+2y=0$.

5 ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

Содержание: линейные неоднородные дифференциальные уравнения высшего порядка, решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений высшего порядка методом вариации произвольной постоянной, решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений высшего порядка со специальной правой частью.

5.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение высшего порядка представляет собой уравнение, в котором правая часть отлична от нуля, а функция и все её производные содержатся в первой степени.

Определение 5.1.1 *Линейным неоднородным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами* называется уравнение вида

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \qquad (5.1.1)$$

где $a_i, i = \overline{1,n}$ – постоянные числа, причём $a_0 \neq 0$ и $f(x) \neq 0$.

Предположим, что известно общее решение (4.1.2) соответствующего однородного уравнения (4.1.1).

Теорема 5.1.1 Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения *n*-го порядка (5.1.1) равно сумме соответствующего однородного уравнения (4.1.1) и произвольного частного решения неоднородного дифференциального уравнения, то есть

$$y_{о.н} = y_{о.о} + y_{ч.н}. \qquad (5.1.2)$$

Существует несколько методов определения частного решения неоднородного дифференциального уравнения.

Метод нахождения частного решения неоднородного дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)

Предположим, что известно общее решение соответствующего однородного уравнения: $y_{о.о} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$. Согласно методу Лагранжа, частное решение всегда представимо в виде

$$y_{ч.н}=C_1(x)\cdot y_1(x)+C_2(x)\cdot y_2(x)+...+C_n(x)\cdot y_n(x), \qquad (5.1.3)$$

где функции $y_i(x)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (4.1.1), а неизвестные функции $C_i(x)$ определяются из системы

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot y_1(x) + C_2'(x)\cdot y_2(x) + ... + C_n'(x)\cdot y_n(x) = 0, \\ C_1'(x)\cdot y_1'(x) + C_2'(x)\cdot y_2'(x) + ... + C_n'(x)\cdot y_n'(x) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1'(x)\cdot y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)\cdot y_2^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x)\cdot y_n^{(n-1)}(x) = f(x), \end{cases} \qquad (5.1.4)$$

которая является линейной системой алгебраических уравнений относительно n неизвестных $C_i'(x)$. Так как функции $y_i(x)$ являются линейно независимыми, то определитель основной матрицы данной системы отличен от нуля, а, следовательно, система имеет единственное решение $C_i'(x)=g_i(x)$. Интегрируя последние равенства, которые являются дифференциальными уравнениями первого порядка, находим $C_i(x)=\int g_i(x)dx$, для всех $i=\overline{1,n}$.

Следовательно, частное решение $y_{ч.н}$ уравнения (5.1.1) имеет вид

$$y_{ч.н}=y_1(x)\cdot\int g_1(x)dx+y_2(x)\cdot\int g_2(x)dx+...+y_n(x)\cdot\int g_n(x)dx. \qquad (5.1.5)$$

Замечание 1. При нахождении интегралов в формуле (5.1.5) появляются n произвольных постоянных. В общем случае их можно принять равными нулю.

Метод нахождения частного решения неоднородного дифференциального уравнения со специальной правой частью

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение, правая часть которого имеет специальный вид

$$f(x)=e^{\alpha x}\cdot\left(P_n(x)\cdot\cos\beta x+Q_m(x)\cdot\sin\beta x\right), \qquad (5.1.6)$$

где $P_n(x),\ Q_m(x)$ – многочлены степени n и m, соответственно.

Если число $\alpha\pm\beta i$ не является корнем характеристического уравнения (4.1.3) для однородного линейного дифференциального уравнения, то частное решение неоднородного дифференциального уравнения находим по формуле

$$y_{ч.н}=e^{\alpha x}\cdot\left(p_k(x)\cdot\cos\beta x+q_k(x)\cdot\sin\beta x\right), \qquad (5.1.7)$$

где $p_k(x),\ q_k(x)$ – многочлены степени $k=\max\{n,m\}$.

Если число $\alpha\pm\beta i$ является корнем характеристического уравнения (4.1.3) кратности r для однородного дифференциального уравнения, то частное решение неоднородного дифференциального уравнения находим по формуле

$$y_{ч.н}=x^r\cdot e^{\alpha x}\cdot\left(p_k(x)\cdot\cos\beta x+q_k(x)\cdot\sin\beta x\right), \tag{5.1.8}$$

где $p_k(x),\ q_k(x)$ – многочлены степени $k=\max\{n,m\}$.

Приведём виды частных решений для различных правых частей линейных неоднородных уравнений.

Правая часть $f(x)$ дифференциального уравнения	Корни характеристического уравнения	Частное решение $y_{ч.н}$ дифференциального уравнения
1	2	3
$P_n(x)$	Число 0 не является корнем характеристического уравнения	$p_n(x)$
	Число 0 является корнем характеристического уравнения, кратности r	$x^r\cdot p_n(x)$
$A\cdot e^{\alpha x}$	Число α не является корнем характеристического уравнения	$a\cdot e^{\alpha x}$
	Число α является корнем характеристического уравнения, кратности r	$a\cdot x^r\cdot e^{\alpha x}$
$e^{\alpha x}\cdot P_n(x)$	Число α не является корнем характеристического уравнения	$e^{\alpha x}\cdot p_n(x)$
	Число α является корнем характеристического уравнения, кратности r	$x^r\cdot e^{\alpha x}\cdot p_n(x)$

1	2	3
$P_n(x)\cdot\sin\beta x$ $(Q_n(x)\cdot\cos\beta x)$	Число $\pm\beta i$ не является корнем характеристического уравнения	$p_n(x)\cdot\sin\beta x+$ $+q_n(x)\cdot\cos\beta x$
	Число $\pm\beta i$ является корнем характеристического уравнения, кратности r	$x^r\cdot(p_n(x)\cdot\sin\beta x+$ $+q_n(x)\cdot\cos\beta x)$
$e^{\alpha x}\cdot P_n(x)\cdot\sin\beta x$ $(e^{\alpha x}\cdot Q_n(x)\cdot\cos\beta x)$	Число $\alpha\pm\beta i$ не является корнем характеристического уравнения	$e^{\alpha x}(p_n(x)\cdot\sin\beta x+$ $+q_n(x)\cdot\cos\beta x)$
	Число $\alpha\pm\beta i$ является корнем характеристического уравнения, кратности r	$x^r\cdot e^{\alpha x}\cdot(p_n(x)\cdot\sin\beta x+$ $+q_n(x)\cdot\cos\beta x)$
$e^{\alpha x}\cdot(P_n(x)\cdot\sin\beta x+$ $+Q_m(x)\cdot\cos\beta x)$	Число $\alpha\pm\beta i$ не является корнем характеристического уравнения	$e^{\alpha x}\cdot(p_k(x)\cdot\sin\beta x+$ $+q_k(x)\cdot\cos\beta x)$ $k=\max\{n,m\}$
	Число $\alpha\pm\beta i$ является корнем характеристического уравнения, кратности r	$x^r\cdot e^{\alpha x}\cdot(p_k(x)\cdot\sin\beta x+$ $+q_k(x)\cdot\cos\beta x)$ $k=\max\{n,m\}$

Для определения параметров многочленов применяется *метод неопределённых коэффициентов*. Подставляем частное решение $y_{ч.н}$ и его производные в исходное уравнение. Сравнивая коэффициенты при соответствующих степенях многочлена в левой и правой части полученного равенства или при соответствующих тригонометрических функциях, находим соответствующие параметры многочленов $p_k(x)$ и $q_k(x)$.

Если правая часть исходного уравнения равна сумме различных функций, каждая из которых имеет специальный вид, то для нахождения частного решения такого уравнения необходимо найти частные решения, соответствующие отдельным слагаемым правой части, и взять их сумму, которая и будет являться частным решением исходного уравнения.

5.2 Примеры решения типовых задач

5.2.1 Найти общее решение уравнения $y'' - y' = e^{2x} \sin e^x$.

Решение. Находим общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' - y' = 0$. Составляем характеристическое уравнение: $\lambda^2 - \lambda = 0$. Находим корни этого уравнения: $\lambda = 0$ или $\lambda = 1$. Корни характеристического уравнения действительные и различные, а, следовательно, фундаментальная система решений имеет вид: $y_1 = e^{0 \cdot x} = 1$, $y_2 = e^x$. Тогда, согласно формуле (4.1.2), находим общее решение $y_{o.o} = C_1 + C_2 e^x$. Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $y_{ч.н} = C_1(x) + C_2(x) e^x$.

Для определения произвольных функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ составим систему уравнений вида (5.1.4):

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x) e^x = 0, \\ \qquad\qquad C_2'(x) e^x = e^{2x} \sin e^x. \end{cases}$$

Решая систему, имеем $C_2(x) = -\cos e^x$, $C_1(x) = e^x \cos e^x - \sin e^x$. Следовательно, частное решение заданного неоднородного уравнения может быть записано в виде $y_{ч.н} = -\sin e^x$.

Согласно формуле (5.1.2), получаем общее решение исходного неоднородного дифференциального уравнения: $y_{о.н} = C_1 + C_2 e^x - \sin e^x$.

5.2.2 Найти общее решение уравнения $y'' - 3y' + 2y = 130 \cdot \sin 3x$.

Решение. Составляем соответствующее однородное уравнение $y'' - 3y' + 2y = 0$. Его характеристическое уравнение $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Следовательно, $y_{о.о.} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

Правая часть исходного уравнения имеет специальный вид $130 \cdot \sin 3x = e^{0x}(0 \cdot \cos 3x + 130 \cdot \sin 3x)$, причём $\alpha \pm \beta i = 0 \pm 3i = \pm 3i$ не является корнем характеристического уравнения. Тогда частное решение можно записать в виде $y_{ч.н.} = A \cos 3x + B \sin 3x$. После дифференцирования функции $y_{ч.н.}$ и подстановки её производных в исходное уравнение, имеем

$$(-7A - 9B)\cos 3x + (9A - 7B)\sin 3x = 130 \cdot \sin 3x.$$

Приравнивая коэффициенты при функциях $\cos 3x$ и $\sin 3x$, получаем $A = 9$, $B = -7$. Тогда $y_{ч.н.} = 9\cos 3x - 7\sin 3x$. Следовательно, согласно формуле (5.1.2), общее решение уравнения: $y_{о.н.} = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 9\cos 3x - 7\sin 3x$.

5.2.3 Найти общее решение уравнения $y'' - 8y' + 20y = 10e^{5x}$.

Решение. Составляем соответствующее однородное уравнение $y'' - 8y' + 20y = 0$. Его характеристическое уравнение $\lambda^2 - 8\lambda + 20 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = 4 \pm 2i$. Следовательно, $y_{о.о.} = C_1 e^{4x} \cos 2x + C_2 e^{4x} \sin 2x$.

Правая часть исходного уравнения имеет специальный вид $10e^{5x}=e^{5x}(10\cdot\cos(0\cdot x)+Q_m(x)\cdot\sin(0\cdot x))$, причём $\alpha\pm\beta i=5\pm 0i=5$ не является корнем характеристического уравнения. Тогда частное решение можно записать в виде $y_{ч.н.}=Ae^{5x}$. После дифференцирования функции $y_{ч.н.}$ и подстановки её производных в исходное уравнение, имеем $5Ae^{5x}=10\cdot e^{5x}$. Откуда получаем $A=2$. Тогда $y_{ч.н.}=2e^{5x}$. Следовательно, согласно формуле (5.1.2), общее решение уравнения: $y_{о.н.}=C_1e^{4x}\cos 2x+C_2e^{4x}\sin 2x+2e^{5x}$.

5.2.4 Найти общее решение уравнения $y'''-4y''=48x^2-48x-10$.

Решение. Составляем соответствующее однородное уравнение $y'''-4y''=0$. Его характеристическое уравнение $\lambda^3-4\lambda^2=0$ имеет корни $\lambda_{1,2}=0$, $\lambda_3=4$. Следовательно, $y_{о.о.}=C_1+C_2x+C_3e^{4x}$.

Правая часть исходного уравнения имеет специальный вид $48x^2-48x-10=e^{0x}((48x^2-48x-10)\cdot\cos(0\cdot x)+Q_m(x)\cdot\sin(0\cdot x))$, причём $\alpha\pm\beta i=0$ является корнем характеристического уравнения кратности 2. Тогда частное решение можно записать в виде $y_{ч.н.}=x^2\left(Ax^2+Bx+C\right)=Ax^4+Bx^3+Cx^2$. После дифференцирования функции $y_{ч.н.}$ и подстановки её производных в исходное уравнение имеем

$$-48Ax^2+(24A-24B)x+6B-8C=48x^2-48x-10.$$

Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях, получаем $A=-1$, $B=1$, $C=2$. Тогда $y_{ч.н.}=-x^4+x^3+2x^2$. Следовательно, согласно формуле (5.1.2), общее решение уравнения: $y_{о.н.}=C_1+C_2x+C_3e^{4x}-x^4+x^3+2x^2$.

5.2.5 Свободно висящая на крюке однородная цепь соскальзывает с него под действием собственного веса (трением пренебрегаем). Определить, за какое время (в секундах) соскользнёт с крюка вся цепь, если в начальный момент с одной стороны крюка висело 20 м, а с другой стороны − 12 м цепи, и скорость цепи равна нулю.

Решение. Предположим, что вес одного погонного метра цепи равен P. Обозначим через x длину большей части цепи, свешивающейся с крюка через время t после начала движения. К центру тяжести цепи приложена сила $F=(x-(32-x))\cdot P=P\cdot(2x-32)$, масса цепи равна $\frac{32}{g}P$, а ускорение равно $x''(t)$. Используя второй закон Ньютона, приходим к уравнению движения центра тяжести цепи: $\frac{32}{g}\cdot P\cdot x''=(2x-32)\cdot P$ или $x''-\frac{g}{16}x=-g$. Данное уравнение необходимо решить при начальных условиях $x(0)=20$, $x'(0)=0$.

Записываем соответствующее однородное уравнение $x'' - \frac{g}{16}x = 0$ и его характеристическое уравнение $\lambda^2 - \frac{g}{16} = 0$, корнями которого являются числа $\lambda_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{g}}{4}$. Частное решение дифференциального уравнения находим в виде $x^* = A$. После подстановки в уравнение $x'' - \frac{g}{16}x = -g$ находим $A = 16$ или $x^* = 16$.

Таким образом, общим решением дифференциального уравнения, согласно формуле (5.1.2), является функция $x(t) = C_1 e^{\frac{\sqrt{g}}{4}t} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{g}}{4}t} + 16$.

Использование начальных условий даёт два уравнения: $C_1 + C_2 + 16 = 20$, $\frac{\sqrt{g}}{4}C_1 - \frac{\sqrt{g}}{4}C_2 = 0$. Решая полученную систему, находим $C_1 = C_2 = 2$. Тогда частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям, имеет вид

$$x(t) = 2 \cdot e^{\frac{\sqrt{g}}{4}t} + 2 \cdot e^{-\frac{\sqrt{g}}{4}t} + 16 = 4\operatorname{ch}\frac{\sqrt{g}}{4}t + 16.$$

Время, за которое соскользнёт вся цепь, определяется из условия: $x(T) = 32$. Решая уравнение $4\operatorname{ch}\frac{\sqrt{g}}{4}T + 16 = 32$, находим время $T \approx 2{,}64$ *с*.

5.3 Задания для решения на практическом занятии

5.3.1 Найти общее решение уравнения $y'' + 5y' + 6y = \frac{1}{1 + e^{2x}}$.

5.3.2 Найти общее решение уравнения $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x$.

5.3.3 Найти общее решение уравнения $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$.

5.3.4 Решить задачу Коши: $y'' + 4y = \operatorname{ctg} 2x$, $y\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2}$, $y'\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

5.3.5 Найти общее решение уравнения $y'' + 5y' + 6y = 3x + 2$.

5.3.6 Найти общее решение уравнения $y'' + 8y' = 60x^2 - 32x^3 + 18x$.

5.3.7 Найти общее решение уравнения $y'' + 9y = 36e^{3x}$.

5.3.8 Найти общее решение уравнения $y''' + 2y'' + y' = -2e^{-2x}$.

5.3.9 Найти общее решение уравнения $y'' + 9y = e^x \cos 3x$.

5.3.10 Найти общее решение уравнения $y'' - 5y' - 6y = 19 \cdot \sin x + 3\cos x$.

5.3.11 Найти общее решение уравнения $y'' + y' - 2y = \sin 2x$.

5.3.12 Решить задачу Коши: $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 9$.

5.3.13 Найти частное решение уравнения $y'' + 3y' = (40x + 58)e^{2x}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

5.3.14 Решить задачу Коши: $y'' + y = \cos 3x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

5.3.15 Найти общее решение уравнения $y'' + y = xe^x + 2e^{-x}$.

5.3.16 Найти общее решение уравнения $y''' + y'' - 2y' = x - e^x$.

5.3.17 Определить закон движения материальной точки массой m, перемещающейся по прямой под влиянием восстанавливающей силы, направленной к началу отсчёта перемещений и прямо пропорциональной расстоянию точки от начала отсчёта, если сопротивление среды отсутствует, но на точку действует внешняя сила $F_1 = A\cos\omega t$.

5.3.18 Решить задачу № 5.2.5 с учётом трения цепи о крюк, если сила трения равна весу одного метра цепи.

5.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

5.4.1 Найдите общее решение дифференциального уравнения.

5.4.1.1 $y'' - 2y' + y = 6xe^x$.

5.4.1.2 $y'' + 2y' + 5y = 17\sin 2x$.

5.4.1.3 $y'' - 2y' + 10y = 37\cos 3x$.

5.4.1.4 $y'' - y = -4\cos x + 2\sin x$.

5.4.1.5 $y'' - y' - 6y = 9\cos x - \sin x$.

5.4.1.6 $y'' - y' + y = -13\sin 2x$.

5.4.1.7 $y'' + 8y' + 25y = 18e^{5x}$.

5.4.1.8 $2y'' + 7y' + 3y = 222\sin 3x$.

5.4.1.9 $6y'' - y' - y = 3e^{2x}$.

5.4.1.10 $y'' + y = 4xe^x$.

5.4.1.11 $y'' + 2y' + 37y = 2x + 5$.

5.4.1.12 $y'' - 4y' + 5y = 3\sin x + \cos x$.

5.4.1.13 $y'' + 6y' + 5y = 25x^2 - 2$.

5.4.1.14 $y'' + y' + y = 6e^{-x}$.

5.4.1.15 $y'' - 4y' + 29y = 104\sin 5x$.

5.4.1.16 $y'' + 16y = 8\cos 4x$.

5.4.1.17 $y'' - 5y' + 4y = 4x^2e^{2x}$.

5.4.1.18 $y'' - 12y' + 40y = 2e^{6x}$.

5.4.1.19 $y'' + 9y = 9x^4 + 12x^2 - 27$.

5.4.1.20 $y'' + 4y' = e^x(12\cos 2x + \sin 2x)$.

5.4.1.21 $y'' - 6y' + 13y = -3\cos 2x$.

5.4.1.22 $y'' - 3y' + 2y = 5\sin 2x$.

5.4.1.23 $y'' + y = 2\cos 5x + 3\sin 5x$.

5.4.1.24 $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 5x$.

5.4.1.25 $y''' - y'' = 12x^2 + 6x$.

5.4.1.26 $y'' + 2y' + 5y = -\cos x$.

5.4.1.27 $y'' + y = 2\cos 3x - 3\sin 3x$.

5.4.1.28 $y'' - 8y' = 16 + 48x^2 - 128x^3$.

5.4.1.29 $y'' + 2y' - 3y = x^2 e^x.$

5.4.1.30 $y'' - 9y' + 18y = 26\cos x.$

5.4.2 Решить задачу Коши при заданных начальных условиях.

5.4.2.1 $y'' + y' = 2x\cos x,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

5.4.2.2 $y'' - y' = 2(1 - x),$ $y(0) = y'(0) = 1.$

5.4.2.3 $y''' - y' = 6 - 3x^2,$ $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1.$

5.4.2.4 $y'' - 4y' + 5y = xe^{2x},$ $y(0) = -1,\ y'(0) = 0.$

5.4.2.5 $y'' - 2y' + 5y = e^{2x},$ $y(0) = 0, y'(0) = 4.$

5.4.2.6 $y'' - 4y' + 4y = e^{2x},$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 8.$

5.4.2.7 $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 12x + 2,$ $y(0) = 1, y'(0) = 3.$

5.4.2.8 $y'' - 10y' + 25y = (2x - 1)e^{5x},$ $y(0) = 1, y'(0) = 6.$

5.4.2.9 $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5,$ $y(0) = y'(0) = 0.$

5.4.2.10 $y'' + 9y = 15\sin 2x,$ $y(0) = -7,\ y'(0) = 0.$

5.4.2.11 $y'' + y' = 2x^2 e^x,$ $y(0) = 5,\ y'(0) = 0,5.$

5.4.2.12 $y'' + 3y' + 2y = 1 + x + x^2,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

5.4.2.13 $y'' + 9y = \cos 3x,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

5.4.2.14 $y'' + 2y' + y = \cos x,$ $y(0) = y'(0) = 0.$

5.4.2.15 $y'' + y' = 2x + x^2,$ $y(0) = 4,\ y'(0) = -2.$

5.4.2.16 $y'' - 9y = e^{-2x},$ $y(0) = y'(0) = 0.$

5.4.2.17 $y''' + y'' = \sin x,$ $y(0) = y'(0) = 1, y''(0) = 0.$

5.4.2.18 $y''' - 2y'' + y' = 4,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 2, y''(0) = -2.$

5.4.2.19 $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$

5.4.2.20 $4y'' - 4y' + y = e^{x/2},$ $y(0) = -2,\ y'(0) = 0.$

5.4.2.21 $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3),$ $y(0) = 2, y'(0) = 2.$

5.4.2.22 $y'' - 8y' + 16y = \left(2x - 3\right)e^{4x},$ $y(0) = y'(0) = 0.$

5.4.2.23 $y'' - 10y' + 25y = \left(x^2 + 8x\right)e^{5x},$ $y(0) = 1, y'(0) = 0.$

5.4.2.24 $y'' + 4y = 4e^{7x},$ $y(0) = y'(0) = 0.$

5.4.2.25 $y'' + 9y = 36e^{3x},$ $y(0) = 2, y'(0) = 6.$

5.4.2.26 $y'' - 8y' + 16y = \left(x + 6\right)e^{4x},$ $y(0) = 0, y'(0) = 1.$

5.4.2.27 $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x},$ $y(0) = y'(0) = 0.$

5.4.2.28 $y'' - 2y' + y = 16e^x,$ $y(0) = 1, y'(0) = 2.$

5.4.2.29 $y'' - 3y' + 2y = 5\sin 2x,$ $y(0) = 3/4, y'(0) = -1/2.$

5.4.2.30 $y'' - 4y' = 6x^2 + 1,$ $y(0) = 2, y'(0) = 3.$

5.4.3 Решить задачу Коши при заданных начальных условиях.

5.4.3.1 $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x},$
$y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

5.4.3.2 $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^x}{(1 + e^{-x})},$
$y(0) = y'(0) = 0.$

5.4.3.3 $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x},$
$y(\pi/2) = 1,\ y'(\pi/2) = \pi/2.$

5.4.3.4 $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{(1 + e^{-x})},$
$y(0) = 1 + 2\ln 2,\ y'(0) = 3\ln 2.$

5.4.3.5 $y'' + y = 2\mathrm{ctg}x,$
$y(\dfrac{\pi}{2}) = 1,\ y'(\dfrac{\pi}{2}) = 2.$

5.4.3.6 $y'' + 4y = \dfrac{4}{\cos 2x},$
$y(0) = 2,\ y'(0) = 0.$

5.4.3.7 $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{e^{-x}}{(2 + e^x)},$
$y(0) = y'(0) = 0.$

5.4.3.8 $y'' + 9y = \dfrac{9}{\cos 3x},$
$y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

5.4.3.9 $y'' + 6y' + 8y = \dfrac{4e^{-2x}}{2 + e^{2x}},$
$y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

5.4.3.10 $y'' + 16y = \dfrac{16}{\sin 4x},$
$y(\pi/8) = 3,\ y'(\pi/8) = 2\pi.$

5.4.3.11 $y'' + 4y = \dfrac{4}{\sin 2x},$
$y(\pi/4) = 2,\ y'(\pi/4) = \pi.$

5.4.3.12 $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{(2 + e^{-x})},$
$y(0) = 1 + 3\ln 3,\ y'(0) = 5\ln 3.$

5.4.3.13 $y'' + 0{,}25 \cdot y = 0{,}25 \cdot \mathrm{ctg}(0{,}5 \cdot x),$
$y(\pi) = 2,\ y'(\pi) = 0{,}5.$

5.4.3.14 $y'' - y' = \dfrac{e^{-x}}{2 + e^{-x}},$
$y(0) = \ln 27, y'(0) = \ln 9 - 1.$

5.4.3.15 $y'' - y' = \dfrac{1}{1 + e^x},$
$y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$

5.4.3.16 $y'' + y = 4\mathrm{ctg}x,$
$y(\pi/2) = 4,\ y'(\pi/2) = 4.$

5.4.3.17 $y'' + 9y = \dfrac{9}{\sin 3x},$
$y(\pi/6) = 4, y'(\pi/6) = 3\pi/2.$

5.4.3.18 $y'' + 16y = \dfrac{16}{\cos 4x},$
$y(0) = 3,\ y'(0) = 0.$

5.4.3.19 $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4}{2 + e^{-2x}},$
$y(0) = 1 + 3\ln 3,\ y'(0) = 10\ln 3.$

5.4.3.20 $y'' + \pi^2 y = \dfrac{\pi^2}{\cos \pi x},$
$y(0) = 3,\ y'(0) = 0.$

5.4.3.21 $y'' + 4y = 8\mathrm{ctg}2x,$
$y(\pi/4) = 5,\ y'(\pi/4) = 4.$

5.4.3.22 $y'' + 3y' = \dfrac{9e^{3x}}{1 + e^{3x}},$
$y(0) = \ln 4, y'(0) = 3 - \ln 8.$

5.4.3.23 $y'' + \pi^2 y = \dfrac{\pi^2}{\sin \pi x},$
$y(1/2) = 1, y'(1/2) = \pi^2/2.$

5.4.3.24 $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4}{1 + e^{-2x}},$
$y(0) = 1 + 2\ln 2,\ y'(0) = 6\ln 2.$

5.4.3.25 $y'' + \frac{1}{\pi^2} y = \frac{1}{\pi^2 \cos \frac{x}{\pi}}$,
$y(0) = 2,\ y'(0) = 0.$

5.4.3.26 $y'' + 4y = 4\operatorname{ctg} 2x$,
$y(\pi/4) = 3, y'(\pi/4) = 2.$

5.4.3.27 $y'' - 6y' + 8y = \frac{4e^{2x}}{2 + e^{-2x}}$,
$y(0) = y'(0) = 0.$

5.4.3.28 $y'' + y = -\operatorname{ctg}^2 x$,
$y(\pi/2) = 2,\ y'(\pi/2) = 0.$

5.4.3.29 $y'' - 9y' + 18y = \frac{9e^{3x}}{1 + e^{-3x}}$,
$y(0) = y'(0) = 0.$

5.4.3.30 $y'' + y = \operatorname{tg}^2 x$,
$y(0) = -2,\ y'(0) = 0.$

6 СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Содержание: нормальные системы дифференциальных уравнений, решение систем дифференциальных уравнений методом исключений, линейные системы дифференциальных уравнений, линейные однородные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

6.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Система дифференциальных уравнений представляет собой совокупность дифференциальных уравнений, в каждое из которых входят независимая переменная, искомая функция и её производные.

Определение 6.1.1 *Нормальной системой дифференциальных уравнений* n-го порядка называется система вида

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n); \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{cases} \qquad (6.1.1)$$

Введем векторные обозначения для нормальной системы дифференциальных уравнений:

$$\vec{y}(x)=\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix}^T;\ \frac{d\,\vec{y}}{dx}=\begin{bmatrix} \dfrac{dy_1}{dx} & \dfrac{dy_2}{dx} & \dots & \dfrac{dy_n}{dx} \end{bmatrix}^T;\ f=\begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \end{bmatrix}^T.$$

Тогда систему дифференциальных уравнений (6.1.1) можно записать в векторной форме

$$\frac{d\,\vec{y}}{dx}=\vec{f}(x,\vec{y}). \tag{6.1.2}$$

Определение 6.1.2 Вектор – функция $\vec{y}_0(x)==\begin{bmatrix} y_1^0 & y_2^0 & \dots & y_n^0 \end{bmatrix}^T$, определенная на интервале $(a;b)$, называется *решением* системы (6.1.1) или (6.1.2), если она непрерывна и дифференцируема на заданном интервале и подстановке её в систему дифференциальных уравнений, все её уравнения обращаются в тождество.

Задача отыскания решения системы (6.1.1) или (6.1.2), которое удовлетворяет начальным условиям $\vec{y}(x_0)=\vec{y}_0$, записанным в векторной форме, или в координатной форме

$$\begin{cases} y_1(x_0)=y_1^0; \\ y_2(x_0)=y_2^0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n(x_0)=y_n^0\ , \end{cases} \tag{6.1.3}$$

называется *задачей Коши*, а условия (6.1.3) – условиями задачи Коши.

Теорема 6.1.1 (существования и единственности задачи Коши). Если в окрестности точки $M_0(x_0;y_1^0;y_2^0;...;y_n^0)$, $(n+1)$ – мерного пространства функции f_i непрерывны и имеют ограниченные частные производные, то в δ-окрестности точки x_0 существует и притом единственное решение $y_1=y_1(x);\ y_2=y_2(x);\dots;y_n=y_n(x)$ системы (6.1.1), удовлетворяющее начальным условиям $y_1(x_0)=y_1^0;\ y_2(x_0)=y_2^0;\dots;y_n(x_0)=y_n^0$.

Определение 6.1.3 *Общим решением* системы дифференциальных уравнений называется система функций $y_i=y_i(x,C_1,C_2,...,C_n)$, где $i=\overline{1,...,n}$, удовлетворяющая условиям:

1) при любых допустимых константах $C_1,C_2,...,C_n$ эта система функций удовлетворяет всем уравнениям системы дифференциальных уравнений;

2) при любых начальных условиях $y_i(x_0)=y_i^0$, $i=\overline{1,...,n}$ можно подобрать такие значения постоянных $C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0$, так чтобы система функций $y_i = y_i\left(x, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0\right)$ являлась решением системы.

Решение системы дифференциальных уравнений при определенных значениях постоянных называется *частным решением* системы.

Между нормальной системой ДУ-*n* и дифференциальным уравнением *n*-го порядка существует тесная связь. В частности любое дифференциальное уравнение n-го порядка вида $y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$ можно свести к нормальной системе n-го порядка.

Пусть $y = y_1$, тогда $y_1' = y' = y_2$,

$$y'' = y_2' = y_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.....$$
$$y^{(n-1)} = y_{n-1}' = y_n,$$
$$y_n' = y_{n+1}.$$

Тогда приходим к нормальной системе *n* дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n-1}' = y_n, \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{cases} \tag{6.1.4}$$

При определенных условиях решение нормальной системы дифференциальных уравнений можно свести к решению дифференциального уравнения того же порядка.

Рассмотрим *алгоритм решения поставленной задачи*.

Продифференцируем первое уравнение системы (6.1.1) по переменной x: $\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial y_k} \cdot y_k' = \varphi_2(x, y_1, y_2, ..., y_n)$. В данном уравнении вместо y_k' подставляем их значения из системы (6.1.1). Полученное равенство снова продифференцируем по переменной x: $\frac{d^3y_1}{dx^3} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_k} \cdot y_k' = \varphi_3(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ и так далее $\frac{d^ny_1}{dx^n} = \varphi_n(x, y_1, y_2, ..., y_n)$. В результате исходная система будет эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ...y_n), \\ \dfrac{d^2y_1}{dx^2} = \varphi_2(x, y_1, y_2, ...y_n), \\ .... \\ \dfrac{d^ny_1}{dx^n} = \varphi_n(x, y_1, y_2, ...y_n). \end{cases} \tag{6.1.5}$$

Если можно из $(n-1)$ первых уравнений полученной системы выразить функции $y_2, y_3, ..., y_n$ и подставить их в последнее уравнение, то получаем дифференциальное уравнение *n*-го порядка: $\dfrac{d^n y_1}{dx^n} = f\left(x, y_1, \dfrac{dy_1}{dx}, \dfrac{d^2y_1}{dx^2}, ..., \dfrac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\right)$. В общем случае порядок ДУ может получиться меньше n. Данный метод решения нормальной системы ДУ называется *методом исключения*.

Определение 6.1.4 *Нормальной линейной* системой дифференциальных уравнений называется система вида

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + ... + a_{1n}(x)y_n + \varphi_1(x), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + ... + a_{2n}(x)y_n + \varphi_2(x), \\ .... \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + ... + a_{nn}(x)y_n + \varphi_n(x). \end{cases} \tag{6.1.6}$$

В векторной форме систему можно записать в виде $\dfrac{d\vec{y}}{dx} = A\vec{y} + \vec{\varphi}(x)$. Если $\vec{\varphi}(x) \equiv 0$, то линейная система называется однородной, и в векторной форме однородная система имеет вид: $\dfrac{d\vec{y}}{dx} = A\vec{y}$. Если $\vec{\varphi}(x)$ тождественно не равно нулю, то система называется неоднородной. Применяя метод исключения к нормальной линейной системе, её решение сведется к решению линейного дифференциального уравнения n-ого порядка или меньше.

Если $\vec{y}_{о.о.}(x)$ – решение однородной системы $\dfrac{d\vec{y}}{dx} = A\vec{y}$, а $\vec{y}_{ч.н.}(x)$ - частное решение неоднородной системы $\dfrac{d\vec{y}}{dx} = A\vec{y} + \vec{\varphi}(x)$, то $\vec{y}_{о.о.}(x) + \vec{y}_{ч.н.}(x)$ - решение неоднородной системы.

Определение 6.1.5 Система функций $\vec{y}_1(x), \vec{y}_2(x), ..., \vec{y}_n(x)$ называется *линейно зависимой*, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, по крайней мере, одно из которых отлично от нуля, такие, что линейная комбинация векторов равна нулю, то есть выполняется равенство

$$\alpha_1 \vec{y}_1(x) + \alpha_2 \vec{y}_2(x) + ... + \alpha_n \vec{y}_n(x) = 0. \qquad (6.1.7)$$

Если из равенства (6.1.7) следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, то система функций называется *линейно независимой*.

Выпишем координаты вектор-функции.

$$\begin{array}{c} \vec{y}_1(x) = \left[y_{11}(x) \quad y_{21}(x) \quad ... \quad y_{n1}(x) \right]^T \\ \vec{y}_2(x) = \left[y_{12}(x) \quad y_{22}(x) \quad ... \quad y_{n2}(x) \right]^T \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \vec{y}_n(x) = \left[y_{1n}(x) \quad y_{2n}(x) \quad ... \quad y_{nn}(x) \right]^T \end{array}$$

Теорема 6.1.2 Если система линейно зависима, то определитель Вронского (или вронскиан) равен нулю:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & .... & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & .... & y_{2n}(x) \\ .... & .... & .... & .... \\ y_{n1}(x) & y_{n1}(x) & .... & y_{nn}(x) \end{vmatrix} = 0. \qquad (6.1.8)$$

Теорема 6.1.3 Для того чтобы система решений $\vec{y}_1(x), \vec{y}_2(x), ..., \vec{y}_n(x)$ однородной нормальной линейной системы была линейно независимой на интервале (a,b), необходимо и достаточно, чтобы её вронскиан был отличен от нуля в каждой точке данного интервала $\big(W(x) \neq 0\big)$.

Определение 6.1.6 Любая совокупность n линейно независимых решений однородной линейной системы *n*-ого порядка называется *фундаментальной системой решений*.

Теорема 6.1.4 (об общем решении однородной системы). Линейная комбинация любой фундаментальной системы решений с произвольными коэффициентами является общим решением однородной системы линейных уравнений.

$$\vec{y}_{o.o.} = \sum_{i=1}^{n} C_i \vec{y}_i(x) = C_1 \vec{y}_1(x) + C_2 \vec{y}_2(x) + ... + C_n \vec{y}_n(x). \qquad (6.1.9)$$

Теорема 6.1.5 (об общем решении неоднородной системы). Общее решение неоднородной системы представляет собой сумму общего решения соответствующей однородной системы и некоторого частного решения неоднородной системы дифференциальных уравнений.

$$\vec{y}_{о.н.}(x) = \vec{y}_{о.о.}(x) + \vec{y}_{ч.н.}(x).$$

Теорема 6.1.6 Если комплексно-значимая функция $\vec{y}(x) = \vec{u}(x) + i \cdot \vec{v}(x)$ является решением однородной системы дифференциальных уравнений, то решением этой системы будут действительные вектор-функции $\vec{u} = \vec{u}(x)$ и $\vec{v} = \vec{v}(x)$.

Рассмотрим линейные однородные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Определение 6.1.7 *Однородной линейной системой дифференциальных уравнений* с постоянными коэффициентами называется система вида

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n. \end{cases} \tag{6.1.10}$$

Решение системы (6.1.10) находят в виде

$$y_1 = \gamma_1 e^{\lambda x}, \quad y_2 = \gamma_2 e^{\lambda x}, \ldots\ldots, y_n = \gamma_n e^{\lambda x}. \tag{6.1.11}$$

В результате подстановки функций и её производных в систему (6.1.10) приходим к однородной системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\gamma_1 + \quad a_{12}\gamma_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}\gamma_n = 0, \\ \quad a_{21}\gamma_1 + (a_{22} - \lambda)\gamma_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{2n}\gamma_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad a_{n1}\gamma_1 + \quad a_{n2}\gamma_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)\gamma_n = 0. \end{cases} \tag{6.1.12}$$

Полученная система будет иметь не нулевое решение в том и только в том случае, если определитель основной матрицы системы отличен от нуля.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (6.1.13)$$

Записанное уравнение относительно параметра λ называется характеристическим уравнением однородной линейной системы дифференциальных уравнений.

1. Все корни характеристического уравнения действительные и различные: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Подставляя найденные собственные значения в систему (6.1.12) и решая её, находим n линейно независимых собственных векторов основной матрицы системы:

$$\vec{\gamma}^1 = \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \\ \vdots \\ \gamma_{n1} \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma}^2 = \begin{pmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \\ \vdots \\ \gamma_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \vec{\gamma}^n = \begin{pmatrix} \gamma_{1n} \\ \gamma_{2n} \\ \vdots \\ \gamma_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (6.1.14)$$

Этим собственным векторам будет соответствовать n векторов, которые являются решениями системы (6.1.10):

$$\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} \gamma_{11}e^{\lambda_1 x} \\ \gamma_{21}e^{\lambda_1 x} \\ \vdots \\ \gamma_{n1}e^{\lambda_1 x} \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} \gamma_{12}e^{\lambda_2 x} \\ \gamma_{22}e^{\lambda_2 x} \\ \vdots \\ \gamma_{n2}e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix}, \quad \dots, \vec{y}_n = \begin{pmatrix} \gamma_{1n}e^{\lambda_n x} \\ \gamma_{2n}e^{\lambda_n x} \\ \vdots \\ \gamma_{nn}e^{\lambda_n x} \end{pmatrix}. \qquad (6.1.15)$$

Общее решение системы однородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами для случая действительных различных корней характеристического уравнения имеет вид: $\vec{y} = C_1\vec{y}_1(x) + C_2\vec{y}_2(x) + \dots + C_n\vec{y}_n(x)$, или в координатной форме

$$\begin{cases} y_1 = C_1\gamma_{11}e^{\lambda_1 x} + C_2\gamma_{12}e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n\gamma_{1n}e^{\lambda_n x}, \\ y_2 = C_1\gamma_{21}e^{\lambda_1 x} + C_2\gamma_{22}e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n\gamma_{2n}e^{\lambda_n x}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = C_1\gamma_{n1}e^{\lambda_1 x} + C_2\gamma_{n2}e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n\gamma_{nn}e^{\lambda_n x}. \end{cases} \qquad (6.1.16)$$

2. Корни характеристического уравнения различны, но среди них есть комплексный корень. Пусть $\lambda = \alpha + \beta i$ – комплексный корень характеристического уравнения. Так как коэффициенты в характеристическом уравнении дей-

ствительные, то сопряженное число $\alpha - \beta i$ также является корнем уравнения. Полученным комплексно-сопряженным собственным значениям матрицы коэффициентов будут соответствовать собственные векторы с комплексно-сопряженными координатами:

$$\vec{\gamma} = \vec{p} + i\vec{q} = \begin{pmatrix} p_1 + iq_1 \\ p_2 + iq_2 \\ \dots\dots\dots \\ p_n + iq_n \end{pmatrix}. \tag{6.1.17}$$

Тогда решение системы в векторной форме может быть записано в виде:

$$\vec{y} = \vec{\gamma} \cdot e^{(\alpha+\beta i)x} = \begin{pmatrix} (p_1 + iq_1)e^{(\alpha+\beta i)x} \\ (p_2 + iq_2)e^{(\alpha+\beta i)x} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (p_n + iq_n)e^{(\alpha+\beta i)x} \end{pmatrix} = \vec{u}(x) + i\,\vec{v}(x), \tag{6.1.18}$$

где

$$\vec{u}(x) = \begin{pmatrix} e^{\alpha x}(p_1 \cos\beta x - q_1 \sin\beta x) \\ e^{\alpha x}(p_2 \cos\beta x - q_2 \sin\beta x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e^{\alpha x}(p_n \cos\beta x - q_n \sin\beta x) \end{pmatrix}, \quad \vec{v}(x) = \begin{pmatrix} e^{\alpha x}(p_1 \sin\beta x + q_1 \cos\beta x) \\ e^{\alpha x}(p_2 \sin\beta x + q_2 \cos\beta x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e^{\alpha x}(p_n \sin\beta x + q_n \cos\beta x) \end{pmatrix}. \tag{6.1.19}$$

Рассмотрим решение линейных неоднородных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \varphi_1(x), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \varphi_2(x). \end{cases} \tag{6.1.20}$$

Общее решение неоднородной системы представляет собой сумму общего решения однородной системы и частного решения неоднородной системы. Предположим, что известно общее решение однородной системы дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} y_1 = C_1 y_{11} + C_2 y_{12}, \\ y_2 = C_1 y_{21} + C_2 y_{22}. \end{cases} \tag{6.1.21}$$

Частное решение неоднородной системы можно найти методом вариации произвольных постоянных, которое состоит в том, что частное решение неоднородной системы имеет точно такой же вид, как и общее решение однородной системы, только считаем, что произвольные постоянные зависят от переменной x:

$$\begin{cases} y_1^* = C_1(x)y_{11} + C_2(x)y_{12}, \\ y_2^* = C_1(x)y_{21} + C_2(x)y_{22}. \end{cases} \tag{6.1.22}$$

Произвольные постоянные $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяем из системы:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_{11} + C_2'(x)y_{12} = \varphi_1(x), \\ C_1'(x)y_{21} + C_2'(x)y_{22} = \varphi_2(x). \end{cases} \tag{6.1.23}$$

6.2 Примеры решения типовых задач

6.2.1 Методом исключения найти частное решение системы

$$\begin{cases} 5\dot{y} - 2\dot{x} + 4y - x = e^{-t}, \\ \dot{y} + 8y - 3x = 5e^{-t}, \end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1,\ x(0) = 2$.

Решение. Исключаем x из уравнений системы. Из второго уравнения выражаем функцию $x = \frac{1}{3}\left(y' + 8y - 5e^{-t}\right)$. Подставив x в первое уравнение, после упрощения, приходим к линейному дифференциальному уравнению второго порядка относительно функции $y(t)$: $y'' + y' - 2y = -4e^{-t}$. Корнями характеристического уравнения $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ для соответствующего однородного дифференциального уравнения являются числа $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = -2$. Тогда общее решение однородного уравнения записываем в виде $y = C_1e^x + C_2e^{-2x}$.

Частное решение неоднородного уравнения записываем в виде $y^* = Ae^{-x}$. Находя первую и вторую производные, подставляем их и функцию в исходное уравнение, находим значение $A = 2$. На основании формулы (5.1.2) получаем общее решение дифференциального уравнения: $y = C_1e^t + C_2e^{-2t} + 2e^{-t}$.

После подстановки y и $y' = C_1e^t - 2C_2e^{-2t} - 2e^{-t}$ в выражение $x = \frac{1}{3}\left(y' + 8y - 5e^{-t}\right)$ находим функцию $x = 3C_1e^t + 2C_2e^{-2t} + 3e^{-t}$. Тогда общим решением заданной системы будут функции

$$\begin{cases} x = 3C_1e^t + 2C_2e^{-2t} + 3e^{-t}, \\ y = C_1e^t + C_2e^{-2t} + 2e^{-t}. \end{cases}$$

Найдём частное решение системы, подставив $y(0) = 1$ и $x(0) = 2$ в систему:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 2 = 1, \\ 3C_1 + 2C_2 + 3 = 2. \end{cases}$$

Решив систему относительно C_1 и C_2, получим $C_1 = 1$, $C_2 = -2$. Следовательно, частное решение системы имеет вид

$$\begin{cases} x = 3e^t - 4e^{-2t} + 3e^{-t}, \\ y = e^t - 2e^{-2t} + 2e^{-t}. \end{cases}$$

6.2.2 Методом исключения решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2 - y_3, \\ y_2' = -y_1 + y_2 + y_3, \\ y_3' = y_1 - y_3. \end{cases}$$

Решение. Исключим y_1 и y_2 из этих уравнений, для этого из третьего уравнения находим $y_1 = y_3' + y_3$. Продифференцируем полученное равенство по переменной x: $y_1' = y_3'' + y_3'$, подставив значения y_1 и y_1' в первое уравнение, найдём из него $y_2 = -\dfrac{1}{2}y_3''$, а, следовательно, $y_2' = -\dfrac{1}{2}y_3'''$.

Подставив y_2, y_2' и y_1 во второе уравнение, получим дифференциальное уравнение третьего порядка: $y_3''' - y_3'' - 2y_3' = 0$. Составляя характеристическое уравнение и находя его корни, записываем решение дифференциального уравнения: $y_3 = C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^{-x}$.

Чтобы определить неизвестные функции, находим y_3' и y_3'' из последнего равенства. Подставляя производные функции $y_3(x)$ в формулы $y_1 = y_3' + y_3$ и $y_2 = -\dfrac{1}{2}y_3''$, получаем общее решение системы.

$$\begin{cases} y_1(x) = C_1 + 3C_2e^{2x}, \\ y_2(x) = -2C_2e^{2x} - \dfrac{1}{2}C_3e^{-x}, \\ y_3(x) = C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^{-x}. \end{cases}$$

6.2.3 Найти общее решение системы дифференциальных уравнений, используя характеристическое уравнение системы.

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 + 2y_2 - y_3, \\ y_3' = y_1 - y_2 + 2y_3. \end{cases}$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3,$$

Находим собственные векторы, соответствующие полученным собственным значениям из системы.

$$\lambda_1 = 1 \quad \begin{cases} \gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 = 0 \\ \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 = 0 \\ \gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 = 0 \\ 2\gamma_2 - 2\gamma_3 = 0 \end{cases} \quad \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma; \quad \gamma_1 = 0$$

Тогда $\vec{\gamma}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Если $\gamma = 1$, то $\vec{\gamma}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\lambda_2 = 2 \quad \begin{cases} -\gamma_2 + \gamma_3 = 0 \\ \gamma_1 - \gamma_3 = 0 \\ \gamma_1 - \gamma_2 = 0 \end{cases} \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma = 1, \quad \vec{\gamma}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda_3 = 3 \quad \begin{cases} -\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 = 0 \\ \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 = 0 \\ \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 = 0 \\ -2\gamma_2 = 0 \end{cases} \quad \gamma_1 = \gamma_3 = \gamma = 1; \quad \gamma_2 = 0,\ \vec{\gamma}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Тогда общее решение в векторной форме $\vec{y} = C_1\vec{\gamma}^1 e^x + C_1\vec{\gamma}^2 e^{2x} + C_1\vec{\gamma}^3 e^{3x}$ или в координатной форме

$$\begin{cases} y_1 = \qquad\qquad C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}, \\ y_2 = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}, \\ y_3 = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}. \end{cases}$$

6.2.4 Найти общее решение системы дифференциальных уравнений, используя характеристическое уравнение системы.

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - 3y_2, \\ y_2' = 3y_1 + 2y_2. \end{cases}$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda_{1,2} = 2 \pm 3i$$

Найдем собственные векторы, которые соответствуют полученным собственным значениям.

$$\begin{cases} -3i\gamma_1 - 3\gamma_2 = 0, \\ 3\gamma_1 - 3i\gamma_2 = 0. \end{cases} \quad \gamma_1 = i, \ \gamma_2 = 1.$$

Фундаментальная система решений: $\begin{cases} y_1 = ie^{(2+3i)x} = e^{2x}(-\sin 3x + i\cos 3x) \\ y_2 = e^{(2+3i)x} = e^{2x}(\cos 3x + i\sin 3x) \end{cases}.$

Тогда

$$\vec{u}(x) = \begin{pmatrix} -e^{2x}\sin 3x \\ e^{2x}\cos 3x \end{pmatrix} \qquad \vec{v}(x) = \begin{pmatrix} e^{2x}\cos 3x \\ e^{2x}\sin 3x \end{pmatrix}.$$

Общее решение: $\begin{cases} y_1 = -C_1 e^{2x}\sin 3x + C_2 e^{2x}\cos 3x, \\ y_2 = C_1 e^{2x}\cos 3x + C_2 e^{2x}\sin 3x. \end{cases}$

6.2.5 Найти общее решение неоднородной системы дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dy} = -x + \dfrac{1}{\cos t}. \end{cases}$$

Решение. Найдем общее решение соответствующей однородной системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dy} = -x. \end{cases}$$

Применим метод исключения

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dy}{dt}, \\ \dfrac{dy}{dy} = -x. \end{cases}$$

Получаем линейное дифференциальное уравнение второго порядка $\dfrac{d^2x}{dt^2} + x = 0$. Характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 1 = 0$. Корни уравнения: $\lambda_{1,2} = \pm i$. Фундаментальная система решений: $x_1 = \cos t,\ x = \sin t$. Общее решение уравнения $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t$. По условию $y = \dfrac{dx}{dt} = -C_1 \sin t + C_2 \cos t$. Тогда общее решение однородной системы:

$$\begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \\ y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t. \end{cases}$$

Частное решение неоднородной системы находим в виде:

$$\begin{cases} x = C_1(t) \cos t + C_2(t) \sin t, \\ y = -C_1(t) \sin t + C_2(t) \cos t. \end{cases}$$

Произвольные постоянные $C_1(t)$ и $C_2(t)$ определим из системы:

$$\left.\begin{cases} C_1'(t) \cos t + C_2'(t) \sin t = 0 \\ -C_1'(t) \sin t + C_2'(t) \cos t = \dfrac{1}{\cos t} \end{cases}\right| \begin{matrix} \times \sin t \\ + \\ \times \cos t \end{matrix}$$

$$C_2'(t) = 1; \quad C_1'(t) = -\frac{\sin t}{\cos t}$$

$$C_2(t)=t;\quad C_1(t)=\ln\left|\cos t\right|$$

Частное решение неоднородной системы:

$$\begin{cases} x=\ln\left|\cos t\right|\cdot\cos t+t\cdot\sin t,\\ y=-\ln\left|\cos t\right|\cdot\sin t+t\cdot\cos t.\end{cases}$$

Общее решение неоднородной системы:

$$\begin{cases} x=C_1\cos t+C_2\sin t+\ln\left|\cos t\right|\cdot\cos t+t\cdot\sin t,\\ y=-C_1\sin t+C_2\cos t-\ln\left|\cos t\right|\cdot\sin t+t\cdot\cos t.\end{cases}$$

6.3 Задания для решения на практическом занятии

6.3.1 Решить систему дифференциальных уравнений методом исключений:

а) $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt}=4y_1-y_2,\\ \dfrac{dy_2}{dt}=y_1+2y_2;\end{cases}$

б) $\begin{cases} \dot{x}-5x+3y=2e^{3t},\\ \dot{y}-x-y=5e^{-t};\end{cases}$

в) $\begin{cases} y_1'=-3y_1+5y_2,\\ y_2'=3y_1-y_2,\end{cases}\quad y_1(0)=1,\ y_2(0)=-1;$

г) $\begin{cases} \dot{x}-2x+y=0,\\ \dot{y}+x-2y=5e^{t}\sin t,\end{cases}\quad x(0)=0,\ y(0)=0;$

д) $\begin{cases} x'-z-y=0,\\ y'-z-x=0,\\ z'-x-y=0,\end{cases}\quad x(0)=-1,\ y(0)=1,\ z(0)=0.$

6.3.2 Решить систему дифференциальных уравнений с использованием характеристического уравнения системы:

а) $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt}=-5y_1+y_2,\\ \dfrac{dy_2}{dt}=-2y_1-7y_2;\end{cases}$

б) $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = x + y + e^t; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y_1' = -5y_1 + 2y_2, \\ y_2' = y_1 - 6y_2, \end{cases}$ $y_1(0) = 5,\ y_2(0) = -29$;

г) $\begin{cases} \dot{x} = x + y - \cos t, \\ \dot{y} = -2x - y + \sin t + \cos t, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 3$.

д) $\begin{cases} x' = 5x + 2y - 3z, \\ y' = 4x + 5y - 4z, \\ z' = 6x + 4y - 4z, \end{cases}$ $x(0) = 6,\ y(0) = 7,\ z(0) = 10$.

6.3.3 Найти пару линий, обладающих следующими свойствами: а) касательные, проведённые в точках с одинаковыми абсциссами, пересекаются на оси ординат; б) нормали, проведённые в точках с одинаковыми абсциссами, пересекаются на оси абсцисс.

6.3.4 Два цилиндра, основания которых лежат в одной плоскости, соединённые внизу капиллярной трубкой, наполнены жидкостью до разной высоты. Через трубку в единицу времени протекает объём жидкости, пропорциональный разности высот. Найти закон изменения высоты жидкости в сосудах над капиллярной трубкой, если известны поперечные сечения сосудов.

6.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

6.4.1 Найти общее решение системы однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами двумя способами: а) методом исключения; б) используя характеристическое уравнение матрицы указанной системы.

6.4.1.1 $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 2y, \\ \dot{y} = 4x + 3y. \end{cases}$

6.4.1.2 $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 12y, \\ \dot{y} = x - 4y. \end{cases}$

6.4.1.3 $\begin{cases} \dot{x} = 6x + 2y, \\ \dot{y} = 4x + 4y. \end{cases}$

6.4.1.4 $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 12y, \\ \dot{y} = -x - 4y. \end{cases}$

6.4.1.5 $\begin{cases} \dot{x} = 14x + 2y, \\ \dot{y} = 4x + 12y. \end{cases}$

6.4.1.6 $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 6y, \\ \dot{y} = 2x - 4y. \end{cases}$

6.4.1.7 $\begin{cases} \dot{x} = 12x + 2y, \\ \dot{y} = 4x + 10y. \end{cases}$

6.4.1.8 $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y, \\ \dot{y} = -x - 2y. \end{cases}$

6.4.1.9 $\begin{cases} \dot{x} = 10x + 2y, \\ \dot{y} = 4x + 8y. \end{cases}$

6.4.1.10 $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 6y, \\ \dot{y} = 2x - 3y. \end{cases}$

6.4.1.11 $\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = -3x - 2y. \end{cases}$

6.4.1.12 $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y, \\ \dot{y} = x - 2y. \end{cases}$

6.4.1.13 $\begin{cases} \dot{x} = -x + 8y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$

6.4.1.14 $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 6y, \\ \dot{y} = -2x - 4y. \end{cases}$

6.4.1.15 $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -2x + 4y. \end{cases}$

6.4.1.16 $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 8y, \\ \dot{y} = x - 3y. \end{cases}$

6.4.1.17 $\begin{cases} \dot{x} = -5x + 2y, \\ \dot{y} = x - 6y. \end{cases}$

6.4.1.18 $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$

6.4.1.19 $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 4y, \\ \dot{y} = -x + y. \end{cases}$

6.4.1.20 $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 4y, \\ \dot{y} = -3x - 4y. \end{cases}$

6.4.1.21 $\begin{cases} \dot{x} = 6x - 2y, \\ \dot{y} = x + 3y. \end{cases}$

6.4.1.22 $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 8y, \\ \dot{y} = -x - 3y. \end{cases}$

6.4.1.23 $\begin{cases} \dot{x} = 8x - 3y, \\ \dot{y} = 2x + 3y. \end{cases}$

6.4.1.24 $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 4y, \\ \dot{y} = 3x - 4y. \end{cases}$

6.4.1.25 $\begin{cases} \dot{x} = 10x - 8y, \\ \dot{y} = -x + 4y. \end{cases}$

6.4.1.26 $\begin{cases} \dot{x} = 10x + 11y, \\ \dot{y} = 4x + 3y. \end{cases}$

6.4.1.27 $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 4x - 3y. \end{cases}$

6.4.1.28 $\begin{cases} \dot{x} = 8x - 6y, \\ \dot{y} = 2x - 5y. \end{cases}$

6.4.1.29 $\begin{cases} \dot{x} = 7x + 10y, \\ \dot{y} = -2x - 5y. \end{cases}$

6.4.1.30 $\begin{cases} \dot{x} = 7x + 10y, \\ \dot{y} = -2x - 5y. \end{cases}$

7 ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Содержание: определение числового ряда, частичная сумма ряда, сходимость ряда, необходимый и достаточный признаки сходимости ряда, свойства сходящихся рядов, необходимое и достаточное условия сходимости рядов с положительными членами, достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами (признак сравнения, предельный признак сравнения, признак Даламбера, радикальный признак Коши).

7.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Числовой ряд представляет собой бесконечную сумму чисел, которые располагаются в определённой последовательности.

Рассмотрим числовую последовательность $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...,$ где $a_n = f(n)$ – функция натуральных чисел.

Определение 7.1.1 *Бесконечным числовым рядом* называется выражение вида $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$, где $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ некоторые действительные или комплексные числа, которые называются членами ряда, а $a_n = f(n)$ – общим или n-м членом ряда.

Ряд считается вполне определённым, если задан общий член ряда. Числовой ряд часто записывают в виде $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Например, гармонический ряд имеет вид: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...$, а геометрический ряд может быть записан в виде $\sum_{n=1}^{\infty} bq^{n-1} = b + bq + bq^2 + ... + bq^{n-1} + ...$, где b и q – числа, отличные от нуля.

Определение 7.1.2 Сумма конечного числа первых членов ряда называется *частичной суммой* ряда.

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n - n$ частичная сумма ряда.

Частичные суммы ряда представляют числовую последовательность.

Определение 7.1.3 Числовой ряд называется *сходящимся*, если существует предел последовательности частичных сумм ряда, то есть $\lim_{n \to \infty} S_n = S$, при этом число S называется суммой ряда. Если указанный предел не существует или, в частности, равен бесконечности, то ряд называется *расходящимся*.

Пример 7.1.1 *Гармонический ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расходится.

Пример 7.1.2 *Обобщённый гармонический ряд* (*ряд Дирихле*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ – расходится, если $\alpha \le 1$, и сходится, если $\alpha > 1$. Сумма обобщённого гармонического ряда порядка α равна значению дзета-функции Римана $\varsigma(\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$. Для чётных чисел α значение выражается через число π, например $\varsigma(2)=\frac{\pi^2}{6}$, а для $\alpha = 3$ его значение аналитически неизвестно.

Пример 7.1.3 *Геометрический ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} bq^{n-1}$ – расходится, если $|q| \ge 1$, и сходится, если $|q| < 1$, а его сумма равна $S=\frac{b}{1-q}$.

Теорема 7.1.1 (необходимый признак сходимости ряда). Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то предел *n*-го члена равен нулю, то есть $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Этот признак является необходимым, но не достаточным, так, например, гармонический ряд расходится, но предел *n*-го члена равен нулю.

Теорема 7.1.2 (достаточный признак расходимости ряда). Если $\lim_{n\to\infty} a_n \ne 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – расходится.

Сформулируем основные свойства числовых рядов:

1) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и его сумма равна числу S, то будет сходиться ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$, причём сумма последнего ряда равна αS;

2) если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и их суммы равны S и σ, соответственно, то будет сходиться ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$, причём сумма последнего ряда равна $S \pm \sigma$;

3) сходимость или расходимость числового ряда не изменится, если в нём приписать или отбросить конечное число слагаемых.

Рассмотрим ряды с положительными членами.

Теорема 7.1.3 Для того, чтобы числовой ряд с положительными членами сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограничена.

Перечислим основные достаточные признаки сходимости и расходимости рядов с положительными членами.

Теорема 7.1.4 (признак сравнения). Пусть дан ряд (1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и ряд (2) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, причём для каждого члена рядов выполняется неравенство $0 < a_n \le b_n$. Тогда из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1). Из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

Признак остаётся в силе, если соответствующее неравенство выполняется не с первых членов ряда, а лишь начиная с некоторого члена N.

Теорема 7.1.5 (предельный признак сравнения). Пусть дан ряд (1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и ряд (2) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и существует предел $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = c\ (\ne 0, \ne \infty)$. Тогда ряды сходятся и расходятся одновременно. Если $c = 0$, то из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1). Если $c \to \infty$, то из расходимости ряда (2) следует расходимость ряда (1).

Теорема 7.1.6 (предельный признак Даламбера). Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами и существует предел $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Тогда

1) если $l < 1$, ряд сходится;
2) если $l > 1$, ряд расходится;
3) если $l = 1$, сомнительный случай, требуются дополнительные исследования.

Теорема 7.1.7 (предельный радикальный признак Коши). Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами и существует предел $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = l$. Тогда

1) если $l < 1$, ряд сходится;
2) если $l > 1$, ряд расходится;
3) если $l = 1$, сомнительный случай, требуются дополнительные исследования.

Экономические приложения числовых рядов

Формула наращенной суммы по дискретно изменяющимся процентным ставкам (нормам). Если P – первоначальная сумма, r_j $(j = \overline{1,k})$ – j-я ставка, действующая t_j времени, то итоговая сумма равна:

$$S = P(1 + r_1t_1 + r_2t_2 + \ldots + r_kt_k) = P(1 + \sum_{j=1}^{k} r_jt_j).$$

Множитель наращения в этом случае равен: $\mu = 1 + \sum_{j=1}^{k} r_jt_j$.

7.2 Примеры решения типовых задач

7.2.1 Написать первые четыре члена ряда, общий член которого задан формулой $a_n = (-1)^{n-1} n^2$.

Решение. Полагая в данной формуле $n = 1, 2, 3, 4$, находим первые четыре члена числового ряда: $a_1 = (-1)^{1-1} 1^2 = 1$, $a_2 = (-1)^{2-1} 2^2 = -4$, $a_3 = (-1)^{3-1} 3^2 = 9$, $a_4 = (-1)^{4-1} 4^2 = -16$. Таким образом, данный числовой ряд можно записать в виде $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot n^2 = 1 - 4 + 9 - 16 + \ldots + (-1)^{n-1} n^2 + \ldots$.

7.2.2 Найти общий член ряда $2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{2}{81} + \frac{4}{243} + \ldots$, считая, что последующие члены подчиняются тому же закону, по которому образованы первые члены ряда.

Решение. Каждый член ряда представляет собой дробь, числитель которой равен двойке для членов с нечётными номерами и четырём для членов с чётными номерами, а знаменатель – соответствующей степени числа три. Следовательно, числитель можно представить формулой $3 + (-1)^n$, а знаменатель – формулой 3^{n-1}, поэтому формула *n*-го члена ряда имеет вид: $a_n = \frac{3 + (-1)^n}{3^{n-1}}$.

7.2.3 Найти сумму ряда $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \ldots$.

Решение. Составим *n*-ю частичную сумму данного ряда:

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \ldots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)}.$$

Чтобы упростить выражение для частичной суммы S_n, преобразуем формулу для общего члена ряда, разлагая a_n на элементарные дроби. Положим

$$\frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1},$$

отсюда

$$\frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{(2A + 2B)n + (A - B)}{(2n-1) \cdot (2n+1)}.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях n в числителях обеих частей равенства, получаем: $2A + 2B = 0$, $A - B = 1$, откуда $A = 1/2$, $B = -1/2$.

Поэтому *n*-й член ряда имеет вид

$$a_n = \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Запишем *n*-ю частичную сумму данного ряда и преобразуем её:

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2n+1}\right).$$

Поскольку $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$, то данный ряд сходится и его сумма равна $S=1/2$.

7.2.4 Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{3n-7}$.

Решение. Воспользуемся достаточным признаком расходимости ряда.

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+5}{3n-7}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2+5/n}{3-7/n}=\frac{2}{3}\neq 0.$$

Согласно теореме 7.1.2 ряд расходится.

7.2.5 Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 5^n}$.

Решение. Воспользуемся признаком сравнения. Так как для геометрического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$ значение $q=\frac{1}{5}<1$, то он сходится. Для установления сходимости ряда используем неравенство $a_n=\frac{1}{n\cdot 5^n}\leq\frac{1}{5^n}=b_n$. Согласно признаку сравнения (теорема 7.1.4) исходный ряд сходится.

7.2.6 Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2-1}{3n^3+2n^2-4}$.

Решение. Воспользуемся предельным признаком сравнения, сравнив исходный ряд с расходящимся гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2n^2-1}{3n^3+2n^2-4}}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-n}{3n^3+2n^2-4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\dfrac{1}{n^2}}{3+2\dfrac{1}{n}-\dfrac{4}{n^3}}=\frac{2}{3}\quad\begin{pmatrix}\neq 0;\\ \neq\infty\end{pmatrix}.$$

На основании предельного признака сравнения (теорема 7.1.5) ряды сходятся и расходятся одновременно, следовательно, исходный ряд расходится.

7.2.7 Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2-n+5}{n^6+3n^4-2}$.

Решение. Воспользуемся предельным признаком сравнения, сравнив исходный ряд с обобщённо гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ $(p=4>1)$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{4n^2-n+5}{n^6+3n^4-2}}{\dfrac{1}{n^4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^6-n^5+5n^4}{n^6+3n^4-2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\dfrac{1}{n}+\dfrac{5}{n^2}}{1+\dfrac{3}{n^2}-\dfrac{2}{n^6}}=4\quad\begin{pmatrix}\neq 0;\\ \neq\infty\end{pmatrix}.$$

На основании предельного признака сравнения (теорема 7.1.5) ряды сходятся и расходятся одновременно, следовательно, исходный ряд сходится.

7.2.8 Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n}{3^n(2n+1)}$.

Решение. Воспользуемся признаком Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{5^{n+1}}{3^{n+1}(2n+3)}}{\dfrac{5^n}{3^n(2n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}\cdot 3^n\cdot(2n+1)}{5^n\cdot 3^{n+1}\cdot(2n+3)}=\frac{5}{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+3}=\frac{5}{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{n}}{2+\dfrac{3}{n}}=\frac{5}{3}>1.$$

На основании признака Даламбера (теорема 7.1.6) ряд расходится.

7.2.9 Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n+2}{n!}$.

Решение. Воспользуемся признаком Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3n+5}{(n+1)!}}{\dfrac{3n+2}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot(3n+5)}{(n+1)!\cdot(3n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+5}{3n^2+5n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}}{3+\dfrac{5}{n}+\dfrac{2}{n^2}}=0<1.$$

На основании признака Даламбера (теорема 7.1.6) ряд сходится.

7.2.10 Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arccos^n\dfrac{\sqrt{3}\,n+5}{2n+12}$.

Решение. Воспользуемся радикальным признаком Коши (теорема 7.1.7).

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\arccos^n\frac{\sqrt{3}\,n+5}{2n+12}}=\lim_{n\to\infty}\arccos\frac{\sqrt{3}\,n+5}{2n+12}=$$

$$=\left(\arccos\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\arccos\frac{\sqrt{3}+5/n}{2+12/n}=\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}<1.$$

На основании радикального признака Коши ряд сходится.

7.2.11 Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}\left(\dfrac{3n+5}{3n+1}\right)^{3n^2/4}$.

Решение. Воспользуемся радикальным признаком Коши (теорема 7.1.7).

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\cdot\left(\frac{3n+5}{3n+1}\right)^{3n^2/4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3n+5}{3n+1}\right)^{3n/4}=\left(1^\infty\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3n+5}{3n+1}-1\right)^{3n/4}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3n+5-3n-1}{3n+1}\right)^{3n/4}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{3n+1}\right)^{3n/4}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{(3n+1)/4}\right)^{\frac{3n+1}{4}}\right)^{\frac{4}{3n+1}\cdot\frac{3n}{4}}=\frac{1}{2}\cdot e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{3n+1}}=\frac{1}{2}\cdot e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{3+1/n}}=\frac{1}{2}\cdot e>1.$$

На основании радикального признака Коши ряд расходится.

7.2.12 Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$.

Решение. Для доказательства воспользуемся необходимым признаком сходимости ряда (теорема 7.1.1). Рассмотрим числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$, у которого n-й член равен $a_n=\frac{2^n}{n!}$. Исследуем числовой ряд на сходимость, воспользовавшись признаком Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot 2^{n+1}}{(n+1)!\cdot 2^n}=2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=2\cdot 0=0<1.$$

По признаку Даламбера (теорема 7.1.6) ряд сходится. На основании необходимого признака сходимости ряда: если ряд сходится, то предел n-го члена равен нулю, то есть $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$.

7.3 Задания для решения на практическом занятии

7.3.1 Написать первые шесть членов ряда по заданному общему члену:

7.3.1.1 $a_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{5}{6}\right)^n$. **7.3.1.2** $a_n=\frac{2^n}{n!}$. **7.3.1.3** $a_n=\sin\frac{\pi(n-1)}{4}$.

7.3.2 Найти общий член ряда, считая, что последующие члены подчиняются тому же закону, по которому образованы первые члены ряда.

7.3.2.1 $\frac{1}{2}+\frac{3}{4\cdot 5}+\frac{5}{6\cdot 25}+\frac{7}{8\cdot 125}+\frac{9}{10\cdot 625}+\ldots$

7.3.2.2 $\frac{3}{1\cdot 4}+\frac{5}{4\cdot 9}+\frac{7}{9\cdot 16}+\frac{9}{16\cdot 25}+\frac{11}{25\cdot 36}+\ldots$

7.3.2.3 $2+\frac{3}{2}+\frac{4}{6}+\frac{5}{24}+\frac{6}{120}+\frac{7}{720}+\frac{8}{5040}+\ldots$

7.3.3 Найти сумму ряда, считая, что последующие его члены образованы по усматриваемому правилу:

7.3.3.1 $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\ldots$

7.3.3.2 $\frac{1}{2\cdot 5\cdot 8}+\frac{1}{5\cdot 8\cdot 11}+\frac{1}{8\cdot 11\cdot 14}+\frac{1}{11\cdot 14\cdot 17}+\frac{1}{14\cdot 17\cdot 20}+\ldots$

7.3.3.3 $\frac{3+4-6}{12}+\frac{9+16-36}{144}+\frac{27+64-216}{1728}+\frac{81+256-1296}{20736}+\ldots$

7.3.4 Используя достаточный признак расходимости числового ряда, доказать, что каждый из следующих рядов является расходящимся:

7.3.4.1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+5n-3}{2n^2-3n+4}$. **7.3.4.2** $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\sin\frac{1}{5n}$. **7.3.4.3** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\left(1-1/n\right)^n}$.

7.3.5 Используя достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами, исследовать на сходимость указанные ряды:

7.3.5.1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\cdot 3^n}$. **7.3.5.2** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{1+4^{2n}}$. **7.3.5.3** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+5)}$.

7.3.5.4 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^3+2n}{3n^4-7}$. **7.3.5.5** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sqrt{n}+7}{5\sqrt[6]{n^{13}}+3}$. **7.3.5.6** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[6]{n^5}}{\sqrt{n}-\sqrt[3]{n}}$.

7.3.5.7 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(2n+3)}{4^n\left(7n+8\right)}$. **7.3.5.8** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{n^n}$. **7.3.5.9** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{n!}$.

7.3.5.10 $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin^n\frac{2n+1}{4n+1}$. **7.3.5.11** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+7}{n+4}\right)^{5n^2+n}$. **7.3.5.12** $\sum_{n=1}^{\infty} n^n\sin^n\frac{1}{3n}$.

7.3.6 Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{2n^3+7n^2+2n+6}{2n^3+4n^2-5n+1}\right)^n=0$.

7.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

7.4.1 Доказать сходимость числового ряда и найти его сумму.

7.4.1.1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+3)}$. **7.4.1.2** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n-4^n}{12^n}$. **7.4.1.3** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\cdot(n+5)}$.

7.4.1.4 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+2)\cdot(2n+4)}$. **7.4.1.5** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-4^n+5^n}{60^n}$. **7.4.1.6** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot(n+3)}$.

7.4.1.7 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+2)\cdot(3n+5)}$. **7.4.1.8** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+5^n-6^n}{60^n}$. **7.4.1.9** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\cdot(n+5)}$.

7.4.1.10 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+5)\cdot(2n+7)}$. **7.4.1.11** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+6^n+7^n}{210^n}$. **7.4.1.12** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\cdot(n+6)}$.

7.4.1.13 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)\cdot(3n+4)}$. **7.4.1.14** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n-7^n-8^n}{168^n}$. **7.4.1.15** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+4)\cdot(n+7)}$.

7.4.1.16 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+7)\cdot(2n+9)}$. **7.4.1.17** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+5^n-4^n}{20^n}$. **7.4.1.18** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+5)\cdot(n+8)}$.

7.4.1.19 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)\cdot(3n+2)}$. **7.4.1.20** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n+4^n}{6^n}$. **7.4.1.21** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+6)\cdot(n+9)}$.

7.4.1.22 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-1)\cdot(4n+3)}$. **7.4.1.23** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+3^n-2^n}{30^n}$. **7.4.1.24** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot(n+3)}$.

7.4.1.25 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-2)\cdot(5n+3)}$. **7.4.1.26** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-2^n-8^n}{12^n}$. **7.4.1.27** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\cdot(n+4)}$.

7.4.1.28 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(6n-1)\cdot(6n+5)}$. **7.4.1.29** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n+4^n-2^n}{24^n}$. **7.4.1.30** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\cdot(n+5)}$.

7.4.2 Используя достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами, исследовать на сходимость указанные ряды.

7.4.2.1 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+5}{2n^4-n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{5^n(3n+2)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}\left(\frac{3n^2+3}{3n^2-1}\right)^{2n^3-5n}$.

7.4.2.2 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{7^n n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin^n\frac{\sqrt{3}\,n^4+2n+2}{2n^4-n^3+7}$.

7.4.2.3 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+n}{5n^4-2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{6^n(4n+1)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2}\right)^n\sin^n\frac{5}{n}$.

7.4.2.4 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n5^n}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{2^n(n+1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3}\right)^{2n}\left(1-\cos\frac{2}{5n}\right)^n$.

7.4.2.5 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{4\sqrt[3]{n^4}-n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{6^{2n-1}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{2n+5}{2n-3}\right)^{3n^2+2n}$.

7.4.2.6 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+1)4^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{7^n(6n+5)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n^3-5n^2+2n+1}{7n^3+4n^2+3n-2}\right)^{n+2}$.

7.4.2.7 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^5+2}{2n^8-n^6}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n(4n-3)}{3^n(2n-1)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}^n\frac{\sqrt{3}\,n^2-3n}{n^2+2n+1}$.

7.4.2.8 а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\sin\frac{1}{n+1}$; в) $\log_2^n\left(\frac{16n^2+3n-1}{4n^2+7n+2}\right)$.

7.4.2.9 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)6^n}{5^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-2}{5^{5n+2}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arcctg}^n\frac{\sqrt{3}\,n^3-5n}{n^3-3n+2}$.

7.4.2.10 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\sqrt[7]{n^6}+4}{3n^2-2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n(n^2+1)}{9^n(3n^2+1)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{4n^3+7}{4n^3-5}\right)^{3n^3-3n^2}$.

7.4.2.11 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4+4}{3n^5-2n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}3^n\sin\frac{1}{n+2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\arccos^n\frac{3n^4+2n+5}{6n^4-6n^3+12}$.

7.4.2.12 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+1)4^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)^{n+2}}{4^n(n+2)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin^n\frac{n^3+3n^2+2}{2n^3-n^2+11}$.

7.4.2.13 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^3+n^2}{6n^5-3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n}{9^n(2n+3)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3}\right)^n\sin^n\frac{6}{n+1}$.

7.4.2.14 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)5^n}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)^{n+3}}{5^n(n+3)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{4}\right)^{2n}\left(1-\cos\frac{6}{n+1}\right)^n$.

7.4.2.15 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{3\sqrt[3]{n^7}+n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^{3n}(7n+2)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{5n+1}{5n+3}\right)^{-2n^2+3n}$.

7.4.2.16 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{(n+2)5^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot2n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^3+2n^2-2n-1}{2n^3+5n^2+6n-3}\right)^{2n+3}$.

7.4.2.17 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^6+3}{3n^9-n^7}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n}\operatorname{tg}\frac{1}{n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}^n\frac{n^2+2n+5}{\sqrt{3}n^2+2n+1}$.

7.4.2.18 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n(2n-1)}{3^n(3n+2)}$; в) $\log_3^n\left(\frac{\sqrt{3}n^2+n-5}{n^2+7n+2}\right)$.

7.4.2.19 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+4)7^n}{6^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!}{7^n(3n-2)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arcctg}^n\frac{n^4+2n^2+5}{\sqrt{3}n^4-7n+1}$.

7.4.2.20 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5\sqrt[8]{n^7}+5}{4n^2-2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n(n^2+2)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7^n}\left(\frac{6n^3-2}{6n^3+2}\right)^{4n^4+3n}$.

7.4.2.21 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5+6}{4n^6-n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{2^n}\operatorname{tg}\frac{1}{2n+1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\arccos^n\frac{\sqrt{3}n^3+2n^2}{2n^3-4n^2+13}$.

7.4.2.22 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{(n+2)5^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+4)^{n+4}}{8^n(n+4)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin^n\frac{n^4+n^3+n}{n^4-n^2+8}$.

7.4.2.23 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^4-n}{3n^8+2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(n^2+2)}{4^n(n^2+8)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{5}\right)^n\sin^n\frac{8}{n+2}$.

7.4.2.24 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+5)8^n}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot2\cdot\ldots\cdot n}{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{8}\right)^{2n}\left(1-\cos\frac{4}{n+3}\right)^n$.

7.4.2.25 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{3\sqrt[4]{n^5}+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7^n}\sin\frac{1}{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6^n}\left(\frac{7n-6}{7n+2}\right)^{5n^2-4n}$.

7.4.2.26 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{(n+5)9^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 7\cdot\ldots\cdot(5n-3)}{1\cdot 5\cdot\ldots\cdot(4n-3)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n^3+n^2-9n-10}{6n^3+5n^2+4n+3}\right)^{2n+5}$.

7.4.2.27 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7n^2+5}{5n^5-n^4}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n^3+1)}{5^n(n^3+6)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}^n\frac{n^2+2n+3}{n^2-2n-3}$.

7.4.2.28 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+2)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}4^n\operatorname{tg}\frac{1}{n^2}$; в) $\log_4^n\left(\frac{64n^2+n+5}{2n^2+3n-2}\right)$.

7.4.2.29 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+4)8^n}{7^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 7\cdot\ldots\cdot(4n-1)}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arcctg}^n\frac{n^5+2n^4+5}{n^5-7n^3+2}$.

7.4.2.30 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8\sqrt[8]{n^7}+8}{4n^2-3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n^2+1)}{n^2+3n+1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\arccos^n\frac{\sqrt{2}\,n^3-n^2+n}{2n^3+n^2+12}$.

8 ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ И ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИЕСЯ РЯДЫ

Содержание: интегральный признак Коши рядов с положительными членами, знакопеременные ряды, абсолютная и условная сходимость, знакочередующиеся ряды, признак Лейбница и следствие из него.

8.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Рассмотрим ещё один важный достаточный признак сходимости рядов с положительными членами.

Теорема 8.1.1 (интегральный признак Коши). Если функция $f(x)$ непрерывная, положительная и монотонно убывающая на интервале $[1;+\infty)$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, где $a_n=f(n)$ сходится или расходится в зависимости от того, является ли несобственный интеграл $\int_1^{\infty}f(x)\,dx$ сходящимся или расходящимся.

Признак остаётся в силе, если соответствующие условия для функции начинают выполняться не со значения равного 1, а с некоторого значения $x>1$.

Определение 8.1.1 Числовой ряд называется *знакопеременным*, если он содержит положительные и отрицательные члены.

Пусть задан знакопеременный ряд $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ (1), где $a_i\ (i=1,2,3,\ldots,n,\ldots)$ могут принимать как отрицательные, так и положительные значения. Рассмотрим ряд (2), составленный из абсолютных величин знакопеременного ряда, то есть ряд вида $|a_1|+|a_2|+...+|a_n|+...$. Возможны три случая:

1) ряд (1) сходится, а ряд (2) расходится;
2) ряд (1) сходится и ряд (2) сходится;
3) ряд (1) расходится и ряд (2) расходится.

Теорема 8.1.2 Если ряд, составленный из абсолютных величин знакопеременного ряда, сходится, то сходится и сам знакопеременный ряд.

Определение 8.1.2 Если ряд, составленный из абсолютных величин знакопеременного ряда, сходится, то знакопеременный ряд называется *абсолютно сходящимся*. Если ряд, составленный из абсолютных величин знакопеременного ряда, расходится, а знакопеременный ряд сходится, то знакопеременный ряд называется *условно сходящимся*.

Частным случаем знакопеременного ряда является знакочередующийся ряд.

Определение 8.1.3 Знакопеременный ряд называется *знакочередующимся*, если произведение двух его соседних членов величина отрицательная.

Знакочередующийся ряд можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + (-1)^{n-1}a_n + ...,$$

где все $a_i\left(i=\overline{1;\infty}\right)$ либо положительные, либо отрицательные числа. Для определённости в дальнейшем будем считать, что все члены $a_i\left(i=1,2,3,...,n,...\right)$ являются положительными числами. Все определения и теоремы для знакопеременного ряда справедливы и для знакочередующегося ряда.

Теорема 8.1.3 (признак Лейбница). Если члены знакочередующегося ряда по абсолютной величине монотонно убывают и предел n-го члена равен нулю, то знакочередующийся ряд сходится, причём его сумма не превосходит первого члена по абсолютной величине.

Таким образом, для доказательства сходимости знакочередующегося ряда необходимо проверить выполнение двух условий:

1) $a_1 > a_2 > ... > a_n > a_{n+1} > ...$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

При этом, согласно теореме Лейбница, выполняется неравенство $S \le |a_1|$, где S – сумма знакочередующегося сходящегося ряда.

Следствие из теоремы Лейбница: остаток ряда по абсолютной величине не превосходит модуля первого из отброшенных членов.

Рассмотрим знакочередующийся ряд $a_1 - a_2 + ... + (-1)^{n-1}a_n + (-1)^n a_{n+1} + ...$. Выражение вида $r_n = (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1}a_{n+2} + ...$ называется *остатком ряда*. Тогда, согласно следствию из теоремы Лейбница, будет выполняться неравенство $|r_n| \le a_{n+1}$.

8.2 Примеры решения типовых задач

8.2.1 С помощью интегрального признака Коши доказать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$.

Решение. Общий член ряда определяется формулой $a_n = f(n) = \frac{1}{1+n^2}$. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Эта функция удовлетворяет условиям интегрального признака Коши (теорема 8.1.2): она принимает положительные значения и монотонно убывает на промежутке $[1;+\infty)$. Вычислим несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_1^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Так как несобственный интеграл сходится, то сходится исходный ряд.

8.2.2 С помощью интегрального признака Коши исследовать, сходится или расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n^2}$.

Решение. Функция $f(x) = \frac{x+3}{x^2}$ удовлетворяет условиям интегрального признака Коши (теорема 8.1.2). Поскольку

$$\int_1^{\infty}\frac{x+3}{x^2}dx = \int_1^{\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)dx = \left(\ln|x| - \frac{3}{x}\right)\Bigg|_1^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(\ln|x| - \frac{3}{x}\right) - 0 + 3 = \infty,$$

то несобственный интеграл расходится, то есть будет расходиться и заданный ряд.

8.2.3 Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^2 n}$.

Решение. Общий член ряда определяется формулой $a_n = f(n) = \frac{1}{n\ln^2 n}$, где $n \geq 2$. Обратим внимание на то, что суммирование начинается со значения $n = 2$ (если $n = 1$, то соответствующий член не определён, так как в знаменателе содержится множитель $\ln 1 = 0$). Из формулы для общего члена ряда находим функцию $f(x) = \frac{1}{x\cdot\ln^2 x}$, которая удовлетворяет условиям интегрального признака Коши на промежутке $[2;+\infty)$. Вычислим интеграл

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\cdot\ln^2 x} = \int_2^{\infty}\frac{d\ln x}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x}\Bigg|_2^{\infty} = -\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{\ln 2} = 0 + \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}.$$

Несобственный интеграл сходится, а, следовательно, сходится и ряд.

8.2.4 Исследовать на сходимость знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}$.

Решение. Составляем ряд из абсолютных величин членов данного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n|}{n^2}$. Так как $|\cos n|\le 1$, то каждый член последнего ряда не превышает соответствующего члена, сходящегося обобщённо гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Согласно признаку сравнения (теорема 7.1.4), ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n|}{n^2}$ сходится. Поэтому сходится и данный ряд, причём абсолютно (теорема 8.1.2).

8.2.5 Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$.

Решение. Составляем ряд из абсолютных величин членов данного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$. Полученный геометрический ряд сходится (пример 7.1.3 и $q=\frac{1}{2}<1$). Следовательно, сходится и исходный ряд, причём абсолютно (теорема 8.1.2).

8.2.6 Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+2}{3n+5}$.

Решение. Составляем ряд из абсолютных величин членов данного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{3n+5}$. Так как $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{3n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2/n}{3+5/n}=\frac{1}{3}\ne 0$, то, согласно необходимому признаку сходимости (теорема 7.1.1), ряд расходится. Рассмотрим исходный ряд. Предел его n-го члена равен $1/3$, если значение числа n является нечётным. Если число n – чётное, то предел его n-го члена равен $(-1/3)$. Следовательно, предела n-го члена не существует ввиду свойства единственности предела числовой последовательности. На основании необходимого признака сходимости числовых рядов (теорема 7.1.1) заданный числовой ряд расходится.

8.2.7 Исследовать на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n\cdot 2^n}$.

Решение. Составляем ряд из абсолютных величин членов данного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$. Воспользуемся признаком Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}}{\frac{1}{n\cdot 2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot 2^n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}<1.$$

Следовательно, по теореме Даламбера, ряд, составленный из абсолютных величин, является сходящимся. Согласно теореме 8.1.2, исходный ряд сходится абсолютно.

8.2.8 Исследовать на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

Решение. Поскольку ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, то есть ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ расходится, то о сходимости исходного ряда пока ничего нельзя сказать (пример 7.1.2). Применим к данному ряду признак Лейбница. Условия признака Лейбница в данном случае выполнены:

$$1>\frac{1}{\sqrt[3]{2}}>\frac{1}{\sqrt[3]{3}}>\frac{1}{\sqrt[3]{4}}>\ldots,\ \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=0.$$

Следовательно, этот ряд сходится. Так как ряд из абсолютных величин расходится, то исходный ряд сходится условно.

8.2.9 Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n\cdot 2^n}$ с точностью $\varepsilon=0{,}001$.

Решение. Данный знакочередующийся ряд является абсолютно сходящимся (пример 8.2.7). На основании следствия из признака Лейбница величина отброшенного при вычислении остатка ряда не превосходит первого отброшенного члена. Необходимое число членов n находим путём подбора из неравенства $\frac{1}{n\cdot 2^n}\le 0{,}001$. При значении $n=8$ последнее неравенство справедливо. Следовательно, если отбросить в исходном ряде все члены, начиная с восьмого, то требуемая точность будет достигнута. Таким образом,

$$S\approx S_7=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{24}-\frac{1}{64}+\frac{1}{160}-\frac{1}{384}+\frac{1}{896}=0{,}406.$$

8.3 Задания для решения на практическом занятии

8.3.1 С помощью интегрального признака Коши исследовать на сходимость ряд.

8.3.1.1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+2)\ln^3(3n+2)}$. **8.3.1.2** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$. **8.3.1.3** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+9}$.

8.3.2 Исследовать на сходимость знакопеременные ряды.

8.3.2.1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{1+(-2)^{2n}}$. **8.3.2.2** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n^3}$. **8.3.2.3** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{n^3+4}$.

8.3.2.4 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+7)\cdot\ln(2n+7)}$. **8.3.2.5** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$. **8.3.2.6** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 5^n}$.

8.3.2.7 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}$. **8.3.2.8** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+3}}$. **8.3.2.9** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot \ln^5 n}$.

8.3.3 Вычислить сумму указанного ряда с точностью $\varepsilon = 0,001$.

8.3.3.1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$. **8.3.3.2** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 3^n}$. **8.3.3.3** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n!}$.

8.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

8.4.1 Исследовать на сходимость указанные ряды. В пункте а) необходимо исследовать ряд $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$, используя интегральный признак Коши, а в пункте б) указать характер сходимости знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (условная или абсолютная сходимость), если ряд сходится.

8.4.1.1 а) $a_n = \frac{n}{n^2+2}$; б) $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{5n}$. **8.4.1.2** а) $a_n = \frac{1}{n\cdot \ln^2 n}$; б) $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$.

8.4.1.3 а) $a_n = \frac{1}{n\cdot \ln\sqrt{n}}$; б) $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$. **8.4.1.4** а) $a_n = \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$; б) $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$.

8.4.1.5 а) $a_n = \frac{n}{e^{-n^2}}$; б) $u_n = \frac{(-1)^{n-1}n}{5n+4}$. **8.4.1.6** а) $a_n = \frac{1}{n^2}\sin\frac{1}{n}$; б) $u_n = \frac{(-1)^{n-1}n}{7^n}$.

8.4.1.7 а) $a_n = \frac{1}{n^2}\cos\frac{1}{n}$; б) $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2+9}$. **8.4.1.8** а) $a_n = \frac{1}{n^2}\operatorname{tg}\frac{1}{n}$; б) $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{n^4}}$.

8.4.1.9 а) $a_n = \frac{1}{n^2}\operatorname{ctg}\frac{1}{n}$; б) $u_n = \frac{(-1)^{n-1}n^2}{2n^2+1}$. **8.4.1.10** а) $a_n = \frac{1}{n^2+9}$; б) $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^n}$.

8.4.1.11 а) $a_n = \frac{n+5}{n^2}$; б) $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[5]{n}}$. **8.4.1.12** а) $a_n = \frac{1}{(n+1)^5}$; б) $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{4n}$.

8.4.1.13 а) $a_n = \frac{1}{n\cdot \ln\sqrt[3]{n}}$; б) $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+2)}$. **8.4.1.14** а) $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}}$ б) $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!}$.

8.4.1.15 а) $a_n = \frac{3n}{n^2+5}$; б) $u_n = \frac{(-1)^{n-1}n}{6^n}$. **8.4.1.16** а) $a_n = \frac{e^{-\sqrt[3]{n}}}{\sqrt{n^2}}$; б) $u_n = \frac{(-1)^{n-1}n}{2n+3}$.

8.4.1.17 а) $a_n = \frac{1}{n^3}\sin\frac{1}{n^2}$; б) $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[5]{n^6}}$. **8.4.1.18** а) $a_n = \frac{1}{n^3}\cos\frac{1}{n^2}$; б) $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{3n^3+8}$.

8.4.1.19 а) $a_n = \frac{1}{n^3}\operatorname{tg}\frac{1}{n^2}$; б) $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(3n-2)^n}$. **8.4.1.20** а) $a_n = \frac{1}{n^3}\operatorname{ctg}\frac{1}{n^2}$; б) $u_n = \frac{(-1)^{n-1}n^3}{4n^3+8}$.

8.4.1.21 а) $a_n = \dfrac{1}{(n+3)^7}$; б) $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{10n}$. **8.4.1.22** а) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2n+5}}$ б) $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[9]{n^2}}$.

8.4.1.23 а) $a_n = \dfrac{n^4}{n^5+32}$; б) $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n+2)!}$. **8.4.1.24** а) $a_n = \dfrac{n^2}{e^{-n^3}}$; б) $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+3)}$.

8.4.1.25 а) $a_n = \dfrac{1}{n^9}\operatorname{tg}\dfrac{1}{n^8}$; б) $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}n}{7n+8}$. **8.4.1.26** а) $a_n = \dfrac{1}{n^5}\sin\dfrac{1}{n^4}$; б) $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}n}{9^n}$.

8.4.1.27 а) $a_n = \dfrac{1}{n^4}\operatorname{ctg}\dfrac{1}{n^3}$; б) $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{5n^4+3}$. **8.4.1.28** а) $a_n = \dfrac{1}{n\cdot\ln\sqrt[6]{n}}$ б) $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[9]{n^{10}}}$.

8.4.1.29 а) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[5]{5n+9}}$; б) $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}n^5}{5n^5+7}$. **8.4.1.30** а) $a_n = \dfrac{1}{n^7}\cos\dfrac{1}{n^6}$; б) $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(8n-3)^n}$.

9 ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ И СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Содержание: функциональные ряды, область сходимости функционального ряда, равномерно сходящиеся ряды, степенные ряды, теорема Абеля и следствие из неё, радиус и область сходимости степенного ряда, ряд Тейлора и Маклорена, применение степенных рядов к приближённым вычислениям, применение степенных рядов к нахождению и вычислению интегралов, применение степенных рядов к решению дифференциальных уравнений.

9.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Функциональный ряд представляет собой бесконечную сумму функций, которые располагаются в определённой последовательности.

Пусть на некотором множестве I задано бесконечное множество функций $\{u_n(x)\}$, где $x \in I$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Определение 9.1.1 *Функциональным рядом* называется ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$, где $u_n(x)$ – функция от переменной x.

Определение 9.1.2 Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется *сходящимся в точке* x_0, если в этой точке сходится числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$.

Определение 9.1.3 Функциональный ряд называется *сходящимся на промежутке* I, если он сходится в каждой точке этого интервала.

Определение 9.1.4 Множество всех точек сходимости функционального ряда называется *областью сходимости* этого ряда.

Каждому значению из области сходимости I соответствует определённое значение величины $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{k}u_n(x)$. Эту величину, являющуюся функцией от переменной x, называют *суммой функционального ряда* и обозначают $S(x)$.

Для определения области сходимости функционального ряда можно использовать предельный признак Даламбера $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\left|l(x)\right|$ или предельный радикальный признак Коши $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|u_n(x)\right|}=\left|l(x)\right|$.

Решение неравенства $\left|l(x)\right|<1$ представляет собой интервал сходимости функционального ряда. Для определения области сходимости необходимо исследовать ряд на концах интервала сходимости, то есть в точках решения уравнения $\left|l(x)\right|=1$.

Представим сумму ряда $S(x)$ в виде $S(x)=S_n(x)+R_n(x)$, где $S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)$, $R_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+...$ – остаток функционального ряда.

Определение 9.1.5 Сходящийся функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ называется *равномерно сходящимся* в некоторой области I, если каждого сколь угодно малого положительного числа ε найдётся такое натуральное число N, что при всех $n\geq N$ выполняется неравенство $\left|R_n(x)\right|<\varepsilon$ для любого $x\in I$.

Сформулируем достаточный признак сходимости функционального ряда.

Теорема 9.1.1 (признак Вейерштрасса). Если члены функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ по абсолютной величине для всех $x\in I$ не превосходят соответствующих членов сходящегося числового ряда с положительными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, то есть $\left|u_n(x)\right|\leq a_n$ для любого натурального n, то данный функциональный ряд равномерно сходится на промежутке I.

Сформулируем три теоремы, относящиеся к непрерывности, дифференцированию и интегрированию функциональных рядов.

Теорема 9.1.2 Если члены функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ непрерывны на интервале I и на этом интервале ряд является равномерно сходящимся, то его сумма на этом интервале является непрерывной функцией.

Теорема 9.1.3 (о почленном дифференцировании). Если функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на промежутке I и его сумма равна $S(x)$, а ряд, составленный из производных членов данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$, равномерно сходится на промежутке I, то производная суммы данного ряда равна сумме ряда, составленных из производных, то есть $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$.

Теорема 9.1.4 (о почленном интегрировании). Если функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на промежутке I сходится равномерно и имеет сумму $S(x)$, то на любом отрезке $[a;b] \subseteq I$ его можно интегрировать, причём сумма полученного ряда равна $\int_a^b S(x)\,dx$.

Рассмотрим степенные ряды, как один из важных видов функциональных рядов.

Определение 9.1.6 *Степенным рядом* называется функциональный ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \ldots + c_n(x-x_0)^n + \ldots \quad (1)$, где x_0 – произвольная точка, $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ – коэффициенты степенного ряда.

Если $x_0 = 0$, то полученный ряд принимает вид $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots \quad (2)$.

Каждый член указанных рядов представляет собой степенную функцию, поэтому ряды называются степенными. Область сходимости степенных рядов не являются пустым множеством. Ряд (1) всегда сходится в точке x_0, а ряд (2) в точке нуль, причём их суммы в этом случае равны c_0. Ряд (1) всегда можно свести к ряду (2), если выполнить замену $x - x_0 = t$.

Теорема 9.1.5 (Абеля). Если степенной ряд (2) сходится в точке x_1, то он сходится на промежутке решения неравенства $|x| < |x_1|$.

Следствие 9.1.1 Если степенной ряд (2) расходится в точке x_2, то он расходится на промежутке решения неравенства $|x| > |x_2|$.

Для определения области сходимости степенных рядов (1) и (2), на основании теоремы Абеля, определяем радиус сходимости $R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$ или $R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$. Тогда интервал сходимости ряда (2): $(-R;R)$. Для определения области сходимости ряда (2) необходимо исследовать ряд на концах интервала, то есть в точках $x=\pm R$. Интервал сходимости ряда (1) имеет вид $\left(x_0-R;\, x_0+R\right)$. Для определения области сходимости ряда (1) необходимо исследовать ряд на концах интервала, то есть в точках $x=x_0\pm R$.

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, которая является бесконечно дифференцируемой на промежутке $\left(x_0-R; x_0+R\right)$. Эта функция на этом интервале может быть представлена в виде сходящегося к ней *бесконечного степенного ряда Тейлора*:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots,$$

если в этом интервале выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=0\,,$$

где $R_n(x)$ – остаточный член формулы Тейлора, а $c=x_0+\Theta(x-x_0)$ и $0<\Theta<1$.

При значении $x_0=0$ получаем так называемый *ряд Маклорена*:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots\ .$$

Если в некотором интервале, содержащем точку x_0, при любом значении n выполняется неравенство $\left|f^{(n)}(x)\right|<M$, где M – положительная постоянная величина, то $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ и функция $f(x)$ разложима в ряд Тейлора.

Рассмотрим разложение в ряд Тейлора некоторых основных функций.

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots,\quad -\infty<x<+\infty\,. \tag{9.1.1}$$

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots,\quad -\infty<x<+\infty\,. \tag{9.1.2}$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots,\quad -\infty<x<+\infty\,. \tag{9.1.3}$$

$$\operatorname{sh} x=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots,\quad -\infty<x<+\infty\,. \tag{9.1.4}$$

$$\operatorname{ch} x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots,\quad -\infty<x<+\infty. \tag{9.1.5}$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots,\quad -1<x\le 1. \tag{9.1.6}$$

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots,\quad -1\le x\le 1. \tag{9.1.7}$$

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\cdot\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\dots\right),\quad -1<x<1. \qquad (9.1.8)$$

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m\cdot(m-1)}{2!}x^2+\frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)}{3!}x^3+\dots, \qquad (9.1.9)$$

которое возможно при $m\ge 0$, если $-1\le x\le 1$; при $-1<m<0$, если $-1<x\le 1$; при $m\le -1$, если $-1<x<1$.

Степенные ряды находят *применение при приближённых вычислениях значений функции*. Для вычисления приближённого значения функции $f(x)$ в её разложении в степенной ряд сохраняются первые n членов. Для оценки погрешности найденного приближённого значения необходимо оценить сумму отброшенных членов. Если данный ряд знакопостоянный, то ряд, составленный из отброшенных членов, сравнивают с бесконечно убывающей геометрической прогрессией. В случае знакопеременного ряда, члены которого удовлетворяют признаку Лейбница, используется оценка $|R_n|<a_{n+1}$, где a_{n+1} – первый из отброшенных членов.

Для *вычисления интегралов* с помощью степенных рядов раскладывают подынтегральную функцию в степенной ряд, а затем ограничиваются в этом ряде конечным числом членов. Число членов выбирается из соображения обеспечения заданной точности. Также степенные ряды можно применять при *решении дифференциальных уравнений*.

9.2 Примеры решения типовых задач

9.2.1 Найти область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n 3^{nx}$.

Решение. Применим к ряду признак Коши, для чего найдём предел:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n 3^{nx}\right|}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)3^x=3^x.$$

Интервал сходимости функционального ряда определяется неравенством: $3^x<1$ или $x<0$. Для определения области сходимости необходимо исследовать ряд на конце интервала, то есть в точке $x=0$. В этой точке ряд имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Этот ряд расходится, так как для него не выполнен необходимый признак сходимости ряда: $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\ne 0$. Следовательно, областью сходимости ряда является интервал $(-\infty;0)$.

9.2.2 Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n\sqrt{n}}$.

Решение. Найдём радиус сходимости степенного ряда:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1/5^n\sqrt{n}}{1/5^{n+1}\sqrt{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}\sqrt{n+1}}{5^n\sqrt{n}}=5\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=5.$$

Следовательно, интервалом сходимости является интервал $(-5;5)$.

Для определения области сходимости исследуем ряд на концах интервала, то есть в точках $x=\pm5$. При значении $x=5$ получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{5^n\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, который является расходящимся обобщённо гармоническим рядом (пример 1.1.2, $\alpha=\frac{1}{2}<1$). При значении $x=-5$ имеем знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Ряд, составленный из абсолютных величин знакочередующегося ряда, расходится. Применим к данному ряду признак Лейбница. Условия признака Лейбница в данном случае выполнены: $1>\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{3}}>\frac{1}{\sqrt{4}}>\ldots$, $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$. Следовательно, этот ряд сходится. Так как ряд из абсолютных величин расходится, то знакочередующийся ряд сходится условно. Таким образом, областью сходимости степенного ряда является интервал $[-5;5)$.

9.2.3 Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{7^n n^2}$.

Решение. По определению 9.1.6 степенного ряда $x_0=-2$. Рассмотрим степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{7^n n^2}$ $(*)$ и найдём его область сходимости. Находим радиус сходимости степенного ряда $(*)$:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1/7^n n^2}{1/7^{n+1}(n+1)^2}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{7^{n+1}(n+1)^2}{7^n n^2}=7\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=7.$$

Следовательно, интервалом сходимости ряда $(*)$ является интервал $(-7;7)$. Для определения области сходимости исследуем ряд на концах интервала, то есть в точках $x=\pm7$. При значении $x=7$ получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{7^n n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, который является сходящимся обобщённо гармоническим рядом (пример 1.1.2, $\alpha=2>1$). При значении $x=-7$ имеем знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$. Ряд, составленный из абсолютных величин знакочередующегося ряда, сходится. Следовательно, этот знакочередующийся ряд сходится абсолютно (теорема

8.1.2 и определение 8.1.2). Таким образом, областью сходимости степенного ряда (*) является интервал $[-7;7]$. Следовательно, областью сходимости исходного ряда будет интервал $[-7-2;7-2]$ или $[-9;5]$.

9.2.4 Разложить функцию $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ в степенной ряд.

Решение. Находим разложение функции $\varphi(x)=\left(1+x^2\right)^{-1/2}$ в ряд, используя биномиальный ряд, определяемый формулой (3.1.9). Разложение функции имеет вид $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$. Полученный ряд сходится на отрезке $[-1;1]$. Интегрируя его на промежутке $[0;x]$, где $0<x<1$ (что можно сделать, так как ряд сходится равномерно), находим $\int\limits_0^x\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Поскольку $\int\limits_0^x\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$, то получаем искомое разложение в степенной ряд исходной функции:

$$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Областью сходимости ряда является промежуток: $[-1;1]$.

9.2.5 Вычислить $\ln 2$ с точностью $\varepsilon=0,000001$.

Решение. Воспользуемся формулой (9.1.8). Поскольку $\frac{1+x}{1-x}=2$ выполняется при значении $x=\frac{1}{3}$, то, подставив это число в ряд, получим $\ln 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\ldots\right)$. Для вычисления $\ln 2$ с заданной точностью необходимо найти такое число членов частичной суммы, при котором сумма остатка ряда $|R_n|<\varepsilon$.

$$R_n=2\left(\frac{1}{(2n+1)\cdot 3^{2n+1}}+\frac{1}{(2n+3)\cdot 3^{2n+3}}+\ldots\right)<\frac{2}{2n+1}\left(\frac{1}{3^{2n+1}}+\frac{1}{3^{2n+3}}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{2}{(2n+1)\cdot 3^{2n+1}}\cdot\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{81}+\ldots\right)=\frac{2}{(2n+1)\cdot 3^{2n+1}}\cdot\frac{1}{1-1/9}=\frac{1}{4\cdot(2n+1)\cdot 3^{2n-1}}.$$

В соответствии с условием задачи выберем n так, чтобы остаток был меньше 0,000001, то есть $\frac{1}{4\cdot(2n+1)\cdot 3^{2n-1}}<0,000001$. Последнее неравенство выполняется с номера $n=6$, так как при этом значении n справедливо неравенство $\dfrac{1}{4\cdot(2\cdot 6+1)\cdot 3^{2\cdot 6-1}}=\dfrac{1}{4\cdot 13\cdot 3^{11}}=\dfrac{1}{9211644}<0,000001$. Следовательно, в разложении ряда можно ограничиться шестью слагаемыми, чтобы получить значение $\ln 2$ с заданной точностью:

$$\ln 2\approx 2\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\frac{1}{7\cdot 3^7}+\frac{1}{9\cdot 3^9}+\frac{1}{11\cdot 3^{11}}\right)=0,6931471.$$

9.2.6 Вычислить $\sin 1$ с точностью $\varepsilon=0,00001$.

Решение. Воспользуемся формулой (9.1.2) при значении $x=1$: $\sin 1=1-\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{5!}-\dfrac{1}{7!}+\dfrac{1}{9!}-\dfrac{1}{11!}+\ldots$. Полученный ряд является знакочередующимся и удовлетворяет условиям признака Лейбница. Для определения числа членов в указанном ряде, для достижения заданной точности, воспользуемся следствием из теоремы Лейбница: погрешность при замене его суммой первых n членов не превысит первого отброшенного члена. Так как для пятого члена ряда выполняется требуемое неравенство $\dfrac{1}{9!}=\dfrac{1}{362880}\approx 0,000003<0,00001$, то достаточно взять сумму первых четырёх членов, чтобы получить искомое значение с заданной точностью. Следовательно,

$$\sin 1\approx 1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}=1-\frac{1}{6}+\frac{1}{120}-\frac{1}{5040}\approx 0,84147.$$

9.2.7 Вычислить интеграл $\int\limits_0^{1/2}\sqrt{1+x^3}\,dx$ с точностью $\varepsilon=0,001$.

Решение. Используя формулу (9.1.9), раскладываем подынтегральную функцию в степенной ряд $\sqrt{1+x^3}=1+\dfrac{x^3}{2}-\dfrac{x^6}{8}+\dfrac{x^9}{16}-\dfrac{5x^{12}}{128}+\ldots\ \left(|x|<1\right)$.

Интегрируя этот ряд на промежутке $\left[0;0,5\right]$, находим

$$\int\limits_0^{0,5}\sqrt{1+x^3}\,dx=\int\limits_0^{0,5}\left(1+\frac{x^3}{2}-\frac{x^6}{8}+\frac{x^9}{16}-\frac{5x^{12}}{128}+\ldots\right)dx=\left(x+\frac{x^4}{8}-\frac{x^7}{56}+\frac{x^{10}}{160}-\frac{5x^{13}}{1664}+\ldots\right)\Bigg|_0^{0,5}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2^4}-\frac{1}{56}\cdot\frac{1}{2^7}+\frac{1}{160}\cdot\frac{1}{2^{10}}-\frac{5}{1664}\cdot\frac{1}{2^{13}}+\ldots.$$

Поскольку $\frac{1}{56}\cdot\frac{1}{2^7}=\frac{1}{7168}\approx 0{,}00014<0{,}001$, то для вычисления заданного интеграла с указанной точностью достаточно взять два первых члена полученного ряда, то есть $\int\limits_0^{0{,}5}\sqrt{1+x^3}\,dx\approx\frac{1}{2}+\frac{1}{128}\approx 0{,}508$.

9.2.8 Найти первые четыре члена разложения в ряд решения уравнения $y'=x^2+y^2$, удовлетворяющего начальному условию $y(0)=0{,}5$.

Решение. Запишем искомое решение в виде ряда Маклорена:

$$y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

Найдём выражения для двух последующих производных, дифференцируя исходное уравнение: $y''=2x+2yy'$, $y'''=2+2y'^2+2yy''$. Вычислим значения этих производных при заданных начальных условиях: $y'(0)=0+0{,}5^2=0{,}25$, $y''(0)=2\cdot 0+2\cdot 0{,}5\cdot 0{,}25=0{,}25$, $y'''(0)=2+2\cdot 0{,}0625+2\cdot 0{,}5\cdot 0{,}25=2{,}375$. Следовательно, решение исходного уравнения имеет вид $y(x)=\frac{1}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x^2}{8}+\frac{19x^3}{48}+\ldots$.

9.3 Задания для решения на практическом занятии

9.3.1 Найти область сходимости функциональных рядов.

9.3.1.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^n$. **9.3.1.2** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n$. **9.3.1.3** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln^n x$.

9.3.2 Найти область сходимости степенных рядов.

9.3.2.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^3}$. **9.3.2.2** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n x^n}{7^n}$. **9.3.2.3** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

9.3.2.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{(x-4)^n}{2^n}$. **9.3.2.5** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^n\cdot(x-3)^n}{5\cdot\sqrt{n}}$. **9.3.2.6** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\cdot 4^n}$.

9.3.3 Разложить функцию $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ по степеням переменной x.

9.3.4 С точностью $\varepsilon=0{,}0001$ вычислить значения функций:

9.3.4.1 $\sqrt[5]{37}$. **9.3.4.2** $\cos 20^0$. **9.3.4.3** $\ln 3$.

9.3.5 С точностью $\varepsilon=0{,}0001$ вычислить интеграл $\int\limits_0^{0{,}25}\frac{\sin 2x}{x}dx$.

9.3.6 Найти первые пять членов разложения в ряд решения уравнения $y' = x^3 + y^2$, удовлетворяющего начальному условию $y(0) = 0{,}5$.

9.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

9.4.1 Найти область сходимости степенного ряда.

9.4.1.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^2}{2^n(2n+3)}$.

9.4.1.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^2}{5^n(3n^2+4)}$.

9.4.1.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n(x-4)^n}{6^n(2\sqrt[3]{n}+3)}$.

9.4.1.4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n(x-5)^n}{5^n(2n^7-6)}$.

9.4.1.5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n(x-6)^n}{9^n(\sqrt[4]{n^3}-7)}$.

9.4.1.6 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n(x-7)^n}{3^n(2n-1)!}$.

9.4.1.7 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n(x-8)^n}{11^n(4\sqrt[5]{n^2}+2)}$.

9.4.1.8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\cdot(x-9)^n}{8^n(3n^8-8)}$.

9.4.1.9 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(x-1)^n}{8^n(2\sqrt[3]{n^7}-4)}$.

9.4.1.10 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(x+1)^n}{3^n(3n^2-8)}$.

9.4.1.11 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n(x+2)^n}{5^n(\sqrt[5]{n^8}+5)}$.

9.4.1.12 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n(x+2)^n}{5^n(4n^2+5)}$.

9.4.1.13 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{4^n(n+1)!}$.

9.4.1.14 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n(x+4)^n}{7^n(8\sqrt{n}-1)}$.

9.4.1.15 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n(x+5)^n}{5^n(2n^3+4)}$.

9.4.1.16 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n(x+6)^n}{4^n(4\sqrt{n}-3)}$.

9.4.1.17 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\cdot(x+7)^n}{3^n(6n^2+4)}$.

9.4.1.18 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(x+8)^n}{5^n(3\sqrt[4]{n^3}-1)}$.

9.4.1.19 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n(x+12)^n}{11^n(7n^4-5)}$.

9.4.1.20 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(x+10)^n}{3^n\sqrt[3]{n^2}}$.

9.4.1.21 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n(x+11)^n}{5^n(4n^3+6)}$.

9.4.1.22 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n(x-11)^n}{3^n(7n^6-5)}$.

9.4.1.23 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n(x-12)^n}{9^n(n+2)!}$.

9.4.1.24 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(x-13)^n}{4^n(3\sqrt[7]{n^2}-8)}$.

9.4.1.25 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\cdot(x+13)^n}{4^n(2\sqrt[9]{n^8}-6)}$.

9.4.1.26 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(x+2)^n}{7^n(4n^5-9)}$.

9.4.1.27 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n(x+5)^n}{5^n(2\sqrt[5]{n^4}-1)}$.

9.4.1.28 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n(x-18)^n}{11^n(4n^3-3)}$.

9.4.1.29 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(x+19)^n}{4^n\sqrt[6]{x+19}}$.

9.4.1.30 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n(x-7)^n}{11^n(5\sqrt[9]{n^8}-7)}$.

9.4.2 Используя разложение в степенной ряд соответствующим образом подобранной функции, вычислить указанную величину с заданной степенью точности ε.

9.4.2.1 $\sqrt[5]{34}$, $\varepsilon = 0{,}001$.

9.4.2.2 $\operatorname{sh}1$, $\varepsilon = 0{,}001$.

9.4.2.3 $\ln 1{,}3$, $\varepsilon = 0{,}0001$.

9.4.2.4 $\sqrt[3]{e}$, $\varepsilon = 0{,}0001$.

9.4.2.5 $\operatorname{arctg} 0{,}2$, $\varepsilon = 0{,}0001$.

9.4.2.6 $\sqrt[5]{245}$, $\varepsilon = 0{,}001$.

9.4.2.7 $\sin 58^0, \quad \varepsilon = 0{,}001$.

9.4.2.8 $\lg 3, \quad \varepsilon = 0{,}001$.

9.4.2.9 $\sqrt{84}, \quad \varepsilon = 0{,}001$.

9.4.2.10 $\cos 18^0, \quad \varepsilon = 0{,}0001$.

9.4.2.11 $\ln 3, \quad \varepsilon = 0{,}0001$.

9.4.2.12 $\mathrm{arctg}\, 0{,}5, \quad \varepsilon = 0{,}0001$.

9.4.2.13 $\cos 28^0, \quad \varepsilon = 0{,}0001$.

9.4.2.14 $\sin 18^0, \quad \varepsilon = 0{,}0001$.

9.4.2.15 $\sqrt[3]{29}, \quad \varepsilon = 0{,}001$.

9.4.2.16 $\sin 91^0, \quad \varepsilon = 0{,}0001$.

9.4.2.17 $\sin 88^0, \quad \varepsilon = 0{,}0001$.

9.4.2.18 $\sqrt{98}, \quad \varepsilon = 0{,}001$.

9.4.2.19 $\cos 2^0, \quad \varepsilon = 0{,}0001$.

9.4.2.20 $\lg 9, \quad \varepsilon = 0{,}001$.

9.4.2.21 $\pi, \quad \varepsilon = 0{,}0001$.

9.4.2.22 $\cos 57^0, \quad \varepsilon = 0{,}0001$.

9.4.2.23 $\sqrt{e}, \quad \varepsilon = 0{,}0001$.

9.4.2.24 $\ln 6, \quad \varepsilon = 0{,}0001$.

9.4.2.25 $\lg 2, \quad \varepsilon = 0{,}001$.

9.4.2.26 $\sqrt[4]{15}, \quad \varepsilon = 0{,}001$.

9.4.2.27 $\mathrm{arctg}\, 2/3, \quad \varepsilon = 0{,}0001$.

9.4.2.28 $\sqrt[6]{67}, \quad \varepsilon = 0{,}001$.

9.4.2.29 $\mathrm{ch} 1, \quad \varepsilon = 0{,}001$.

9.4.2.30 $\ln 1{,}1, \quad \varepsilon = 0{,}0001$.

9.4.3 Вычислить определённый интеграл с точностью $\varepsilon = 0{,}001$, используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд.

9.4.3.1 $\int\limits_0^{0,1} e^{-5x^2} dx$.

9.4.3.2 $\int\limits_0^{0,2} \sin 4x^2 dx$.

9.4.3.3 $\int\limits_0^{0,3} \cos 9x^2 dx$.

9.4.3.4 $\int\limits_0^{0,4} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

9.4.3.5 $\int\limits_0^{0,5} \frac{\ln(1+x/4)}{x} dx$.

9.4.3.6 $\int\limits_0^{0,6} \frac{\mathrm{arctg}\, x^2}{x^2} dx$.

9.4.3.7 $\int\limits_0^{0,7} \frac{e^{-3x}-1}{x} dx$.

9.4.3.8 $\int\limits_0^{0,8} \frac{x-\sin x}{x} dx$.

9.4.3.9 $\int\limits_0^{0,9} \frac{1-\cos x}{x} dx$.

9.4.3.10 $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

9.4.3.11 $\int\limits_0^{0,1} \ln(1+x^2) dx$.

9.4.3.12 $\int\limits_0^{0,2} \frac{\mathrm{arctg}\, x - x}{x^2} dx$.

9.4.3.13 $\int\limits_0^{0,3} e^{-3x^2} dx$.

9.4.3.14 $\int\limits_0^{0,4} \sin 16x^2 dx$.

9.4.3.15 $\int\limits_0^{0,5} \cos 25x^2 dx$.

9.4.3.16 $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{16+x^4}}$.

9.4.3.17 $\int\limits_0^{0,6} \frac{\ln(1+x/3)}{x} dx$.

9.4.3.18 $\int\limits_0^{0,7} \frac{\mathrm{arctg}\, x}{x^2} dx$.

9.4.3.19 $\int\limits_0^{0,8} \frac{2-2e^{-5x}}{x} dx$.

9.4.3.20 $\int\limits_0^{0,9} \frac{\sin 2x}{x} dx$.

9.4.3.21 $\int\limits_0^{1} \frac{3-3\cos x}{x} dx$.

9.4.3.22 $\int\limits_0^{0,9} e^{-2x^2} dx$.

9.4.3.23 $\int\limits_0^{0,8} \sin 36x^2 dx$.

9.4.3.24 $\int\limits_0^{0,7} \cos 49x^2 dx$.

9.4.3.25 $\int\limits_0^{0,6} \sqrt[3]{8+x^3} dx$.

9.4.3.26 $\int\limits_0^{0,16} \ln(1+\sqrt{x}) dx$.

9.4.3.27 $\int\limits_0^{0,3} \sqrt[3]{27-x^3} dx$.

9.4.3.28 $\int\limits_0^{0,7} \frac{3e^{-5x}-3}{x}dx$. **9.4.3.29** $\int\limits_0^{0,9} \frac{\sin 3\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$. **9.4.3.30** $\int\limits_0^{1} \frac{e^{-x^2}-1}{x^2}dx$.

10 РЯДЫ ФУРЬЕ

Содержание: периодические функции и их свойства, числовой тригонометрический ряд, ортогональные системы тригонометрических функций, тригонометрический ряд Фурье, разложение четных и нечетных функций в ряд Фурье, сходимость тригонометрического ряда, разложение в ряд Фурье функции, заданной на промежутке $(0;l)$.

10.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Ряд Фурье представляет собой разложение функций на сумму простых функций синусов и косинусов.

Рассмотрим периодическую функцию $y = f(x)$ с периодом $T = 2\pi$, заданную на промежутке $\left[-\pi;\pi\right]$.

Рядом Фурье функции $f(x)$ называется *тригонометрический ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right), \qquad (10.1.1)$$

где коэффициенты Фурье a_0, a_n, b_n $(n = 1, 2, 3, ...)$ определяются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx. \qquad (10.1.2)$$

Если ряд (10.1.1) является рядом Фурье функции $f(x)$, то записывают

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right). \qquad (10.1.3)$$

Не для всякой функции можно построить её ряд Фурье (нельзя написать ряд Фурье функции, для которой интегралы в формулах (10.1.2) не существуют). Не всякая функция является суммой её ряда Фурье, даже если он сходится.

В формуле (10.1.3) вместо знака соответствия можно поставить знак равенства, если функция будет удовлетворять условиям теоремы.

Теорема 10.1.1 Если функция $f(x)$ с периодом $T=2\pi$ кусочно-дифференцируемая в промежутке $[-\pi;\pi]$, то её ряд Фурье сходится в любой точке $x\in\boldsymbol{R}$ и имеет сумму

$$S(x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}. \qquad (10.1.4)$$

Из теоремы следует, что $S(x)=f(x)$ в точках непрерывности функции $f(x)$ и среднему арифметическому левостороннего и правостороннего пределов функции $f(x)$ в точках разрыва первого рода.

Ряд Фурье чётной функции содержит только члены с косинусами:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx, \qquad (10.1.5)$$

где

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx,\quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx,\quad n=1,2,3,\ldots\,. \qquad (10.1.6)$$

Ряд Фурье чётной функции содержит только члены с синусами:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx, \qquad (10.1.7)$$

где

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx,\quad n=1,2,3,\ldots\,. \qquad (10.1.8)$$

Кусочно-дифференцируемая функция, заданная на полупериоде $[0;\pi]$, может быть продолжена в промежуток $[-\pi;0]$ либо как чётная, либо как нечётная, в соответствии с чем её можно разложить в ряд Фурье или только по косинусам, или только по синусам кратных дуг.

Ряды Фурье периода $2l$. Если функция $f(x)$ и её производная $f'(x)$ в промежутке $[-l;l]$ длины $2l$ либо непрерывны, либо имеют лишь конечное число точек разрыва первого рода, то во всех точках непрерывности этого интервала справедливо разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right), \qquad (10.1.9)$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \quad (10.1.10)$$

В точках разрыва функции $f(x)$ и на концах промежутка $[-l;l]$ сумма ряда Фурье определяется формулой (10.1.4).

В случае разложения функции $f(x)$ в ряд Фурье в произвольном промежутке $[a;a+2l]$ длины $2l$ пределы интегрирования в формулах (10.1.10) следует заменить соответственно на значения a и $a+2l$.

10.2 Примеры решения типовых задач

10.2.1 Воспользовавшись разложением функции $f(x)=x^2$ в ряд Фурье в интервале$[-\pi;\pi]$, найти сумму числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Решение. Так как заданная функция четная, то разложение произведем по косинусам, т. е. коэффициенты $b_n=0$, а коэффициенты a_0 и a_n определяются по формулам (10.1.6).

Найдем коэффициенты Фурье

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3\pi}x^3\Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3};$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos kx\,dx = \begin{bmatrix} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = \cos nxdx & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{bmatrix} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx\right) =$$

$$= -\frac{4}{\pi\cdot n}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin nxdx & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{bmatrix} = \frac{4x}{\pi\cdot n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi} -$$

$$-\frac{4}{\pi\cdot n^2}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx = (-1)^n\frac{4}{n^2} - \frac{4}{\pi\cdot n^3}\sin nx\Big|_0^{\pi} = (-1)^n\frac{4}{n^2}.$$

Поэтому для значения $x\in[-\pi;\pi]$ заданная функция разлагается в ряд Фурье по формуле (10.1.5):

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}.$$

Тогда при $x=\pi$ имеем $\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos n\pi}{n^2}$ или $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

10.3 Задания для решения на практическом занятии

10.3.1 Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье в интервале $(a;b)$.

10.3.1.1 $f(x)=x+1$ в интервале $\left(-\pi;\pi\right)$.

10.3.1.2 $f(x)=x^2+1$ в интервале $\left(-2;2\right)$.

10.3.1.3 $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$ в интервале $\left(-\pi;\pi\right)$.

10.3.1.4 $f(x)=|x|+1$ в интервале $\left(-1;1\right)$.

10.3.1.5 $f(x)=\begin{cases}0, -\pi<x<0,\\ x, \quad 0<x<\pi\end{cases}$ в интервале $\left(-\pi;\pi\right)$.

10.3.1.6 $f(x)=|x-1|$ в интервале $\left(-3;3\right)$.

10.3.1.7 $f(x)=2x$ в интервале $\left(-\pi;\pi\right)$.

10.3.1.8 $f(x)=2x+1$ в интервале $\left(-4;4\right)$.

10.3.1.9 $f(x)=\begin{cases}0, \quad -\pi\le x<0;\\ 2x+1, 0\le 0\le\pi.\end{cases}$ в интервале $\left(-\pi;\pi\right)$.

10.3.1.10 $f(x)=x^2$ в интервале $\left(0;2\pi\right)$.

10.3.2 Разложить в ряд Фурье по синусам кратных дуг функцию $f(x)=\pi-x$ на отрезке $\left[0;\pi\right]$. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$.

10.3.3 Разложить в ряд Фурье по косинусам кратных дуг функцию $f(x)=1-x$ на отрезке $\left[0;2\right]$. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$.

10.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

10.4.1 Воспользовавшись разложением функции $f(x)$ в ряд Фурье в указанном интервале, найти сумму данного числового ряда.

10.4.1.1 $f(x)=x^2$, $\left[-\pi;\pi\right]$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n^2}$.

10.4.1.2 $f(x)=|x|$, $\left(-\pi;\pi\right)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$.

10.4.1.3 $f(x)=\dfrac{\pi}{4}$, $\left(0;\pi\right)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n-1}$.

10.4.1.4 $f(x)=|x|$, $\left(-1;1\right)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}$.

10.4.1.5 $f(x)=\cos x,\quad \left[0;\frac{\pi}{2}\right],\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4n^2-1}.$

10.4.1.6 $f(x)=\pi^2-x^2,\quad (-\pi;\pi),\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}.$

10.4.1.7 $f(x)=\begin{cases}0, & -3<x\le 0,\\ x, & 0<x<3,\end{cases}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$

10.4.1.8 $f(x)=|\sin x|,\quad (-\pi;\pi),\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4n^2-1}.$

10.4.1.9 $f(x)=\left|\cos\frac{x}{2}\right|,\quad [-\pi;\pi],\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{1-4n^2}.$

10.4.1.10 $f(x)=|\sin x|,\quad (-\pi;\pi),\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}.$

10.4.1.11 $f(x)=x,\quad (0;\pi),\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$

10.4.1.12 $f(x)=x^2,\quad [0;\pi],\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$

10.4.1.13 $f(x)=\pi x-x^2,\quad (0;\pi),$ по синусам, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)^3}.$

10.4.1.14 $f(x)=\begin{cases}1, & -1\le x<0,\\ x, & 0\le x\le 1,\end{cases}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$

10.4.1.15 $f(x)=x^2,\quad (-\pi;\pi),\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$

10.4.1.16 $f(x)=x,\quad [0;\pi],$ по косинусам, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$

10.4.1.17 $f(x)=3-|x|,\quad (-5;5),\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}.$

10.4.1.18 $f(x)=5x-1,\quad (-5;5),\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}.$

10.4.1.19 $f(x)=x^2+1,\quad [0;\pi],$ по косинусам, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}.$

10.4.1.20 $f(x)=3-x,\quad (-2;2),\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n-1}.$

10.4.1.21 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<\frac{3}{2},\\ -1, & \frac{3}{2}<x<3,\end{cases}\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}.$

10.4.1.22 $f(x)=(x-\pi)^2,\quad [0;\pi],$ по косинусам, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}.$

10.4.1.23 $f(x)=|x|,\quad (-2;2),\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$

10.4.1.24 $f(x)=1-\frac{x}{2},\quad [0;2],$ по синусам, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$

10.4.1.25 $f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2},\quad (-\pi;\pi),\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$

10.4.1.26 $f(x)=\pi-x,\quad [0;\pi],$ по синусам, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$

10.4.1.27 $f(x)=x\sin x,\quad [-\pi;\pi],\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2-1}.$

10.4.1.28 $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ -1, & 1<x<2,\end{cases}\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}.$

10.4.1.29 $f(x)=|\cos x|,\quad [-\pi;\pi],\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{4n^2-1}.$

10.4.1.30 $f(x)=|x|-5,\quad (-2;2),\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Альсевич, Л. А. Математический анализ. Последовательности, функции, интегралы. Практикум : учебное пособие / Л. А. Альсевич, С. Г. Красовский. – Минск : Вышэйшая школа, 2021. – 471 с.

2. Березкина, Н. С. Математика для инженеров: примеры и задачи : учебное пособие : в 4 частях / Н. С. Березкина, Е. А. Ровба ; УО «ГрГУ им. Я. Купалы», Факультет математики и информатики, Кафедра фундаментальной и прикладной математики ; под ред. Е. А. Ровбы. – Минск : РИВШ, 2019. – Ч. 3. – 371 с.

3. Березкина, Н. С. Математика для инженеров: примеры и задачи : учебное пособие : в 4 частях / Н. С. Березкина, С. А. Минюк, Е. А. Наумович, Е. А. Ровба ; УО «ГрГУ им. Я. Купалы», Факультет математики и информатики. – Минск : РИВШ, 2020. – Ч. 4. – 357 с.

4. Герасимович, А. И. Математический анализ. Справочное пособие : в 2 частях / А. И. Герасимович, Н. П. Кеда, М. П. Сугак. – Минск : Вышэйшая школа, 1990. – Ч. 2. – 272 с.

5. Жевняк, Р. М. Высшая математика : в 5 частях / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Вышэйшая школа, 1985. – Ч. 2. – 221 с.

6. Жевняк, Р. М. Высшая математика : в 5 частях / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Вышэйшая школа, 1987. – Ч. 3. – 208 с.

7. Математика. Дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений. Операционное исчисление : практикум / УО «ВГТУ», сост.: А. В. Коваленко, А. А. Джежора, А. П. Дмитриев, Ю. А. Завацкий. – Витебск, 2019. – 101 с.

8. Математика. Кратные интегралы. Элементы теории поля. Ряды : практикум / УО «ВГТУ», сост.: А. В. Коваленко, А. А. Джежора, А. П. Дмитриев [и др.]. – Витебск, 2021. – 107 с.

9. Ровба, Е. А. Математика для инженеров: примеры и задачи : учебное пособие : в 4 частях / Е. А. Ровба, Н. С. Березкина ; УО «ГрГУ им. Я. Купалы ; под ред. Е. А. Ровбы. – Минск : РИВШ, 2019. – Ч. 2. – 386 с.

10. Рябушко, А. П. Индивидуальные задания по высшей математике : учебное пособие : в 4 ч. : Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть ; под ред. А. П. Рябушко. – 6-е изд., испр. – Минск : Вышэйшая школа, 2014. – Ч. 2. – 396 с.

11. Рябушко, А. П. Индивидуальные задания по высшей математике : учебное пособие : в 4 ч. : Ряды. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть ; под ред. А. П. Рябушко. – 6-е изд., испр. – Минск : Вышэйшая школа, 2013. – Ч. 3. – 367 с.

Приложение А

Таблица А1 – Таблица производных основных элементарных функций

1)	$C' = 0$, где $C = Const$;	2)	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$;
3)	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a,\ a > 0, a \neq 1$;	4)	$(e^x)' = e^x$;
5)	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}, a > 0, a \neq 1, x > 0$;	6)	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}, x > 0$;
7)	$(\sin x)' = \cos x$;	8)	$(\cos x)' = -\sin x$;
9)	$(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathrm{Z}$;	10)	$(\mathrm{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}, x \neq \pi k, k \in \mathrm{Z}$;
11)	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \lvert x \rvert < 1$;	12)	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \lvert x \rvert < 1$;
13)	$(\mathrm{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;	14)	$(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;
15)	$(\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x$;	16)	$(\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x$;
17)	$(\mathrm{th}\, x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$;	18)	$(\mathrm{cth}\, x)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}, x \neq 0$.

Таблица А2 – Таблица основных неопределённых интегралов

1)	$\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$;	2)	$\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x \rvert + C, x \neq 0$;
3)	$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1, x > 0$;	4)	$\int e^x dx = e^x + C$;
5)	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$;	6)	$\int \cos x\, dx = \sin x + C$;
7)	$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C, x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathrm{Z}$;	8)	$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C, x \neq \pi k, k \in \mathrm{Z}$;
9)	$\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left\lvert \mathrm{tg}\dfrac{x}{2} \right\rvert + C, x \neq \pi k, k \in \mathrm{Z}$;	10)	$\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left\lvert \mathrm{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) \right\rvert + C,$ $x \neq \pi/2 + \pi k, k \in \mathrm{Z}$;
11)	$\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a} + C\ a \neq 0$;	12)	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C, \lvert x \rvert < \lvert a \rvert$;
13)	$\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert \dfrac{x+a}{x-a} \right\rvert + C$;	14)	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right\rvert + C$;
15)	$\int \mathrm{sh}x\, dx = \mathrm{ch}x + C$;	16)	$\int \mathrm{ch}x\, dx = \mathrm{sh}x + C$;
17)	$\int \dfrac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}x + C$;	18)	$\int \dfrac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}x + C, x \neq 0$.

Учебное издание

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. РЯДЫ

Практикум

Составители:
Коваленко Александр Вильямович
Дмитриев Александр Петрович

Редактор *Р.А. Никифорова*
Корректор *А.С. Прокопюк*
Компьютерная верстка *А.В. Коваленко*

Подписано к печати 10.11.2025. Формат 60x90 $^1/_{16}$. Усл. печ. листов 6,2.
Уч.-изд. листов 7,8. Тираж 80. Заказ 217.

Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет»
210038, г. Витебск, Московский пр., 72.
Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Витебский государственный технологический университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/172 от 12 февраля 2014 г.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 3/1497 от 30 мая 2017 г.