Список использованных источников

1. Дмитриев, А. П. Деформационные свойства и структура современных искусственных кож на тканевой основе для верха обуви / А. П. Дмитриев, В. Д. Борозна, А. Н. Буркин // Дизайн и технологии. – 2018. – № 65 (107). – С.29–35.
2. Дмитриев, А. П. Свойства функций Гомперца и Перла и особенности их применения для аппроксимирования / А. П. Дмитриев, А. С. Авласенко // Материалы докладов 54-й Международной научно-технической конференции преподавателей и студентов : в 2 т. / УО «ВГТУ». – Витебск, 2021. – Т. 1. – С. 244–246.
3. Кузнецов, А. А. Оценка и прогнозирование механических свойств текстильных нитей / А. А. Кузнецов, В. И. Ольшанский ; УО «ВГТУ». – Витебск, 2004. – 226 с.

УДК 512. 542

ПОДГРУППЫ, ПОРОЖДЁННЫЕ ИНВАРИАНТНЫМ МНОЖЕСТВОМ

Руммо В. Г., студ., Гречаников А. А., студ., Коваленко А. В., ст. преп.
Витебский государственный технологический университет,
г. Витебск, Республика Беларусь

В данной работе рассматриваем инвариантные подгруппы, которые имеют большое значение в теории групп. Непустое множество M элементов группы G называется инвариантным, если для любого элемента x группы G выполняется равенство $x^{-1}Mx = M$, то есть это такое множество, которое совпадает со всеми сопряжёнными. Отметим тот факт, что пересечение инвариантных подгрупп является инвариантной подгруппой, а так же то, что инвариантная подгруппа составляет полный класс сопряжённых подгрупп.

Рассмотрим подмножество M основного множества группы G. Предположим, что множество M является инвариантным. Покажем, что любая подгруппа, порождённая инвариантным множеством, является инвариантной подгруппой, то есть $H = \langle M \rangle \triangleleft G$. Подгруппа, порождённая заданным множеством, состоит из тех и только тех элементов группы, которые могут быть представлены в виде конечного числа степеней элементов из данного множества, то есть любой элемент $h \in H$ записывается в виде $h = m_1^{\alpha_1} m_2^{\alpha_2} \ldots m_k^{\alpha_k}$, $m_i \in M$, α_i – целые числа, $i = 1,2,\ldots, k$.

Ввиду инвариантности множества, для любого элемента x группы G выполняется равенство: $x^{-1}hx = x^{-1}m_1^{\alpha_1} m_2^{\alpha_2} \ldots m_k^{\alpha_k}\, x$. Трансформируем последнее равенство:

$$x^{-1}hx = x^{-1}m_1^{\alpha_1} x \cdot x^{-1}m_2^{\alpha_2} x \cdot \ldots \cdot x^{-1}m_k^{\alpha_k} x.$$

Пусть $\alpha_i > 0$, тогда $x^{-1}m_i^{\alpha_i}x = x^{-1}m_i x \cdot x^{-1}m_i x \cdot \ldots \cdot x^{-1}m_i x = (x^{-1}m_i x)^{\alpha_i} \in H$, так как $x^{-1}m_i x \in M$. Предположим, что для некоторого j число $\alpha_j < 0$:

$$x^{-1}m_j^{\alpha_j}x = (x^{-1}m_j^{-\alpha_j}x)^{-1} = \left((x^{-1}m_j x)^{-\alpha_j}\right)^{-1} = (x^{-1}m_j x)^{-\alpha_j} \in H,$$

то есть в любом случае $x^{-1}m_i^{\alpha_i}x \in H$, для любого $i = 1,2,\ldots, k$.

А так как H – подгруппа, то произведение элементов $x^{-1}hx \in H$. Откуда $H = \langle M \rangle \triangleleft G$.

Докажем, что подгруппа, индекс которой в группе равен двум, инвариантна в группе.

Пусть $H \subseteq G$ и индекс $|G : H| = 2$. Так как индекс равен 2, то для любого элемента x, не входящего в множество H, справедливо равенство $G = H + Hx$, причём классы H и Hx являются различными классами. С другой стороны, так как для любого $h \in H$ справедливо равенство $hH = Hh$, то и для любого $x \in G$ будет верным равенство $xH = Hx$, а это означает, что подгруппа H инвариантна в группе G.

В работе проведено доказательство следующих свойств инвариантных подгрупп:

1) если H_1 и H_2 подгруппы группы G, причём H_1 инвариантна в группе G, то в этой группе будет инвариантно их произведение $H_1 H_2$;

2) если H_1 и H_2 подгруппы группы G, которые инвариантны в порождении $(H_i < \langle H_1 ; H_2 \rangle; i = 1; 2)$, то любой элемент из H_1 перестановочен с каждым элементом из H_2.

УДК 512. 542

БЕСКОНЕЧНЫЕ ЦИКЛИЧЕСКИЕ ГРУППЫ КОНЕЧНОГО ИНДЕКСА

Мацуганова Е. С., студ., Гречаников А. А., студ., Коваленко А. В., ст. преп.
Витебский государственный технологический университет,
г. Витебск, Республика Беларусь

В данной работе проводим исследование бесконечных циклических групп, а именно показываем, что существует единственная неединичная подгруппа конечного индекса.

Рассмотрим циклическую группу порождённую элементом $a : G = \langle a \rangle$. Пусть группа H является её неединичной подгруппой. Если α является наименьшим натуральным числом, таким что $a^\alpha \in H$, то $H = \langle a^\alpha \rangle$. Для любого натурального $i = \alpha q + r$, $0 \leq r < \alpha$ получаем верное равенство $a^i = (a^\alpha)^q \cdot a^r$, где $(a^\alpha)^q \in H$. Следовательно, $a^i = Ha^r$, а группу G можно представить в виде разложения: $G = H + Ha + Ha^2 + ... + Ha^{\alpha-1}$, необходимо только показать, что все эти смежные классы различные.

Предположим от противного. Пусть существуют равные смежные классы: $Ha^i = Ha^j$, где $i \neq j$, $0 \leq i, j < \alpha\text{-}1$. Для определённости положим $i > j$, а, следовательно, $a^i = ha^j$ или $a^{i-j} = h \in H$, $0 < i - j < \alpha\text{-}1$. Пришли к противоречию с тем, что α наименьшее натуральное число, для которого $a^\alpha \in H$. Следовательно, любая подгруппа H из циклической группы G будет иметь конечный индекс $|G : H| = \alpha$. Покажем, что данная подгруппа является единственной.

Пусть в группе G имеются две подгруппы H_1 и H_2 одного и того же индекса, то есть $n = |G : H_1| = |G : H_2|$. Предположим, что k и p наименьшие натуральные числа, для которых $\langle a^k \rangle = H_1$, $\langle a^p \rangle = H_2$. Тогда справедливы равенства: $|G : H_1| = k$, $|G : H_2| = p$. Следовательно, $k = p = n$ и $H_1 = \langle a^n \rangle$, $H_2 = \langle a^n \rangle$. То есть, единственность доказана.

Кроме единственности подгруппы в работе доказываем её существование.

Пусть G – бесконечная циклическая группа, порождённая элементом $a : G = \langle a \rangle$. Рассмотрим подгруппу, порождённую элементом $a^n : H = \langle a^n \rangle$. Она является бесконечной циклической группой и будет иметь два образующих элемента a^n и $(a^n)^{-1} = a^{-n}$. Это означает, что n является наименьшим натуральным числом, для которого справедлива принадлежность $a^n \in H$. Следовательно, в бесконечной циклической группе существует единственная циклическая подгруппа конечного индекса $|G : H| = n$.