МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Учреждение образования
«Витебский государственный технологический университет»

Высшая математика (Математика). Линейное программирование.

Часть 1

Практикум для студентов первого курса специальностей
6-05-0311-02 «Экономика и управление»,
6-05-0412-04 «Маркетинг»,
6-05-0411-02 «Финансы и кредит»,
6-05-0413-02 «Товароведение»,
6-05-0718-01 «Инженерная экономика»

Витебск
2025

УДК 519.852

Составители:

Т. В. Никонова, О. Е. Рубаник

Одобрено кафедрой «Математика и информационные технологии»
УО «ВГТУ», протокол № 1 от 02.09.2025.

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом
УО «ВГТУ», протокол № 1 от 05.09.2025.

Высшая математика (Математика). Линейное программирование. Часть 1 : практикум / сост. Т. В. Никонова, О. Е. Рубаник. – Витебск : УО «ВГТУ», 2025. – 42 с.

Издание содержит методические материалы по темам «Постановка задачи линейного программирования», «Графический метод решения задачи линейного программирования», «Симплекс-метод решения задачи линейного программирования» и «Метод искусственного базиса» дисциплин «Высшая математика» и «Математика» и предназначено для студентов первого курса специальностей 6-05-0311-02 «Экономика и управление», 6-05-0412-04 «Маркетинг», 6-05-0411-02 «Финансы и кредит», 6-05-0413-02 «Товароведение», 6-05-0718-01 «Инженерная экономика». В каждом разделе практикума приведены краткие теоретические сведения, подробно разобранные практические примеры, приведены задания для решения на практических занятиях и задачи для самостоятельного решения. Практикум предназначен для эффективной подготовки студентов к практическим занятия, к промежуточному контролю знаний и зачету.

УДК 519.852

СОДЕРЖАНИЕ

1 Постановка задачи линейного программирования

В самом общем виде задача линейного программирования (ЗЛП) формулируется следующим образом.

Необходимо найти значения переменных $(x_1;\ x_2; \dots;\ x_n)$, для которых ***целевая функция*** L достигает экстремума:

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots c_nx_n \to \max\ (\min), \tag{1}$$

при условии, что неизвестные удовлетворяют ***системе ограничений***

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n (\le, =, \ge) b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n (\le, =, \ge) b_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n (\le, =, \ge) b_m, \\ x_j \ge 0, j = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{2}$$

Любое неотрицательное решение системы (2) называется ***допустимым решением*** или ***допустимым планом***. Допустимое решение $X = (x_1; x_2; \dots; x_n)$, при котором целевая функция (1) достигает максимума (минимума), называется ***оптимальным решением*** или ***оптимальным планом***. В отыскании этого оптимального решения и состоит задача линейного программирования.

В ЗЛП (1) – (2) коэффициенты $a_{ij}, b_i, c_j, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ – заданные постоянные числа. Без ограничения общности можно считать, что все правые части системы (2) неотрицательны, то есть $b_i \ge 0, i = \overline{1, m}$. Если в некоторых ограничениях системы это условие нарушено, то можно умножить обе части таких ограничений на (–1).

Задача линейного программирования, в которой система (2) содержит как равенства, так и неравенства, представлена в ***общей форме***. Но одна и та же ЗЛП может быть сформулирована в различных эквивалентных формах. Наиболее важными формами ЗЛП являются ***каноническая*** и ***стандартная.***

В ***канонической форме*** ЗЛП является задачей на максимум некоторой линейной функции L, ее система ограничений состоит только из равенств (уравнений), а правые части линейных ограничений $b_i \ge 0, i = \overline{1, m}$:

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots c_nx_n \to \max, \tag{3}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = b_m, \\ x_j \ge 0, j = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{4}$$

К канонической форме можно преобразовать любую задачу линейного программирования. В случае, когда ищется минимум целевой функции, можно перейти к задаче на отыскание максимума, изменив знак целевой функции.

Если в исходной задаче некоторое i-ое ограничение было неравенством, то оно преобразуется в равенство, введением в левую часть некоторой неотрицательной ***балансовой (фиктивной) переменной*** $x_{n+i} \geq 0$. Причём в неравенства вида «≤» вводится дополнительная переменная со знаком «+», а в случае неравенства вида «≥» – со знаком «–»:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i \Leftrightarrow a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i$$

или

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i \Leftrightarrow a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - x_{n+i} = b_i.$$

В каждое из неравенств вводится своя балансовая переменная, после чего система ограничений становится системой уравнений.

В ***стандартной форме*** система ограничений (2) задачи линейного программирования состоит только из неравенств. Если в исходной задаче некоторое i-ое ограничение было равенством, то оно равносильно системе двух взаимно противоположных неравенств:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \Leftrightarrow \begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i. \end{cases}$$

Методы линейного программирования используются для анализа некоторых экономических задач. Чтобы использовать эти методы, нужно прежде всего построить математическую модель экономического явления (формализовать задачу).

Построение математической модели распадается на три этапа:

1) ввести в рассмотрение независимые переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которыми можно управлять;

2) построить целевую функцию, то есть функцию независимых переменных, для которой в ходе решения будет отыскиваться максимальное или минимальное значение;

3) установить ограничения (равенства или неравенства), которым должны удовлетворять независимые переменные задачи.

В дальнейших задачах будем рассматривать только те модели, в которых целевая функция линейна относительных переменных, ограничения – линейные равенства или неравенства и независимые переменные не отрицательны.

Пример 1. Привести к каноническому виду следующую задачу:

$$L = 2x_1 - 3x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 1, \\ x_1 - 2x_2 \leq 1, \\ x_1 + x_2 = 3, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решение. Переведём задачу на минимум в задачу на максимум, введя новую целевую функцию путем умножения исходной функции на (–1):

$$L_1 = -L = -2x_1 + 3x_2 \to \max.$$

Первое и второе ограничения системы представляют собой неравенства. Введём балансовые переменные $x_3 \geq 0$ и $x_4 \geq 0$. Причём в первое неравенство введём неотрицательную переменную x_3 со знаком «$-$», а во второе – со знаком «$+$». Тогда система ограничений примет вид:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 = 3, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Таким образом, получили эквивалентную задачу в канонической форме.

Пример 2. Для сохранения здоровья и работоспособности человеку требуется в сутки определенное количество питательных веществ: белков, жиров, углеводов и витаминов. Запасы этих веществ в продуктах P_1, P_2, P_3 неодинаковы (см. табл. 1.1). Цена одной единицы продукта P_1 равна 20 ден. ед., P_2 – 40 ден. ед., P_3 – 60 ден. ед. Требуется составить рацион из этих продуктов, чтобы организм получил нужное количество питательных веществ и чтобы стоимость потребляемых за день продуктов была бы минимальной.

Таблица 1.1 – Данные к примеру 2

Питательные вещества	Минимальная норма, ед.	Количество единиц питательных веществ на одну единицу продукции		
		P_1	P_2	P_3
Жиры	10	1	5	1
Белки	12	3	1	1
Углеводы	16	2	4	8
Витамины	5	1	0	6

Построить математическую модель задачи.

Решение. Пусть x_1, x_2, x_3 – количество единиц продуктов P_1, P_2 и P_3, соответственно, необходимых для суточного рациона человека.

Целевая функция выражает затраты на покупку упомянутых выше продуктов, причем они должны быть минимальны:

$$L = 20x_1 + 40x_2 + 60x_3 \to \min.$$

Построим ограничения задачи. Количество жира, содержащееся в трех продуктах, должно быть не меньше суточной потребности в жире, то есть 10 ед. Получим первое неравенство:

$$x_1 + 5x_2 + x_3 \geq 10.$$

Аналогично составляем ограничения, связанные с потреблением белков, углеводов и витаминов:

$$3x_1 + x_2 + x_3 \geq 12,$$
$$2x_1 + 4x_2 + 8x_3 \geq 16,$$
$$x_1 + 6x_3 \geq 5.$$

Таким образом, математическая модель задачи имеет вид

$$L = 20x_1 + 40x_2 + 60x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 \geq 10, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \geq 12, \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 \geq 16, \\ x_1 + 6x_3 \geq 5, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Задания для решения на практическом занятии

1. Привести к каноническому виду следующие задачи линейного программирования.

1.1 $L = -3x_1 + 2x_2 \to \min$,

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 15, \\ x_1 + x_2 = 9, \\ x_1 - 4x_2 \le -8, \\ 1 \le x_1 \le 7, \\ x_2 \ge 2. \end{cases}$$

1.2 $L = 5x_1 + x_2 \to \max$,

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 \ge -9, \\ 2x_1 + x_2 \le 12, \\ 3x_2 - 2x_3 = -4, \\ 0 \le x_2 \le 5, \\ x_1, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

1.3 $L = 2x_2 + 5x_3 \to \min$,

$$\begin{cases} x_1 - 8x_2 \le -1, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 \le 17, \\ x_1 \ge 1, \\ 1 \le x_2 \le 8, \\ x_3, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

1.4 $L = x_1 + 3x_4 \to \max$,

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_4 \le 18, \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 \ge 17, \\ 3 \le x_3 \le 10, \\ x_4 \ge 2, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2. Построить математические модели следующих задач.

2.1 Собственные средства банка в сумме с депозитами составляют 100 млн ден. ед. Часть этих средств, но не менее 35 млн. ден. ед., должна быть размещена в кредитах. Кредиты являются неликвидными активами банка, т. к. в случае непредвиденной потребности в наличности обратить кредиты в деньги без существенных потерь невозможно.

Другое дело ценные бумаги. Их можно в любой момент продать, получив некоторую прибыль, или, во всяком случае, без большого убытка. Поэтому существует правило, согласно которому коммерческие банки должны покупать в определённой пропорции ликвидные активы – ценные бумаги, чтобы компенсировать не ликвидность кредитов. Ценные бумаги должны составлять не менее 30 % средств, размещённых в кредитах и ценных бумагах. Доходность кредитов составляет 25 %, а ценных бумаг – 15 %. Цель банка состоит в том, чтобы получить максимальную прибыль от кредитов и ценных бумаг.

2.2 Имеется два способа похудеть: первый – диета, второй – применение специальных препаратов. Каждый день диеты обходится в 20 рублей, а каждый день приема специальных препаратов – в 85 рублей. Диета позволяет худеть за день на 200 грамм. Эффект от приема препаратов в четыре раза больше, чем от диеты. Пациент хочет, чтобы диета применялась как минимум в два раза чаще, чем прием препаратов. Найти оптимальное сочетание способов похудения за месяц, если пациент может потратить не более 1000 рублей.

Задания для самостоятельного решения

1. Привести к каноническому виду следующие задачи линейного программирования.

1.1 $L = 2x_1 - 3x_2 + x_3 \to \max$,

1.2 $L = -x_1 + 2x_3 \to \min$,

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 9, \\ x_2 + 3x_3 \leq 29, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = -3, \\ 2 \leq x_2 \leq 12, \\ x_1, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 \leq 2, \\ 3x_1 - 2x_2 = -14, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 \geq 10, \\ 2 \leq x_1 \leq 10, \\ x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

1.3 $L = 5x_1 + 2x_2 - x_3 \to \min$,

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \geq 15, \\ 7x_1 - x_2 - x_3 \leq 63, \\ x_1 \leq 15, \\ 1 \leq x_2 \leq 9, \\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

1.4 $L = 2x_1 + x_4 \to \max$,

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \geq 4, \\ x_2 - 5x_3 - 2x_4 \geq 7, \\ 4x_1 - x_3 - 6x_4 = -1, \\ 2 \leq x_1 \leq 12, \\ x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

1.5 $L = -x_1 + 4x_2 - x_4 \to \min$,

$$\begin{cases} x_2 - 8x_3 + x_4 \leq 10, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_4 = -5, \\ 3 \leq x_4 \leq 30, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

1.6 $L = x_1 - 3x_2 + x_3 \to \max$,

$$\begin{cases} x_3 - 9x_4 \leq -2, \\ -2x_1 + x_2 + x_4 \leq 3, \\ 1 \leq x_1 \leq 14, \\ x_3 \geq 2, \\ x_2, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

1.7 $L = 6x_1 + x_2 \to \min$,

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 - x_3 = -3, \\ 7x_2 + x_3 \leq 5, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 2, \\ 3 \leq x_3 \leq 10. \end{cases}$$

1.8 $L = 4x_2 + 5x_3 - x_4 \to \max$,

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 7x_3 \geq 2, \\ x_2 - x_4 \geq -3, \\ 1 \leq x_1 \leq 16, \\ 0 \leq x_2 \leq 7, \\ x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

1.9 $L = -x_2 + 3x_3 \to \min$,

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_4 \geq 14, \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30, \\ x_1 - 8x_2 - x_3 = -24, \\ 0 \leq x_3 \leq 8, \\ 3 \leq x_4 \leq 10, \\ x_1, x_2, \geq 0. \end{cases}$$

1.10 $L = 4x_1 + 6x_2 - x_3 \to \max$,

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_4 = -9, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 \leq 23, \\ x_1 \geq 5, \\ 3 \leq x_4 \leq 10, \\ x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

2. Построить математические модели следующих задач.

2.1 Предприятие производит столы двух типов: I и II. В неделю на рынке может быть реализовано до 550 столов. Для каждой стола типа I требуется 2 м^2 материала, а для стола типа II – 3 м^2 материала. Предприятие может получить до 1200 м^2 материала в неделю. Для изготовления одного стола типа I требуется 12 мин. станочного времени, а для изготовления одной стола типа II – 30 мин. Станок можно использовать до 160 ч в неделю. Прибыль от продажи одного стола типа I составляет 3 ден. ед., а одного стола типа II – 4 ден. ед. Сколько столов каждого типа следует выпускать в неделю, чтобы получить максимальную прибыль?

2.2 Предприятие выпускает три модели телевизоров, причем каждая модель производится на отдельной технологической линии. Суточный объем производства первой линии составляет 40 изделий, второй – 65 изделий и третьей – 30. На телевизор первой модели расходуется 8 элементов типа А, на телевизор второй модели – 6 и на телевизор третьей модели – 4 таких же элементов. Максимальный суточный запас элементов равен 800 единицам. Прибыль от реализации одного телевизора первой, второй и третьей моделей равна 30, 20 и 25 ден. ед., соответственно. Определить оптимальный суточный объем производства телевизоров каждой модели для получения максимальной прибыли.

2.3 Предприятие производит два вида продукции – P_1 и P_2. Объем сбыта продукции вида P_1 составляет не менее 60 % общего объема реализации продукции обоих видов. Для изготовления продукции вида P_1 и P_2 используется одно и то же сырье, запас которого ограничен величиной 200 кг. Расход сырья на единицу продукции P_1 составляет 2 кг, а на единицу продукции P_2 – 3 кг. Стоимость одной единицы продукции P_1 и P_2 соответственно равны 20 и 40 ден. ед. Определить оптимальное распределение сырья для изготовления продукции P_1 и P_2, позволяющее получить максимальный доход.

2.4 Процесс изготовления трех видов изделий состоит в последовательной обработке каждого из них на трех станках. Время использования этих станков для производства данных изделий ограничено 10-ю часами в сутки. Время обработки и прибыль от продажи одного изделия каждого вида приведены в таблице 1.2. Найти оптимальный объем производства изделий каждого вида.

Таблица 1.2 – Данные к задаче 2.4

Вид изделия	Удельная прибыль, ден. ед.	Время обработки одного изделия, мин.		
		Станок 1	Станок 2	Станок 3
I	2	10	6	8
II	3	5	20	15
III	5	25	15	10

2.5 Автозавод выпускает две модели автомобилей: M_1 и M_2. На заводе работает 1200 неквалифицированных и 800 квалифицированных рабочих, каждому из которых оплачивается 40 часов в неделю. Для изготовления одного автомобиля модели M_1 требуется 30 часов неквалифицированного и 50 часов квалифицированного труда; для модели M_2 – 40 часов неквалифицированного и 20 часов квалифицированного труда. Каждая модель M_1 требует затрат в размере 600 ден. ед. на сырье и комплектующие изделия, а каждая модель M_2 – 1500 ден. ед.; суммарные затраты не должны превосходить 9500000 ден. ед. в неделю. Рабочие, осуществляющие доставку, работают пять дней в неделю, и могут забрать с завода не более 200 машин в день. Каждая модель M_1 приносит автозаводу 600 ден. ед. прибыли, а каждая модель M_2 – 1000 ден. ед.

прибыли. Какой объем выпуска каждой модели должен выпускать автозавод для максимальной прибыли?

2.6 Спортсмен занимается 1 час разминкой перед тренировкой, причем каждое упражнение отнимает силы и имеет определенный эффект (табл. 1.3).

Таблица 1.3 – Данные к задаче 2.6

Вид упражнения	Время, мин.	Затрата сил, ед.	Польза для организма, ед.	Эффект, ед.
Приседание	5	10	45	30
Отжимание	5	15	60	70
Подтягивание	5	20	70	90

Спортсмен оценивает свои силы в 200 ед. и хочет добиться эффекта не менее 400 ед. Определить, сколько подходов к каждому из упражнений должен сделать спортсмен, чтобы добиться максимальной пользы.

2.7 Предприятию требуется уголь с содержанием фосфора не более 0,04 % и с долей зольных примесей не более 4,5 %. Доступны три сорта угля: I, II, III, содержание примесей и цены за 1 т которых приведены в таблице 1.4.

Таблица 1.4 – Данные к задаче 2.7

Сорт угля	Цена, ден. ед.	Содержание примеси фосфора, %	Содержание примеси золы, %
I	20	0,08	6
II	35	0,05	5
III	45	0,02	3

Определить, как нужно смешивать эти сорта угля, чтобы удовлетворить ограничения на содержание примесей, но при этом получить минимальную стоимость.

2.8 Предприятие производит три продукта: *A*, *B* и *C*, рынок сбыта которых неограничен. Каждый продукт должен быть обработан последовательно на станках типа I, II, III. Время обработки в часах для каждого из изделий *A*, *B* и *C* приведено в таблице 1.5.

Таблица 1.5 – Данные к задаче 2.8

	I	II	III
A	0,5	0,4	0,2
B	0,3	0,25	0,4
C	0,2	0,3	0,25

Время работы станков I, II, III составляет 40, 36 и 34 часов в неделю, соответственно. Прибыль от реализации изделий *A*, *B* и *C* составляет 5, 3 и 4 ден. ед. за одну штуку. Определить недельные нормы выпуска изделий *A*, *B* и *C*, при которых прибыль будет наибольшей.

2.9 Предприятие производит два вида краски: *A* и *B*. Трудоемкость изготовления краски вида *A* вдвое выше трудоемкости изготовления краски вида B. Если бы предприятие выпускало только краску типа A, то суточный объем производства мог бы составить 5000 ед. На краску типа A требуется 350 ед. исходного материала, а на краску типа B – 200 ед. Запас исходного материала ограничен 600000 единицами. Суточный объем сбыта краски обоих видов ограничен диапазоном от 1500 до 2000 единиц. Прибыль от продажи одной единицы краски типа A равна 80 руб., а типа B – 50 руб. Определить какое количество краски каждого типа следует изготовить, чтобы максимизировать прибыль.

2.10 Корреспонденция фирмы отправляется тремя способами: по электронной почте, по факсу и по обычной почте. Каждый из видов пересылки характеризуется скоростью, допустимым объемом пересылаемой информации, конфиденциальностью и стоимостью (табл. 1.6, данные приведены в единицах за одну единицу отправленной корреспонденции).

Таблица 1.6 – Данные к задаче 2.10

Вид связи	Время доставки	Объем	Конфиденциальность	Цена
Электронная почта	2	20	2	9
Факс	7	5	5	20
Почта	25	30	15	50

Известно, что для успешной работы фирмы минимальный объем пересылаемой корреспонденции должен составлять 350 ед., время пересылки не должно превышать 400 ед., а конфиденциальность должна составлять не менее 240 ед. Как организовать отправку корреспонденции, чтобы выполнить указанные ограничения и затратить минимум средств на ее пересылку?

2 Графический метод решения задачи линейного программирования

Задача линейного программирования в стандартной форме с двумя переменными формулируется следующим образом.

Необходимо найти значения неизвестных $(x_1; x_2)$, для которых целевая функция достигает экстремума:

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max\ (\min), \tag{5}$$

при условии, что неизвестные удовлетворяют системе ограничений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases} \tag{6}$$

Эта задача допускает простое геометрическое истолкование.

На плоскости Ox_1x_2 каждое из неравенств системы (6) определяет некоторую полуплоскость, лежащую по одну сторону от соответствующей прямой $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i, i = \overline{1,m}$. Для определения расположения нужной полуплоскости достаточно подставить в соответствующее неравенство координаты какой-либо точки, не лежащей на самой прямой (например, начала координат, если $b_i \neq 0$) и проверить его выполнение. Если неравенство верное, то нужная полуплоскость содержит выбранную точку, если нет – то это другая полуплоскость. Для системы из нескольких таких неравенств точки, координаты которых удовлетворяют всем неравенствам одновременно, должны находиться во всех соответствующих полуплоскостях, то есть принадлежать теоретико-множественному пересечению этих полуплоскостей. Множество точек на плоскости, удовлетворяющих системе ограничений, составляет, таким образом, некоторую выпуклую многоугольную область – ***область допустимых решений*** (ОДР). Условия не отрицательности переменных $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$ приводят к тому, что эта область находится в первой координатной четверти.

Если ОДР является пустым множеством, то задача не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений.

Пусть ОДР является непустым множеством. Из всех решений нужно выбрать то, при котором целевая функция (5) принимает максимальное (минимальное) значение. Значения целевой функции являются постоянными, равными h, на прямых $c_1x_1 + c_2x_2 = h$, которые называются ***линиями уровня***. Все эти прямые перпендикулярны ***вектору нормали*** $\vec{n} = (c_1; c_2)$, координаты которого равны коэффициентам при соответствующих переменных x_1 и x_2 целевой функции. При перемещении линии уровня в направлении вектора нормали (при поиске максимума), значения h будут увеличиваться, а в противоположном (при поиске минимума) – уменьшаться. Таким образом, перемещать линию уровня в нужном направлении необходимо до тех пор, пока эта прямая имеет хотя бы одну общую точку с ОДР. Очевидно, что пересечение ОДР с указанной выше прямой, находящейся в крайнем положении, есть оптимальное решение рассматриваемой ЗЛП.

Если при перемещении линии уровня по области допустимых решений в направлении, соответствующем приближению к экстремуму целевой функции, линия уровня уходит в бесконечность, то задача не имеет решения ввиду неограниченности целевой функции.

Пример 1. Решить графически следующую задачу:

$$L = 4x_1 + 3x_2 \to \max\ (\min),$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \geq 12, \\ 2x_1 - 7x_2 \leq 0, \\ x_1 + x_2 \leq 9, \\ -x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решение. Сначала построим область допустимых решений. Поскольку в условии задачи переменные неотрицательны, то ОДР целиком лежит в первой четверти, следовательно, все ограничения системы будут рассматриваться только в первой четверти.

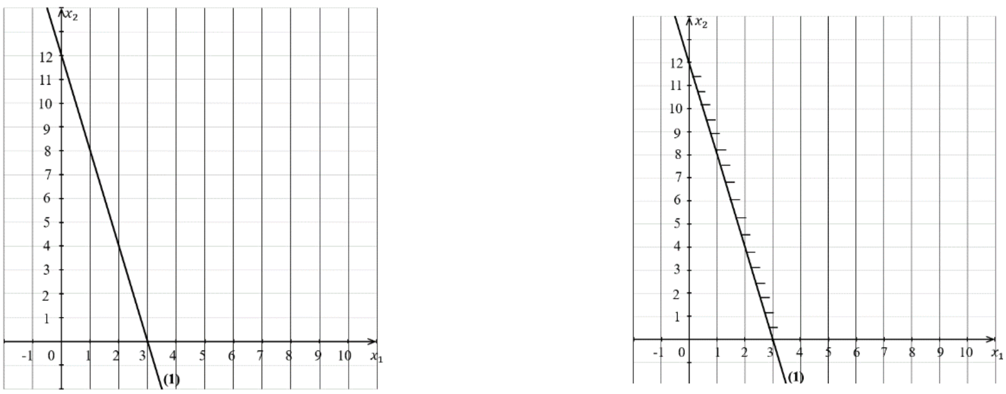
Найдем на плоскости Ox_1x_2 точки, удовлетворяющие отдельно каждому неравенству.

1. Неравенство $4x_1 + x_2 \geq 12$.

От неравенства перейдем к равенству: $4x_1 + x_2 = 12$ – уравнение прямой. Найдем две точки этой прямой:

x_1	0	3
x_2	12	0

и построим эту прямую (прямая (1), рис. 1 а), которая разделит плоскость Ox_1x_2 на две полуплоскости. Координаты всех точек каждой полуплоскости удовлетворяют одному из неравенств: $4x_1 + x_2 < 12$ или $4x_1 + x_2 > 12$. Возьмем на плоскости Ox_1x_2 любую точку, не принадлежащую прямой (1), например точку $(0; 0)$. Координаты этой точки не удовлетворяют первому неравенству системы ограничений $4x_1 + x_2 \geq 12$. Значит, и все точки, лежащие в этой полуплоскости, тоже не удовлетворяют первому неравенству. Все точки, лежащие в другой полуплоскости, то есть правее прямой (1), включая саму прямую, будут удовлетворять неравенству $4x_1 + x_2 \geq 12$; заштрихуем эту полуплоскость (рис. 1 б).



а б

Рисунок 1 – Построение первой полуплоскости:
а – прямая (1), б – прямая (1) и искомая полуплоскость

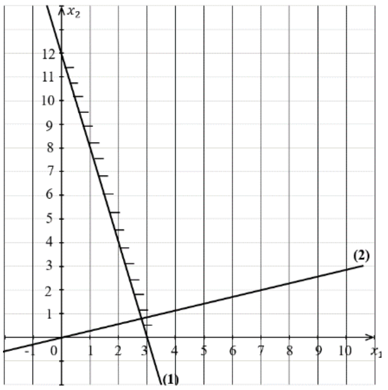
2. Неравенство $2x_1 - 7x_2 \leq 0$.

От неравенства перейдем к равенству: $2x_1 - 7x_2 = 0$ – уравнение прямой. Найдем две точки этой прямой:

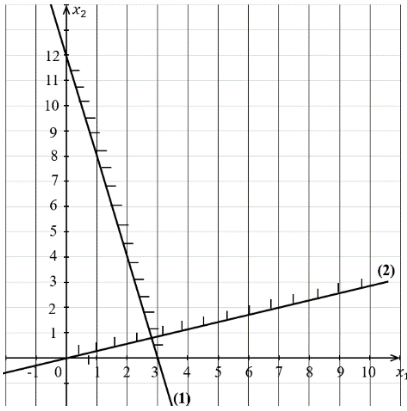
x_1	0	7
x_2	0	2

и построим эту прямую (прямая (2), рис. 2 а), которая разделит плоскость Ox_1x_2 на две полуплоскости. Для выбора нужной полуплоскости возьмем, например точку $(0; 1)$ (точку $(0; 0)$ брать нельзя, так как она лежит на прямой (2)).

Координаты этой точки удовлетворяют неравенству $2x_1 - 7x_2 \le 0$; заштрихуем полуплоскость выше прямой (2), включая саму прямую (рис. 2 б).



а



б

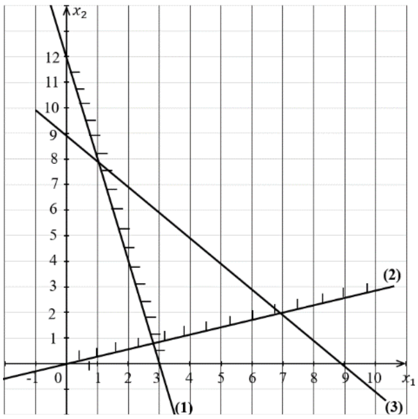
Рисунок 2 – Построение второй полуплоскости:
а – прямая (2), б – прямая (2) и искомая полуплоскость

3. Неравенство $x_1 + x_2 \le 9$.

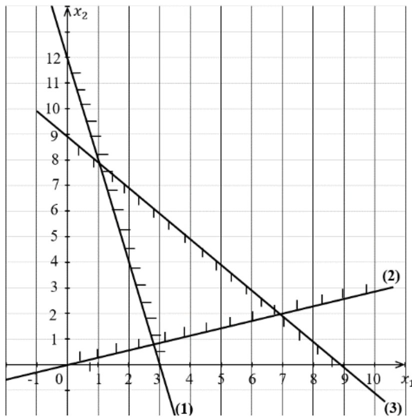
От неравенства перейдем к равенству: $x_1 + x_2 = 9$ – уравнение прямой. Найдем две точки этой прямой:

x_1	0	9
x_2	9	0

и построим эту прямую (прямая (3), рис. 3 а), которая разделит плоскость Ox_1x_2 на две полуплоскости. Для выбора нужной полуплоскости возьмем, например точку $(0; 0)$. Координаты этой точки удовлетворяют неравенству $x_1 + x_2 \le 9$; заштрихуем полуплоскость левее и ниже прямой (3), включая саму прямую (рис. 3 б).



а



б

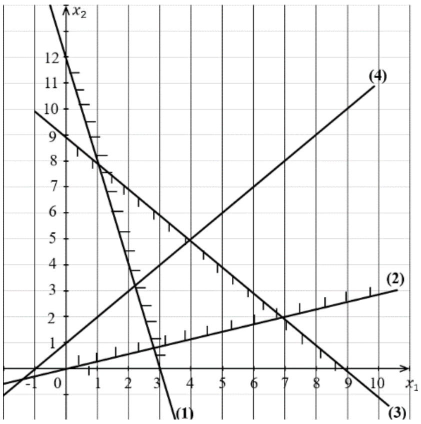
Рисунок 3 – Построение третьей полуплоскости:
а – прямая (3), б – прямая (3) и искомая полуплоскость

4. Неравенство $-x_1 + x_2 \le 1$.

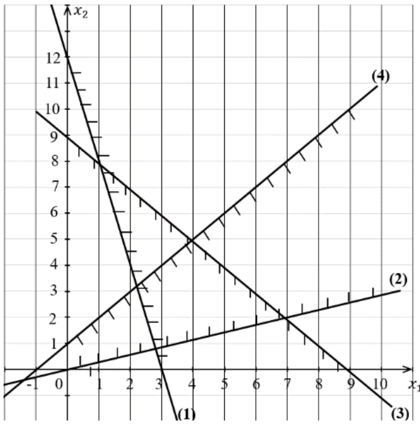
От неравенства перейдем к равенству: $-x_1 + x_2 = 1$ – уравнение прямой. Найдем две точки этой прямой:

x_1	0	–1
x_2	1	0

и построим эту прямую (4) (рис. 4 а), которая разделит плоскость Ox_1x_2 на две полуплоскости. Для выбора нужной полуплоскости возьмем, например точку $(0; 0)$. Координаты этой точки удовлетворяют неравенству $-x_1 + x_2 \leq 1$; заштрихуем полуплоскость правее и ниже прямой (4), включая саму прямую (рис. 4 б).



а



б

Рисунок 4 – Построение четвертой полуплоскости:
а – прямая (4), б – прямая (4) и искомая полуплоскость

Множество точек, координаты которых удовлетворяют исходной системе неравенств, должны удовлетворять всем неравенствам одновременно и лежать в первой четверти. Очевидно, что это область представляет собой многоугольник, представленный на рисунке 5.

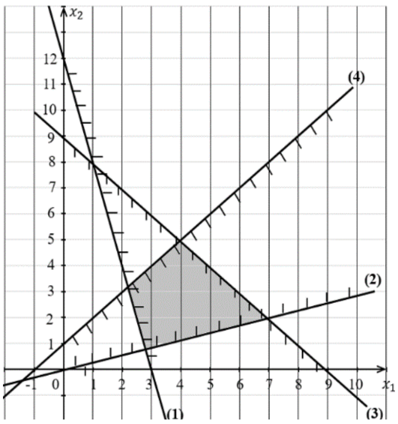


Рисунок 5 – Область допустимых решений

Задача будет решена, если среди точек области допустимых решений найти такие, в которых целевая функция $L = 4x_1 + 3x_2$ принимает максимальное и минимальное значение. Для нахождения этих точек построим какую-нибудь линию уровня, то есть прямую $4x_1 + 3x_2 = h$, причем желательно, чтобы она пересекала ОДР. В данном случае удобно взять $h = 24$. Имеем: $4x_1 + 3x_2 = 24$; построим эту прямую на том же чертеже (прямая l, рис. 6).

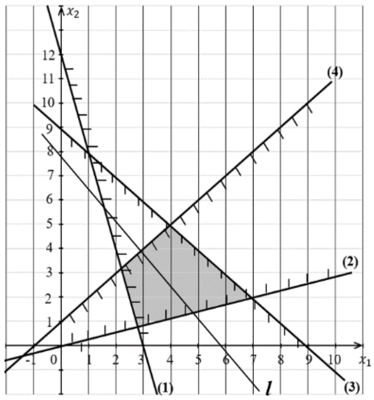
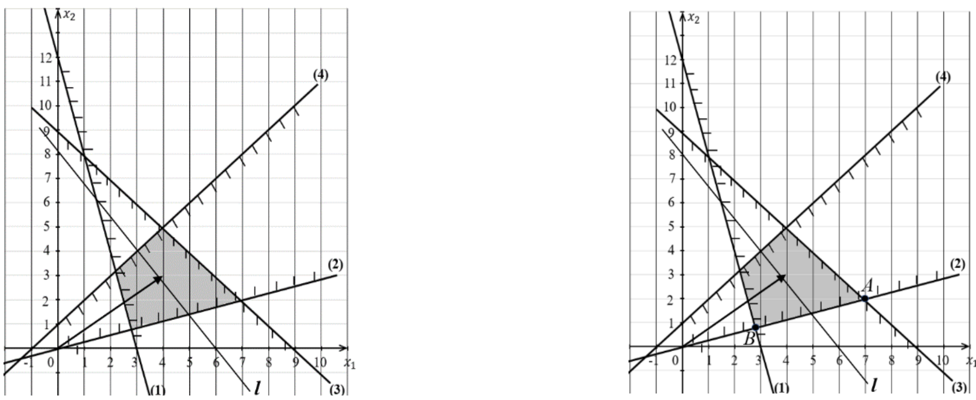


Рисунок 6 – Область допустимых решений и линия уровня

Наконец, изобразим вектор нормали $\vec{n} = (4; 3)$ (координаты вектора – коэффициенты при соответствующих переменных целевой функции L), начало которого находится в точке $(0; 0)$, а конец – в точке $(4; 3)$ (рис. 7 а). Передвигая линию уровня параллельно самой себе в направлении вектора нормали, находим крайнюю точку пересечения прямой с ОДР – это точка А (рис. 7 б*)*, в ней целевая функция принимает максимальное значение. Для нахождения минимального значения целевой функции передвигаем линию уровня в направлении, противоположном направлению вектора нормали – получим точку B (рис. 7 б).



а б

Рисунок 7 – Иллюстрация графического метода решения задачи:
а – ОДР, линия уровня и вектор нормали, б – точки оптимума

Точка A – это точка пересечения прямых, соответствующих уравнениям:

$$\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = 9. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем $x_1 = 7,\ x_2 = 2$. Тогда:

$$L_{\max} = L(7; 2) = 34.$$

Точка B – это точка пересечения прямых, соответствующих уравнениям:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 12, \\ 2x_1 - 7x_2 = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем $x_1 = 2{,}8,\ x_2 = 0{,}8$. Тогда:

$$L_{\min} = L(2{,}8; 0{,}8) = 13{,}6.$$

Задания для решения на практическом занятии

1. Решить следующие задачи графическим методом.

1.1 $L = -3x_1 + 2x_2 \to \max\ (\min)$,

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 15, \\ x_1 + x_2 \le 9, \\ -x_1 + 4x_2 \ge 8, \\ -x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.2 $L = 5x_1 + x_2 \to \max\ (\min)$,

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 9, \\ 2x_1 + x_2 \le 12, \\ 3x_1 - 2x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 \ge 1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.3 $L = 2x_1 + 5x_2 \to \max\ (\min)$,

$$\begin{cases} x_1 - 8x_2 \le 0, \\ -x_1 + 3x_2 \le 17, \\ -4x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.4 $L = x_1 + 3x_2 \to \max\ (\min)$,

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 18, \\ -x_1 + 4x_2 \ge 17, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 2. \end{cases}$$

Задания для самостоятельного решения

1. Решить следующие задачи графическим методом.

1.1 а) $L = 2x_1 - 3x_2 \to \max\ (\min)$,

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 9, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 29, \\ -x_1 + 2x_2 \ge 3, \\ x_1 \ge 2, \\ 0 \le x_2 \le 7. \end{cases}$$

б) $L = -2x_1 + 2x_2 \to \max\ (\min)$,

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 2, \\ 3x_1 - 2x_2 \le 14, \\ -6x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.2 а) $L = 5x_1 + 2x_2 \to \max\ (\min)$,

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \ge 15, \\ 7x_1 + 9x_2 \le 63, \\ 3x_1 - 2x_2 \le 15, \\ x_1 \ge 2, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

б) $L = 2x_1 + 7x_2 \to \max\ (\min)$,

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 4, \\ x_1 + 2x_2 \ge 7, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 1. \end{cases}$$

1.3 а) $L = x_1 + 4x_2 \to \max\ (\min)$,

б) $L = 2x_1 + x_2 \to \max\ (\min)$,

$$\begin{cases} x_1 - 8x_2 \le 10, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ -x_1 + 5x_2 \le 5, \\ 3x_1 + 10x_2 \le 30, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 9x_2 \le 0, \\ -2x_1 + x_2 \le 3, \\ -x_1 + 3x_2 \le 14, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.4 а) $L = 6x_1 + x_2 \to \max\ (\min)$,

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 3, \\ 3x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 - x_2 \le 0, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

б) $L = 4x_1 + 5x_2 \to \max\ (\min)$,

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 - x_2 \ge 2, \\ x_1 \ge 1, \\ x_2 \ge 2. \end{cases}$$

1.5 а) $L = -x_1 + 3x_2 \to \max\ (\min)$,

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \ge 14, \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30, \\ 3x_1 + 8x_2 \ge 24, \\ x_1 - x_2 \le 0, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

б) $L = 4x_1 + 6x_2 \to \max\ (\min)$,

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 9, \\ x_1 + 2x_2 \ge 8, \\ x_1 + 6x_2 \ge 12, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.6 а) $L = 2x_1 - 2x_2 \to \max\ (\min)$,

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \ge 14, \\ -x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 18, \\ -3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

б) $L = x_1 + 5x_2 \to \max\ (\min)$,

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 - 4x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \le -3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.7 а) $L = x_1 - 3x_2 \to \max\ (\min)$,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 3, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 1, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

б) $L = 6x_1 + x_2 \to \max\ (\min)$,

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 - 4x_2 \le 4, \\ 7x_1 + 4x_2 \ge 28, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.8 а) $L = 3x_1 + x_2 \to \max\ (\min)$,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ -3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + 3x_2 \ge 9, \\ 5x_1 + 4x_2 \le 20, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

б) $L = x_1 + x_2 \to \max\ (\min)$,

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 2, \\ -2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.9 а) $L = -2x_1 + 2x_2 \to \max\ (\min)$,

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 \ge 30, \\ x_1 - 2x_2 \le 0, \\ 4x_1 + 5x_2 \le 40, \\ 0 \le x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0. \end{cases}$$

б) $L = x_1 - x_2 \to \max\ (\min)$,

$$\begin{cases} 7x_1 + 8x_2 \le 56, \\ x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ x_1 \ge 10, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.10 а) $L = 4x_1 - 2x_2 \to \max\ (\min)$,
$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 \geq 4, \\ x_1 + x_2 \geq 3, \\ 5x_1 + 13x_2 \leq 65, \\ x_1 \geq 1, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

б) $L = 3x_1 + x_2 \to \max\ (\min)$,
$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \geq 30, \\ -x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 + 4x_2 \geq 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3 Симплекс-метод решения задачи линейного программирования

Симплекс-метод является универсальным, применимым к любой задаче линейного программирования в канонической форме вида (3) – (4).

Поскольку система ограничений (4) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, то она совместна, если ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы этой системы. Рассмотрим случай, когда система совместна и ранг равен r и меньше, чем число неизвестных: $r < n$. В этом случае система имеет бесконечное множество решений и для нахождения этих решений можно выбрать r неизвестных, которые выразим через остальные неизвестные. Для определённости предположим, что выбраны первые, идущие подряд, неизвестные $x_1, x_2, \dots, x_r$. Тогда система уравнений (4) будет равносильна следующей системе:

$$\begin{cases} x_1 = b_1' + a_{1r+1}' x_{r+1} + \cdots + a_{1n}' x_n, \\ x_2 = b_2' + a_{2r+1}' x_{r+1} + \cdots + a_{2n}' x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r = b_r' + a_{rr+1}' x_{r+1} + \cdots + a_{rn}' x_n, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{7}$$

Подставив в выражение целевой функции (3) выражения для неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_r$, получим:

$$L = d_0 + d_{r+1}x_{r+1} + d_{r+2}x_{r+2} + \cdots + d_n x_n \to \max. \tag{8}$$

К виду (7) можно привести любую совместную систему, например, методом Гаусса. Однако не всегда можно выражать через остальные первые r неизвестных (мы это сделали для определённости записи). Однако такие r неизвестных обязательно найдутся. Эти неизвестные (в данном случае переменные $x_1, x_2, \dots, x_r$) называются ***базисными***, остальные $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$– ***свободными***.

Придавая определенные значения свободным переменным и вычисляя значения базисных, можно получать различные решения системы ограничений. Те особые решения, в которых свободные переменные равны нулю, называются ***базисными***; их столько же, сколько различных базисных видов у данной системы ограничений. Базисное решение называется ***допустимым базисным***

решением (***допустимым планом***) или ***опорным решением (опорным планом)***, если в нем значения переменных неотрицательны. Если в качестве базисных взяты переменные $x_1, x_2, \dots, x_r$, то решение $(b_1';\ b_2';\ \dots; b_r'; 0; \dots; 0)$ будет опорным при условии, что $b_1', b_2', \dots, b_r' \geq 0$. Опорный план называется ***невырожденным***, если значения всех базисных неизвестных строго положительны, то есть $b_1', b_2', \dots, b_r' > 0$.

Если ЗЛП имеет решение, то среди допустимых планов ЗЛП в канонической форме обязательно есть опорное решение ее системы ограничений. Если оптимальный план задачи единственен, то он совпадает с некоторым опорным решением.

Симплекс-метод представляет собой процедуру направленного перебора опорных решений. Исходя из некоторого, найденного заранее опорного решения по определенному алгоритму симплекс-метода, находится новое опорное решение, на котором значение целевой функции L не меньше, чем на старом (в задаче на max). После ряда шагов приходим к опорному решению, которое является оптимальным планом.

Таким образом, применение симплексного метода распадается на два этапа:

– нахождение допустимого базисного решения системы ограничений или установление факта ее несовместности;

– нахождение оптимального решения.

При этом каждый этап может включать несколько шагов, соответствующих тому или иному базисному решению. Но так как число базисных решений всегда ограниченно, то ограниченно и число шагов симплексного метода.

Вычисления по симплекс-методу можно организовать в виде ***симплекс-таблиц***. Для составления симплекс-таблицы система (7) должна быть приведена к ***допустимому базисному виду***:

$$\begin{cases} x_1 - a_{1r+1}'\, x_{r+1} - \dots - a_{1n}' x_n = b_1', \\ x_2 - a_{2r+1}'\, x_{r+1} - \dots - a_{2n}' x_n = b_2', \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r - a_{rr+1}'\, x_{r+1} - \dots - a_{rn}' x_n = b_r', \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, n}, \end{cases} \tag{9}$$

где $x_1, x_2, \dots, x_r$ – базисные неизвестные и $b_1' > 0, \dots, b_r' > 0$.

А целевая функция (8) к виду:

$$L - d_{r+1}x_{r+1} - d_{r+2}x_{r+2} - \dots - d_n x_n = d_0. \tag{10}$$

Оформление этих данных представлено в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Организация симплекс-таблицы

Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	…	x_r	x_{r+1}	…	x_n	Симплексное отношение
x_1	b'_1	1	0	…	0	$-a'_{1r+1}$	…	$-a'_{1n}$	
x_2	b'_2	0	1	…	0	$-a'_{2r+1}$	…	$-a'_{2n}$	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	
x_r	b'_r	0	0	…	1	$-a'_{rr+1}$	…	$-a'_{rn}$	
L	d_0	0	0	…	0	$-d_{r+1}$	…	$-d_n$	

Заметим, что названия базисных переменных здесь взяты лишь для определенности записи и в реальной таблице могут оказаться другими.

Алгоритм работы с симплекс-таблицей

1. Просматривается последняя (***индексная***) строка таблицы 3.1 и среди коэффициентов этой строки (исключая d_0) выбирается отрицательное число при отыскании максимума целевой функции (8). Если такового числа нет, то допустимое базисное решение является оптимальным и данная таблица является последней.

Полученное оптимальное решение будет единственным, если нули в индексной строке соответствуют только базисным переменным. Если же в индексной строке существует нулевой элемент, соответствующий свободной переменной, то это оптимальное решение не единственное, и можно найти другое оптимальное решение, при котором значение целевой функции будет таким же.

2. Просматривается столбец таблицы, отвечающий выбранному отрицательному коэффициенту в последней строке – ***ключевой столбец***, и в этом столбце выбираются только положительные коэффициенты. Если таковых нет, то целевая функция неограничена на области допустимых значений переменных и задача решений не имеет.

3. Если в ключевом столбце есть несколько положительных коэффициентов, то составляем симплексное отношение путем нахождения отношения соответствующего свободного члена (находящегося в столбце свободных членов) к каждому положительному элементу ключевого столбца, и из полученных отношений выбираем минимальное. Этот коэффициент ключевого столбца называется ***разрешающим***, а строка в которой он находится, – ***ключевой***.

4. В дальнейшем базисная переменная, отвечающая ключевой строке, должна быть переведена в разряд свободных, а свободная переменная, отвечающая ключевому столбцу, вводится в число базисных. Строится новая таблица, содержащая новые названия базисных переменных.

5. Если разрешающий элемент не равен единице, то разделим каждый элемент ключевой строки на разрешающий элемент и полученные значения

запишем в строку с тем же номером с измененной базисной переменной новой симплекс-таблицы.

6. К каждой из остальных строк прибавляем вновь полученную, умноженную на такое число, чтобы в клетках ключевого столбца все элементы, кроме разрешающего, стали нулями. Получаем новую симплекс-таблицу.

7. Переходим к пункту 1. алгоритма.

Рассмотрим порядок решения задачи с помощью симплекс-таблиц на примере.

Пример 1. Решить следующую задачу симплекс-методом:

$$L = x_1 + x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 = 2, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_3 - x_4 \leq 5, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Решение. В данном случае задача представлена в общем виде. Для решения ЗЛП перепишем ее в каноническом виде.

Сначала переведем задачу на минимум в задачу на максимум путем введения новой целевой функции, умножив исходную целевую функцию на (-1):

$$L_1 = -L = -x_1 - x_2 \to \max.$$

Далее, третье ограничение системы является неравенством. Для преобразования его к равенству введем новую балансовую переменную $x_5 \geq 0$ со знаком «+». Тогда система ограничений примет вид:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 = 2, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_3 - x_4 + x_5 = 5, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу системы ограничений:

$$A|B = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

Поскольку минор

$$\mathrm{M}_{123}^{125} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

то $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A|B = 3$. Значит, система совместна и имеет бесконечное множество решений.

В качестве базисного минора возьмем минор M_{123}^{125}. Те неизвестные, коэффициенты при которых вошли в базисный минор, а это x_1, x_2, x_5 будут базисными, а остальные неизвестные – x_3, x_4, свободными. Следовательно, базисные переменные можно выразить через свободные переменные:

$$\begin{cases} x_1 = 2 + 2x_3 - x_4, \\ x_2 = 1 + x_3 - 2x_4, \\ x_5 = 5 - x_3 + x_4. \end{cases}$$

Целевую функцию тоже надо выразить через свободные переменные:

$$L_1 = -x_1 - x_2 = -(2 + 2x_3 - x_4) - (1 + x_3 - 2x_4) = -3 - 3x_3 + 3x_4$$

или

$$L_1 = -3 - 3x_3 + 3x_4.$$

Положив свободные переменные равными нулю: $x_3 = 0,\ x_4 = 0$, получим соответствующие значения базисных переменных: $x_1 = 2,\ x_2 = 1, x_5 = 5$.

Таким образом, первое опорное решение будет:

$$(2; 1; 0; 0; 5).$$

При найденном опорном решении значение целевой функции:

$$L_1(2; 1; 0; 0; 5) = -3.$$

Для проверки найденного опорного решения на оптимальность, а в случае не оптимальности, переход к следующему опорному решению, при котором значение целевой функции будет не меньше, воспользуемся симплекс-таблицами, к которым будем применять указанный выше алгоритм.

Для получения первой таблицы целевую функцию перепишем в виде (10):

$$L_1 + 3x_3 - 3x_4 = -3.$$

Составим первую симплекс-таблицу (табл. 3.2).

Таблица 3.2 – Первая симплекс-таблица к примеру 1

№ строки	Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Симплексное отношение
I	x_1	2	1	0	–2	1	0	
II	x_2	1	0	1	–1	2	0	
III	x_5	5	0	0	1	–1	1	
IV	L_1	–3	0	0	3	–3	0	
V								

Последняя строка V пока пустая, в нее впоследствии будем записывать данные измененной ключевой строки.

Просматриваем индексную строку IV таблицы 3.2 и среди коэффициентов этой строки, исключая свободный член, ищем отрицательные числа. Такое число есть, и это –3, значит первое опорное решение не является оптимальным. Просматриваем этот столбец (ключевой столбец), соответствующий переменной x_4. Далее составляем симплексное отношение путем деления свободных членов только на положительные элементы ключевого столбца; из полученных значений выбираем минимальное (табл. 3.3). Строка, соответствующая этому минимальному элементу, будет ключевой. На пересечении ключевой строки и ключевого столбца находится разрешающий элемент, равный 2. Поскольку этот элемент не равен единице, то делим все значения ключевой строки на 2 (разрешающий элемент) и полученные данные записываем в строке V (табл. 3.3).

Таблица 3.3 – Дополненная первая симплекс-таблица к примеру 1

№ строки	Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Симплексное отношение
I	x_1	2	1	0	–2	1	0	2
II	x_2	1	0	1	–1	2	0	0,5 – min
III	x_5	5	0	0	1	–1	1	
IV	L_1	–3	0	0	3	–3	0	
V = II:2		0,5	0	0,5	–0,5	1	0	

Для составления второй таблицы нужно выполнить следующие действия. Во-первых, на месте базисной переменной x_2, соответствующей ключевой строке, запишем переменную x_4, соответствующую ключевому столбцу. Во-вторых, пересчитаем все элементы строк таким образом, чтобы все элементы ключевого столбца, кроме разрешающего стали равными нулю. Формулы для пересчета элементов строк можно представить так (слева в равенствах записаны номера строк следующей таблицы, а справа – предыдущей):

$$\text{I} = \text{I} - \text{V},\ \text{II} = \text{V},\ \text{III} = \text{III} + \text{V},\ \text{IV} = \text{IV} + \text{V} \cdot 3.$$

Получим таблицу 3.4.

Таблица 3.4 – Вторая симплекс-таблица к примеру 1

№ строки	Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Симплексное отношение
I	x_1	1,5	1	–0,5	–1,5	0	0	
II	x_4	0,5	0	0,5	–0,5	1	0	
III	x_5	5,5	0	0,5	0,5	0	1	
IV	L_1	–1,5	0	1,5	1,5	0	0	

Получили второе опорное решение (базисные переменные приравниваем соответствующим свободным членам, а свободные – нулям):

$$(1{,}5; 0; 0; 0{,}5; 5{,}5),$$

значение целевой функции при котором стало больше (равно –1,5, табл. 3.4).

Поскольку среди коэффициентов индексной строке, кроме свободного члена, нет отрицательных чисел, то это опорное решение является оптимальным. Осталось записать ответ.

Для задачи в канонической форме:

$$L_{1\max} = L_1(1{,}5; 0; 0; 0{,}5; 5{,}5) = -1{,}5.$$

Для исходной задачи:

$$L_{\min} = -L_{1\max} = L(1{,}5; 0; 0; 0{,}5) = 1{,}5.$$

Пример 2 (задача об оптимальном использовании ресурсов при производственном планировании). Для изготовления одной единицы каждой из трех видов продукции P_1, P_2 и P_3 используется 3 вида сырья S_1, S_2 и S_3. Подробная информация содержится в таблице 3.5. Требуется составить такой план выпуска продукции, при котором величина прибыли будет наибольшей, при условии, что сырье вида P_2 должно быть использовано полностью.

Таблица 3.5 – Данные к примеру 2

Вид сырья	Запас сырья, ед.	Количество единиц сырья на одну единицу продукции		
		P_1	P_2	P_3
S_1	12	1	2	–
S_2	4	1	–	1
S_3	14	2	2	–
Прибыль от единицы продукции, ден. ед.		3	2	1

Решение. Составим математическую модель задачи.

Обозначим через x_1, x_2 и x_3 количество единиц продукции соответственно видов P_1, P_2 и P_3, которое необходимо выпускать предприятию для получения максимальной прибыли. Согласно условиям задачи, прибыль от выпуска продукции вида P_1 составит $3x_1$ ден. ед., вида P_2 – $2x_2$ ден. ед. и вида P_3 – x_3 ден. ед. Тогда целевая функция, определяющая прибыль предприятия от реализации всей выпускаемой продукции, примет вид:

$$L = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max.$$

Выпишем ограничения для сырья. В соответствии с условиями задачи, на изготовление всей продукции будет использовано $x_1 + 2x_2$ ед. сырья вида S_1. Но, так как запасы сырья вида S_1 составляют 12 ед., то должно выполняться неравенство

$$x_1 + 2x_2 \le 12.$$

На изготовление всей продукции будет использовано $x_1 + x_3$ ед. сырья вида S_2. А поскольку запасы сырья вида S_2 составляют 4 ед. и должны быть израсходованы полностью, то должно выполняться равенство

$$x_1 + x_3 = 4.$$

Аналогично для сырья вида S_3 должно выполняться неравенство

$$2x_1 + 2x_2 \le 14.$$

Наконец, поскольку переменные x_1, x_2 и x_3 определяют количество единиц продукции, то они должны быть неотрицательными, то есть

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

Тогда система ограничений будет иметь вид:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12, \\ x_1 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 \le 14, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Таким образом, целевая функция L и полученная система ограничений составляют задачу линейного программирования.

Чтобы решить эту задачу, перепишем ее в каноническом виде:

$$L = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 12, \\ x_1 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_5 = 14, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0. \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу системы ограничений:

$$A|B = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

Поскольку минор

$$\mathrm{M}_{123}^{435} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

то $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A|B = 3$. Значит, система совместна и имеет бесконечное множество решений.

Базисными неизвестными будут x_4, x_3, x_5, а свободными – x_1, x_2. Выразим базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_4 = 12 - x_1 - 2x_2, \\ x_3 = 4 - x_1, \\ x_5 = 14 - 2x_1 - 2x_2. \end{cases}$$

Целевую функцию тоже выразим через свободные переменные:

$$L = 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3x_1 + 2x_2 + 4 - x_1 = 2x_1 + 2x_2 + 4$$

или

$$L = 2x_1 + 2x_2 + 4.$$

Положив свободные переменные равными нулю: $x_1 = 0,\ x_2 = 0$, получим соответствующие значения базисных переменных: $x_4 = 12,\ x_3 = 4, x_5 = 14$.

Таким образом, первое опорное решение будет:

$$(0; 0; 4; 12; 14).$$

При найденном опорном решении значение целевой функции:

$$L(0; 0; 4; 12; 14) = 4.$$

Проверим первое опорное решение на оптимальность и, в случае не оптимальности, улучшим его с помощью симплекс-таблиц.

Для получения первой таблицы целевую функцию перепишем в виде (10):

$$L - 2x_1 - 2x_2 = 4.$$

Составим первую симплекс-таблицу (табл. 3.6).

Таблица 3.6 – Первая симплекс-таблица к примеру 2

№ строки	Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Симплексное отношение
I	x_4	12	1	2	0	1	0	
II	x_3	4	1	0	1	0	0	
III	x_5	14	2	2	0	0	1	
IV	L	4	–2	–2	0	0	0	
V								

Просматриваем индексную строку IV таблицы 3.6 и среди коэффициентов этой строки, исключая свободный член, ищем отрицательные числа. Таких чисел два, причем оба равны –2, значит первое опорное решение не является оптимальным. Выбираем любое из этих отрицательных чисел, например соответствующее переменной x_2 и получаем ключевой столбец.

Далее составляем симплексное отношение путем деления свободных членов только на положительные элементы ключевого столбца; из полученных значений выбираем минимальное (табл. 3.7). Строка, соответствующая этому минимальному элементу, будет ключевой. На пересечении ключевой строки и ключевого столбца находится разрешающий элемент, равный 2. Поскольку этот элемент не равен единице, то делим все значения ключевой строки на 2 (разрешающий элемент) и полученные данные записываем в строке V (табл. 3.7).

Таблица 3.7 – Дополненная первая симплекс-таблица к примеру 2

№ строки	Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Симплексное отношение
I	x_4	12	1	2	0	1	0	6 – min
II	x_3	4	1	0	1	0	0	
III	x_5	14	2	2	0	0	1	7
IV	L	4	–2	–2	0	0	0	
V = II : 2		6	0,5	1	0	0,5	0	

Для составления второй таблицы нужно выполнить следующие действия. Во-первых, на месте базисной переменной x_4, соответствующей ключевой строке, запишем переменную x_2, соответствующую ключевому столбцу. Во-вторых, пересчитаем все элементы строк таким образом, чтобы все элементы ключевого столбца, кроме разрешающего стали равными нулю. Формулы для пересчета элементов строк можно представить так:

$$\text{I} = \text{V},\ \text{II} = \text{II},\ \text{III} = \text{III} - \text{V} \cdot 2,\ \text{IV} = \text{IV} + \text{V} \cdot 2.$$

Получим таблицу 3.8.

Таблица 3.8 – Вторая симплекс-таблица к примеру 2

№ строки	Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Симплексное отношение
I	x_2	6	0,5	1	0	0,5	0	
II	x_3	4	1	0	1	0	0	
III	x_5	2	1	0	0	–1	1	
IV	L	16	–1	0	0	1	0	
V								

Получили второе опорное решение, при котором значение целевой функции стало больше:

$$L(0; 6; 4; 0; 2) = 16.$$

Поскольку индексная строка содержит отрицательное число, то второе опорное решение тоже не является оптимальным, улучшим его.

Дополним вторую таблицу в соответствии с указанным выше алгоритмом (табл. 3.9).

Таблица 3.9 – Дополненная вторая симплекс-таблица к примеру 2

№ строки	Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Симплексное отношение
I	x_2	6	0,5	1	0	0,5	0	12
II	x_3	4	1	0	1	0	0	4
III	x_5	2	1	0	0	–1	1	2 – min
IV	L	16	–1	0	0	1	0	
V = III		2	1	0	0	–1	1	

Формулы для пересчета элементов строк:

I = I – V · 0,5, II = II – V, III = V, IV = IV + V.

Получим таблицу 3.10.

Таблица 3.10 – Третья симплекс-таблица к примеру 2

№ строки	Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Симплексное отношение
I	x_2	5	0	1	0	1	–0,5	
II	x_3	2	0	0	1	1	–1	
III	x_1	2	1	0	0	–1	1	
IV	L	18	0	0	0	0	1	

Поскольку индексная строка не содержит отрицательных элементов, то полученное третье опорное решение является оптимальным. Осталось записать ответ.

Для задачи в каноническом виде:

$$L_{\max} = L(2; 5; 2; 0; 0) = 18.$$

Для исходной задачи (отбросим значения балансовых переменных):

$$L_{\max} = L(2; 5; 2) = 18.$$

Отметим, что полученный оптимальный план не единственный, так как существует нулевой элемент индексной строки, соответствующий свободной переменной x_3. Можно найти другой оптимальный план, при котором значение целевой функции тоже будет равно 18.

Таким образом, для получения наибольшей прибыли, равной 18 ден. ед., предприятие должно выпускать 2 единицы продукции вида P_1, 5 единиц продукции вида P_2 и 2 единицы продукции вида P_3.

Задания для решения на практическом занятии

1. Для изготовления одной единицы каждой из трех видов продукции P_1, P_2 и P_3 используется 3 вида сырья S_1, S_2 и S_3. Подробная информация содержится в таблице 3.11. Требуется составить такой план выпуска продукции, при котором величина прибыли будет наибольшей, при условии, что сырье вида P_1 должно быть использовано полностью.

Таблица 3.11 – Данные к заданию 1

Вид сырья	Запас сырья, ед.	Количество единиц сырья на одну единицу продукции		
		P_1	P_2	P_3
S_1	18	2	1	3
S_2	10	2	–	
S_3	24	4	–	3
Прибыль от единицы продукции, ден. ед.		6	1	9

2. Решить следующие задачи симплекс-методом.

2.1 $L = -x_1 + x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 \leq 3, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

2.2 $L = x_1 + x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = -1, \\ x_2 + x_4 = 2, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

2.3 $L = x_1 + x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 = 2, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_3 - x_4 \leq 5, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

2.4 $L = x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ -2x_2 + 4x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_2 + x_3 + x_5 = 1, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Задания для самостоятельного решения

Для изготовления одной единицы каждой из трех видов продукции P_1, P_2 и P_3 используется 3 вида сырья S_1, S_2 и S_3. Нормы затрат каждого из видов сырья на выпуск единицы продукции данного вида, запасы сырья и прибыль от реализации единицы продукции приведены в таблицах вариантов. Требуется составить такой план выпуска продукции, при котором величина прибыли будет наибольшей при заданном дополнительном ограничении.

Вариант 1

Вид сырья	Запас сырья, ед.	Количество единиц сырья на одну единицу продукции		
		P_1	P_2	P_3
S_1	16	2	2	–
S_2	10	–	2	1
S_3	12	1	2	–
Прибыль от единицы продукции, ден. ед.	2	6	1	

Необходимо, чтобы сырье вида S_2 было израсходовано полностью.

Вариант 2

Вид сырья	Запас сырья, ед.	Количество единиц сырья на одну единицу продукции		
		P_1	P_2	P_3
S_1	14	1	2	–
S_2	20	2	2	–
S_3	8	1	–	1
Прибыль от единицы продукции, ден. ед.		4	3	1

Необходимо, чтобы сырье вида S_3 было израсходовано полностью.

Вариант 3

Вид сырья	Запас сырья, ед.	Количество единиц сырья на одну единицу продукции		
		P_1	P_2	P_3
S_1	16	–	2	2
S_2	4	1	1	–
S_3	14	–	1	2
Прибыль от единицы продукции, ден. ед.		1	3	2

Необходимо, чтобы сырье вида S_2 было израсходовано полностью.

Вариант 4

Вид сырья	Запас сырья, ед.	Количество единиц сырья на одну единицу продукции		
		P_1	P_2	P_3
S_1	4	1	1	–
S_2	24	–	2	3
S_3	24	–	4	2
Прибыль от единицы продукции, ден. ед.		1	5	2

Необходимо, чтобы сырье вида S_1 было израсходовано полностью.

Вариант 5

Вид сырья	Запас сырья, ед.	Количество единиц сырья на одну единицу продукции		
		P_1	P_2	P_3
S_1	36	3	–	4
S_2	24	3	–	2
S_3	6	1	1	–
Прибыль от единицы продукции, ден. ед.		7	1	4

Необходимо, чтобы сырье вида S_3 было израсходовано полностью.

Вариант 6

Вид сырья	Запас сырья, ед.	Количество единиц сырья на одну единицу продукции		
		P_1	P_2	P_3
S_1	30	3	5	–
S_2	8	1	1	1
S_3	8	–	2	–
Прибыль от единицы продукции, ден. ед.		3	3	1

Необходимо, чтобы сырье вида S_2 было израсходовано полностью.

Вариант 7

Вид сырья	Запас сырья, ед.	Количество единиц сырья на одну единицу продукции		
		P_1	P_2	P_3
S_1	10	1	2	–
S_2	8	2	1	–
S_3	3	1	–	1
Прибыль от единицы продукции, ден. ед.		5	2	1

Необходимо, чтобы сырье вида S_3 было израсходовано полностью.

Вариант 8

Вид сырья	Запас сырья, ед.	Количество единиц сырья на одну единицу продукции		
		P_1	P_2	P_3
S_1	7	–	1	1
S_2	14	2	1	–
S_3	10	1	1	–
Прибыль от единицы продукции, ден. ед.		4	5	1

Необходимо, чтобы сырье вида S_1 было израсходовано полностью.

Вариант 9

Вид сырья	Запас сырья, ед.	Количество единиц сырья на одну единицу продукции		
		P_1	P_2	P_3
S_1	14	2	1	–
S_2	8	1	1	–
S_3	3	–	1	1
Прибыль от единицы продукции, ден. ед.		3	4	1

Необходимо, чтобы сырье вида S_3 было израсходовано полностью.

Вариант 10

Вид сырья	Запас сырья, ед.	Количество единиц сырья на одну единицу продукции		
		P_1	P_2	P_3
S_1	18	3	2	–
S_2	4		1	1
S_3	10	1	2	–
Прибыль от единицы продукции, ден. ед.		2	5	1

Необходимо, чтобы сырье вида S_2 было израсходовано полностью.

4 Метод искусственного базиса

Метод искусственного базиса – это метод нахождения опорного решения задач линейного программирования канонического вида.

Пусть дана задача линейного программирования вида (3) – (4).

Допустим, что нет очевидного допустимого базисного решения. Для его нахождения необходимо составить вспомогательную задачу. Введём новые (искусственные) переменные $z_1, z_2, \dots, z_m$. Добавим эти переменные к соответствующим ограничениям и введём новую целевую функцию, в результате получим вспомогательную задачу.

Математическая модель вспомогательной задачи имеет следующий вид:

$$L^* = -z_1 - z_2 - \dots - z_m \to \max, \quad (11)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + z_1 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + z_2 = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + z_m = b_{m,} \\ x_1, x_2, \dots, x_n, \geq 0, \\ z_1, z_2, \dots, z_m \geq 0. \end{cases} \qquad (12)$$

Функция L^* называется ***искусственной целевой функцией***. Этап I задачи состоит в максимизации функции L^* с помощью симплекс-метода. Для оптимизации функции L^* надо выразить ее в подходящем виде, т. е. через свободные переменные. Переменные $z_1, z_2, \dots, z_m$ являются базисными в первом решении системы (12).

Предположим, что ограничения (12) имеют допустимое базисное решение. Тогда решение этапа I задачи закончится тем, что функция L^* обратится в ноль и при этом $z_1, z_2, \dots, z_m$ тоже будут нулевыми. Но когда $z_1 = z_2 = \dots = z_m = 0$, измененные ограничения (12) равносильны исходным ограничениям (4). Допустимое базисное решение, оптимизирующее функцию L^*, может быть использовано как начальное допустимое базисное решение для оптимизации целевой функции (3) на этапе II задачи.

Начиная с этого момента, нулевые значения $z_1, z_2, \dots, z_m$ игнорируются.

Необходимо отметить, что в случае, если оптимальное значение искусственной целевой функции не равно нулю, то это означает несовместность системы ограничений исходной задачи канонического вида и отсутствие допустимых решений.

Пример 1. Перед проектировщиком автомобиля поставлена задача сконструировать кузов, используя листовой металл, стекло и пластмассу, стоимость которых соответственно составляет 25, 20 и 40 ден. ед./м^2; причем масса 1 м^2 листового металла, стекла и пластмассы равна соответственно 10, 15 и 3 кг. Совместная общая поверхность кузова вместе с дверями и окнами должна составлять 14 м^2, из них не менее 4 м^2 и не более 5 м^2 следует отвести под стекло. Масса кузова не должна превышать 150 кг. Сколько листового металла, стекла и пластмассы должен использовать проектировщик, чтобы стоимость кузова была наиболее дешевой?

Решение. Составим математическую модель задачи.

Пусть для конструирования кузова будет использовано x_1 м^2 листового металла, x_2 м^2 стекла и x_3 м^2 пластмассы.

С учетом введенных обозначений и всех условий, оговоренных в примере, получим следующую задачу линейного программирования:

$$L = 25x_1 + 20x_2 + 40x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 14, \\ 4 \leq x_2 \leq 5, \\ 10x_1 + 15x_2 + 3x_3 \leq 150, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Приведем задачу ЛП к каноническому виду:

$$L_1 = -25x_1 - 20x_2 - 40x_3 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 14, \\ x_2 - x_4 = 4, \\ x_2 + x_5 = 5, \\ 10x_1 + 15x_2 + 3x_3 + x_6 = 150, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0. \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу полученной системы ограничений:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 10 & 15 & 3 & 0 & 0 & 1 & 150 \end{pmatrix}.$$

Нет очевидного допустимого базисного решения. Для его нахождения воспользуемся методом искусственного базиса.

Составим вспомогательную задачу. Изменим первые два ограничения (третье и четвертое не создает проблем) введением искусственных переменных z_1 и z_2; получим:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + z_1 = 14, \\ x_2 - x_4 + z_2 = 4, \\ x_2 + x_5 = 5, \\ 10x_1 + 15x_2 + 3x_3 + x_6 = 150, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, z_1, z_2 \geq 0. \end{cases}$$

Тогда искусственная целевая функция примет вид:

$$L^* = -z_1 - z_2 \to \max.$$

Воспользуемся симплекс-методом для решения полученной вспомогательной задачи.

Расширенная матрица системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 10 & 15 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 150 \end{pmatrix}.$$

В качестве базисного минора возьмем ненулевой минор M_{1234}^{7856}. Тогда базисными переменными будут z_1, z_2, x_5, x_6, а свободными – x_1, x_2, x_3, x_4. Выразим из последней системы ограничений каждую базисную переменную через свободные переменные:

$$\begin{cases} z_1 = 14 - x_1 - x_2 - +x_3, \\ z_2 = 4 - x_2 + x_4, \\ x_5 = 5 - x_2, \\ x_6 = 150 - 10x_1 + 15x_2 + 3x_3. \end{cases}$$

Искусственную целевую функцию тоже выразим через свободные переменные:

$$L^* = -z_1 - z_2 = -14 + x_1 + x_2 + x_3 - 4 + x_2 - x_4 = -18 + x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4$$

или

$$L^* = -18 + x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4.$$

Тогда первым опорным решением вспомогательной задачи будет

$$(0; 0; 0; 0; 14; 4; 5; 150),$$

при котором значение искусственной целевой функции равно –18.

Для проверки первого опорного решения на оптимальность сначала перенесем в выражении искусственной целевой функции все переменные в левую часть равенства

$$L^* - x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -18$$

и составим первую симплекс-таблицу вспомогательной задачи (табл. 4.1).

Таблица 4.1 – Первая симплекс-таблица вспомогательной задачи

№ строки	Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z_1	z_2	СО
I	z_1	14	1	1	1	0	0	0	1	0	
II	z_2	4	0	1	0	–1	0	0	0	1	
III	x_5	5	0	1	0	0	1	0	0	0	
IV	x_6	150	10	15	3	0	0	1	0	0	
V	L^*	–18	–1	–2	–1	1	0	0	0	0	
VI											

Среди коэффициентов индексной строки есть отрицательные числа, значит первое опорное решение не является оптимальным, улучшим его. Среди отрицательных коэффициентов индексной строки выберем минимальное число, это –2. Тогда ключевым столбцом будет столбец таблицы 4.1, соответствующий переменной x_2. Далее составляем симплексное отношение и определяем ключевую строку и разрешающий элемент (табл. 4.2).

Таблица 4.2 – Дополненная первая симплекс-таблица вспомогательной задачи

№ строки	Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z_1	z_2	СО
I	z_1	14	1	1	1	0	0	0	1	0	14
II	z_2	4	0	1	0	–1	0	0	0	1	4
III	x_5	5	0	1	0	0	1	0	0	0	5
IV	x_6	150	10	15	3	0	0	1	0	0	10
V	L^*	–18	–1	–2	–1	1	0	0	0	0	
VI = II		4	0	1	0	–1	0	0	0	1	

Составим формулы преобразования строк для составления второй симплекс-таблицы вспомогательной задачи (в правой части каждой формулы стоят номера строк предыдущей таблицы, а в левой – следующей):

I = I – VI, II = VI, III = III – VI, IV = IV – VI · 15, V = V + VI · 2.

Получим вторую симплекс-таблицу вспомогательной задачи (табл. 4.3).

Таблица 4.3 – Вторая симплекс-таблица вспомогательной задачи

№ строки	Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z_1	z_2	СО
I	z_1	10	1	0	1	1	0	0	1	–1	
II	x_2	4	0	1	0	–1	0	0	0	1	
III	x_5	1	0	0	0	1	1	0	0	–1	
IV	x_6	90	10	0	3	15	0	1	0	–15	
V	L^*	–10	–1	0	–1	–1	0	0	0	2	
VI											

Как видно из таблицы 4.3, второе опорное решение тоже не является оптимальным для вспомогательной задачи. Поэтому продолжаем решение в соответствии с алгоритмом работы с симплекс-таблицей (табл. 4.4).

Таблица 4.4 – Дополненная вторая симплекс-таблица вспомогательной задачи

№ строки	Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z_1	z_2	СО
I	z_1	10	1	0	1	1	0	0	1	–1	10
II	x_2	4	0	1	0	–1	0	0	0	1	
III	x_5	1	0	0	0	1	1	0	0	–1	
IV	x_6	90	10	0	3	15	0	1	0	–15	30
V	L^*	–10	–1	0	–1	–1	0	0	0	2	
VI = I		10	1	0	1	1	0	0	1	–1	

Формулы преобразования строк для составления третьей симплекс-таблицы вспомогательной задачи:

I = VI, II = II, III = III, IV = IV – VI · 3, V = V + VI.

Получим третью симплекс-таблицу вспомогательной задачи (табл. 4.5).

Таблица 4.5 – Третья симплекс-таблица вспомогательной задачи

№ строки	Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z_1	z_2	СО
I	x_3	10	1	0	1	1	0	0	1	–1	
II	x_2	4	0	1	0	–1	0	0	0	1	
III	x_5	1	0	0	0	1	1	0	0	–1	
IV	x_6	60	7	0	0	12	0	1	–3	–12	
V	L^*	0	0	0	0	0	0	0	1	1	

В последней индексной строке нет отрицательных коэффициентов, значит оптимальное решение вспомогательной задачи получено и первый этап решения задачи закончен. А поскольку искусственная целевая функция L^* приняла нулевое значение и при этом значения введенных искусственных переменных z_1 и z_2 тоже стали равными нулю, то допустимое базисное решение, оптимизирующее функцию L^*, может быть использовано как начальное допустимое базисное решение для оптимизации целевой функции L_1 на втором этапе решения задачи.

Начиная с этого момента, нулевые значения z_1 и z_2 игнорируются и в таблице 4.5 игнорируются столбцы, соответствующие z_1 и z_2.

Приступим ко второму этапу решения задачи.

Базисными переменными будут x_3, x_2, x_5, x_6, а свободными – x_1, x_4. Воспользовавшись данными таблицы 4.5, выразим каждую базисную переменную через свободные переменные. Получим:

$$\begin{cases} x_3 = 10 - x_1 - x_4, \\ x_2 = 4 + x_4, \\ x_5 = 1 - x_4, \\ x_6 = 60 - 7x_1 - 12x_4. \end{cases}$$

Целевую функцию L_1 тоже выразим через свободные переменные:

$$L_1 = -25x_1 - 20x_2 - 40x_3 = -25x_1 - 20(4 + x_4) - 40(10 - x_1 - x_4) =$$
$$= -25x_1 - 80 - 20x_4 - 400 + 40x_1 + 40x_4 = 15x_1 + 20x_4 - 480$$

или

$$L_1 = 15x_1 + 20x_4 - 480.$$

Первое опорное решение основной задачи

$$(0; 4; 10; 0; 1; 60),$$

при котором значение целевой функции $L_1 = -480$.

Проверим это опорное решение на оптимальность, а в случае не оптимальности будем улучшать с помощью симплекс-таблиц. Для этого предварительно перепишем целевую функцию в виде

$$L_1 - 15x_1 - 20x_4 = -480.$$

Составим первую симплекс-таблицу основной задачи (табл. 4.6).

Таблица 4.6 – Первая симплекс-таблица основной задачи

№ строки	Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	СО
I	x_3	10	1	0	1	1	0	0	
II	x_2	4	0	1	0	–1	0	0	
III	x_5	1	0	0	0	1	1	0	
IV	x_6	60	7	0	0	12	0	1	
V	L_1	–480	–15	0	0	–20	0	0	
VI									

Первое опорное решение не является оптимальным. Поэтому будем переходить к следующему опорному решению, при котором значение целевой функции L_1 не меньше.

Поскольку далее будут повторяться шаги алгоритма работы с симплекс таблицей, то опустим подробные объяснения, и будем только приводить формулы преобразования строк для составления следующих симплекс-таблиц и сами таблицы, пока не будет получено оптимальное решение.

Таблица 4.7 – Дополненная первая симплекс-таблица основной задачи

№ строки	Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	СО
I	x_3	10	1	0	1	1	0	0	10
II	x_2	4	0	1	0	–1	0	0	
III	x_5	1	0	0	0	1	1	0	1
IV	x_6	60	7	0	0	12	0	1	5
V	L_1	–480	–15	0	0	–20	0	0	
VI = III		1	0	0	0	1	1	0	

Формулы преобразования строк для составления второй симплекс-таблицы основной задачи:

I = I – VI, II = II + VI, III = VI, IV = IV – VI · 12, V = V + VI · 20.

Получим вторую симплекс-таблицу основной задачи (табл. 4.8).

Таблица 4.8 – Вторая симплекс-таблица основной задачи с дополнениями

№ строки	Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	СО
I	x_3	9	1	0	1	0	–1	0	9
II	x_2	5	0	1	0	0	1	0	
III	x_4	1	0	0	0	1	1	0	
IV	x_6	48	7	0	0	0	–12	1	6 6/7
V	L_1	–460	–15	0	0	0	20	0	
VI = IV : 7		6 6/7	1	0	0	0	–1 5/7	1/7	

Формулы преобразования строк для составления третьей симплекс-таблицы основной задачи:

I = I – VI, II = II, III = III, IV = VI, V = V + VI · 15.

Получим третью симплекс-таблицу основной задачи (табл. 4.9).

Таблица 4.9 – Третья симплекс-таблица основной задачи с дополнениями

№ строки	Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	СО
I	x_3	2 1/7	0	0	1	0	5/7	–1/7	3
II	x_2	5	0	1	0	0	1	0	5
III	x_4	1	0	0	0	1	1	0	1
IV	x_1	6 6/7	1	0	0	0	–1 5/7	1/7	
V	L_1	–357 1/7	0	0	0	0	–5 5/7	2 1/7	
VI = III		1	0	0	0	1	1	0	

Формулы преобразования строк для составления четвертой симплекс-таблицы основной задачи:

I = I – VI · (5/7), II = II – VI, III = VI, IV = IV + VI · (1 5/7), V = V + VI · (5 5/7).

Получим четвертую симплекс-таблицу основной задачи (табл. 4.10).

Таблица 4.10 – Четвертая симплекс-таблица основной задачи

№ строки	Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	СО
I	x_3	1 3/7	0	0	1	–5/7	0	–1/7	
II	x_2	4	0	1	0	–1	0	0	
III	x_5	1	0	0	0	1	1	0	
IV	x_1	8 4/7	1	0	0	1 5/7	0	1/7	
V	L_1	–351 3/7	0	0	0	5 5/7	0	2 1/7	

В последней индексной строке нет отрицательных коэффициентов (кроме свободного члена), значит оптимальное решение получено. Запишем ответ.

Для задачи в каноническом виде:

$$L_{1\,\max} = L_1\left(8\tfrac{4}{7}; 4; 1\tfrac{3}{7}; 0; 1; 0\right) = -351\tfrac{3}{7}.$$

Для исходной задачи (отбросим значения балансовых переменных):

$$L_{\min} = L\left(8\tfrac{4}{7}; 4; 1\tfrac{3}{7}\right) = 351\tfrac{3}{7}.$$

Таким образом, для конструирования наиболее дешевого кузова необходимо использовать $8\tfrac{4}{7}$ м^2 листового металла, 4 м^2 стекла и $1\tfrac{3}{7}$ м^2 пластмассы. При этом его стоимость составит $351\tfrac{3}{7}$ ден.ед.

Задания для решения на практическом занятии

1. Хлебозавод может выпекать хлеб в любой из трех видов печей P_1, P_2 и P_3. Себестоимость и трудоемкость выпечки одного центнера хлеба в каждом виде печей представлены в таблице 4.11. Сколько центнеров хлеба необходимо выпекать в каждой печи, чтобы его суммарная себестоимость была минимальной при условии, что трудовые ресурсы ограничены 56 н/ч, а общее количество выпекаемого хлеба должно быть не меньше 60 ц?

Таблица 4.11 – Данные к заданию 1

Вид печи	P_1	P_2	P_3
Трудоемкость, н/ч	1	0,9	1,2
Себестоимость, ден. ед.	21	19	22

2. Предприятие рекламирует свою продукцию с помощью четырех источников массовой информации: телевидение, интернет, газеты и афиши. Анализ рекламной деятельности в прошлом показал, что эти средства приводят к увеличению прибыли соответственно на 10, 3, 7 и 4 ден. ед. в расчете на 1 ден. ед., затраченную на рекламу. Распределение рекламного бюджета подчинено следующим ограничениям:

а) полный бюджет не должен превосходить 500000 ден. ед.;

б) следует расходовать не более 30 % бюджета на телевидение и не менее 20 % бюджета на афиши;

в) на Интернет следует расходовать по крайней мере половину того, что планируется на телевидение.

Как следует предприятию организовать рекламу, чтобы получить максимальную прибыль?

3. Решить следующие задачи ЛП, при необходимости используя метод искусственного базиса.

3.1 $L = 8x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 5, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -3, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

3.2 $L = 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \ge 12, \\ x_1 - x_2 + x_3 \ge -2, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 24, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

3.3 $L = x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + 3x_4 = -1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

3.4 $L = 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 3, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

Задания для самостоятельного решения

1. Решить следующие задачи ЛП, при необходимости используя метод искусственного базиса.

1.1 а) $L = -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 7, \\ -4x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 6, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

б) $L = x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 9, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 6, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

1.2 а) $L = 4x_1 + x_3 + 3x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_4 = 7, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 7, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

б) $L = 2x_1 + x_2 - x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 7, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

1.3 а) $L = -4x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 7, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

б) $L = x_1 - x_2 + x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 6, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 \le 24, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

1.4 а) $L = x_1 - 2x_2 + 2x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} -2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 8, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

б) $L = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \ge 11, \\ x_1 - 6x_2 - 3x_3 = -23, \\ x_1 - x_2 + x_3 \le 2, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

1.5 а) $L = x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 \to \min$,

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 2, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

б) $L = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \max$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 2, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 \geq -4, \\ x_1 + 2x_3 = 2, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

1.6 а) $L = 5x_1 - 2x_2 + x_4 \to \max$,

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - 3x_4 = 3, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

б) $L = -2x_1 + 8x_2 + 3x_3 \to \min$,

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 \geq 12, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \geq -8, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

1.7 а) $L = x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 \to \max$,

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 2x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 5, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

б) $L = 6x_1 + 7x_2 + 9x_3 \to \min$,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 5, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ -x_1 - x_2 + x_3 \geq -2, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

1.8 а) $L = 3x_1 - 4x_2 - x_3 + 2x_4 \to \max$,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 8, \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 5, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

б) $L = x_1 + 3x_2 + x_3 \to \min$,

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \geq -6, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

1.9 а) $L = x_1 + 4x_3 - 2x_4 \to \min$,

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 6, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

б) $L = x_1 - 8x_2 - 3x_3 \to \max$,

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \leq -4, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

1.10 а) $L = x_1 - 2x_2 + 2x_3 \to \min$,

$$\begin{cases} -2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 8, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

б) $L = x_1 + 4x_2 + 3x_3 \to \max$,

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 18, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 10, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Акулич, И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах : учебное пособие для студентов экономических специальностей вузов / И. Л. Акулич. – Минск : Вышэйшая школа, 1986. – 319 с.
2. Белько, И. В. Теория вероятностей, математическая статистика, математическое программирование : учебное пособие / И. В. Белько, И. М. Морозова, Е. А. Криштапович. – Минск : Новое знание ; Москва : ИНФРА-М, 2016. – 299 с.
3. Белько, И. В. Эконометрика. Практикум / И. В. Белько, Е. А. Криштапович. – Минск : Издательство Гревцова, 2011. – 221 с.
4. Карманов, В. Г. Математическое программирование : учебное пособие / В. Г. Карманов. – 5-е изд. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 264 с.
5. Кузнецов, А. В. Высшая математика. Математическое программирование : ученое пособие / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод ; под общ. ред. А. В. Кузнецова. – 2-е изд. – Минск : Вышэйшая школа, 2001. – 351 с.
6. Кузнецов, А. В. Руководство к решению задач по математическому программированию : учебное пособие / А. В. Кузнецов, Н. И. Холод, Л. С. Костевич ; под общ. ред. А. В. Кузнецова. – 2-е изд. – Минск : Вышэйшая школа, 2001. – 448 с.

Учебное издание

Высшая математика (Математика).
Линейное программирование.

Часть 1

Практикум

Составители:
Никонова Татьяна Викторовна
Рубаник Оксана Евгеньевна

Редактор *Р.А. Никифорова*
Корректор *А.С. Прокопюк*
Компьютерная верстка *О.Е. Рубаник*

Подписано к печати 02.10.2025. Формат 60x90 $^{1}/_{16}$. Усл. печ. листов 2,6.
Уч.-изд. листов 3,3.Тираж 60 экз. Заказ № 197.

Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет»
210038, г. Витебск, Московский пр., 72.
Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Витебский государственный технологический университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/172 от 12 февраля 2014 г.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 3/1497 от 30 мая 2017 г.