

УДК 531.8

А. В. ЛОКТИОНОВ, А. А. СИДОРОВИЧ

Витебский государственный технологический университет, Витебск, Беларусь

КИНЕМАТИЧЕСКИЕ И ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ИСПОЛНИТЕЛЬНОГО МЕХАНИЗМА В СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Получены расчетные формулы и представлен вывод дифференциальных уравнений движения робота-манипулятора, работающего в сферической системе координат. Предложены аналитические зависимости для расчета скорости центра схвата трёхзвенового робота с тремя степенями подвижности. Приведен вывод дифференциальных уравнений движения центра схвата пространственного исполнительного механизма в сферических координатах.

Ключевые слова: кинематика, исполнительный механизм, дифференциальные уравнения движения, сферические координаты.

Введение. Механическая система манипулятора представляет собой пространственный механизм в виде кинематических цепей из звеньев, образующих кинематические пары с угловым или поступательным относительным движением. Степени подвижности манипулятора делятся на переносные и ориентирующие. Переносные служат для перемещения рабочего органа в рабочей зоне манипулятора, а ориентирующие – для его угловой ориентации. Минимально необходимое число переносных степеней подвижности для перемещения рабочего органа в пространстве рабочей зоны равно трем. Ориентирующие степени подвижности реализуются кинематическими парами с угловым перемещением, обеспечивающими поворот рабочего органа манипулятора относительно его продольной и двух взаимно перпендикулярных осей. Их максимально необходимое число равно трем.

Манипуляторы, работающие в прямоугольной системе координат, имеют рабочую зону в форме параллелепипеда и реализуют только поступательные перемещения, поэтому наиболее удобны для выполнения прямолинейных движений. В манипуляторах, работающих в цилиндрической системе координат, наряду с поступательными перемещениями осуществляется одно угловое. В сферической системе координат осуществляются два угловых и поступательное перемещение рабочего органа.

Для оценки технических возможностей промышленных роботов-манипуляторов [1, 2] необходимо знать их кинематические характеристики, которые требуются при прочностных расчетах, конструировании звеньев и оценке динамических свойств механизма [2–4]. Существуют различные методы определения геометрических, кинематических и силовых параметров исполнительных механизмов роботов-манипуляторов. Наиболее простой векторный метод расчета

целесообразно применять в случаях, при которых звенья расположены в одной плоскости [1, 5, 6]. Он предполагает определение проекций звеньев, а затем – векторов скорости и ускорения на неподвижные оси координат. Однако применительно к двухзвенному исполнительному механизму с тремя степенями подвижности [5, 6] этот метод достаточно сложен и поэтому для пространственных схем размещения звеньев роботов-манипуляторов не используется. Для составления дифференциальных уравнений движения пространственных исполнительных механизмов требуется знать скорости центра схвата робота в подвижной и неподвижной системах координат [1, 6–9]. В статьях [10, 11] изложен расчет кинематических параметров и дифференциального уравнения движения пространственного исполнительного механизма в декартовых и цилиндрических координатах. В данной работе рассмотрены манипуляторы, работающие в сферической системе координат [5, 7].

Расчет кинематических параметров в сферических координатах. Аналитические исследования по расчету кинематических параметров точки M (рисунок 1) матричным методом выполнены для случая, когда она совпадает с началом координат $x_R y_\varphi z_\theta$. В общем случае, который здесь не рассматривается, координаты x_R, y_φ, z_θ не равны нулю.

В прямоугольной неподвижной системе координат xuz положение вектора R (рисунок 1) определяется текущими координатами x, y, z точки M . В сферической подвижной системе координат положение точки M определяется расстоянием R , углом φ и углом θ . Введём также подвижные системы координат $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$, начало которых находится в точке O . Указанные на рисунке 1, a, b, v системы координат составляют между собой углы, косинусы которых образуют матрицы A_φ, A_θ . Проекции абсолютной скорости v и ускорения a точки M определены как на неподвижные оси координат xuz , так и на подвижные сферические оси координат x_r, y_φ, z_θ (R, φ, θ).

Координаты точки M в неподвижной системе xuz в рассматриваемом случае выражается через координаты этой точки в системе $x_R y_\varphi z_\theta$ следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A_\varphi A_\theta \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + A_\varphi A_\theta \begin{pmatrix} x_R \\ y_\varphi \\ z_\theta \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Соответственно вектор скорости \vec{v} точки M в системе xuz определяется дифференцированием координат

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = (\dot{A}_\varphi A_\theta \dot{\varphi} + A_\varphi \dot{A}_\theta \dot{\theta}) \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + A_\varphi A_\theta \begin{pmatrix} \dot{R} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

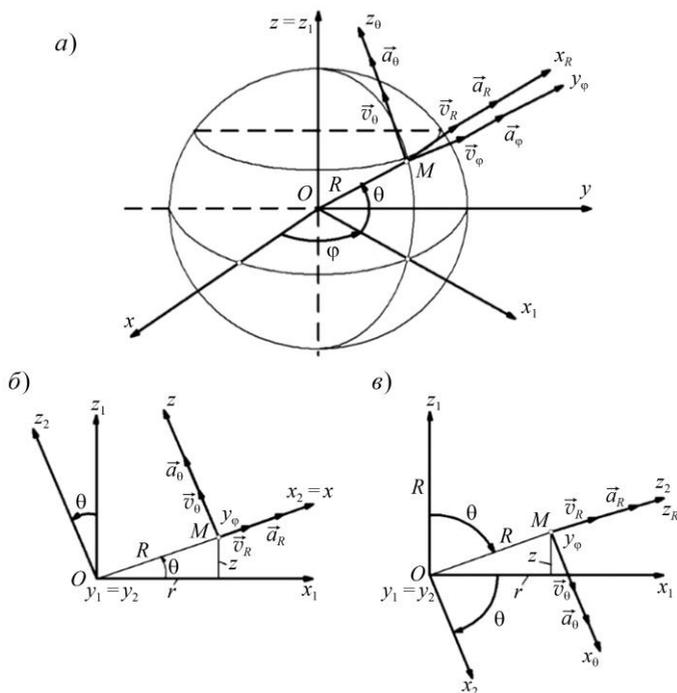


Рисунок 1 – Схема для случая сферических координат:
a – аксонометрия; *б*, *в* – проекции

Отсюда проекции вектора скорости точки *M* на неподвижные оси координат *xuz* имеют вид

$$\begin{aligned}
 \dot{x} = v_x &= \dot{R} \cos \varphi \cos \theta - R \dot{\varphi} \cos \theta \sin \varphi - R \dot{\theta} \cos \varphi \sin \theta; \\
 \dot{y} = v_y &= \dot{R} \sin \varphi \cos \theta + R \dot{\varphi} \cos \theta \cos \varphi - R \dot{\theta} \sin \varphi \sin \theta; \\
 \dot{z} = v_z &= \dot{R} \sin \theta + R \dot{\theta} \cos \theta.
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Соответственно модуль скорости точки *M*

$$v = \sqrt{\dot{R}^2 + R^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta + R^2 \dot{\theta}^2}.
 \tag{4}$$

В свою очередь вектор скорости \vec{v}_M точки *M* в системе $x_R y_\varphi z_\theta$ (*R*, φ , θ)

$$\vec{v}_M = A^T \vec{v},
 \tag{5}$$

где A^T – транспонированная матрица, равная произведению транспонированных матриц-сомножителей, взятых в обратном порядке

$$A^T = A_0^T A_\varphi^T.$$

Векторы \vec{v} и \vec{v}_M в равенствах (2) и (5) представляют разложение одного и того же вектора \vec{v} по разным базисам систем координат xuz и $x_Ry_\varphi z_\theta$. С учётом (2) равенство (5) будет иметь вид

$$\vec{v}_M = \left(A^T \dot{A}_\varphi A_0 \dot{\varphi} + A^T \dot{A}_\theta \dot{\theta} \right) \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{R} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Отсюда проекции вектора скорости точки M на подвижные сферические оси координат $x_Ry_\varphi z_\theta$:

$$\dot{x}_R = v_R = \dot{R}; \quad \dot{y}_\varphi = v_y = R\dot{\varphi} \cos \theta; \quad \dot{z}_\theta = v_\theta = R\dot{\theta}. \quad (7)$$

Определим матричным методом ускорение точки M . Вектор ускорения \vec{a} точки M в системе xuz определится дифференцированием равенства (2)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \left[\left(\ddot{A}_\varphi \dot{\varphi}^2 + \dot{A}_\varphi \ddot{\varphi} \right) A_0 + 2\dot{A}_\varphi \dot{A}_\theta \dot{\varphi} \dot{\theta} + A_\varphi \left(\ddot{A}_\theta \dot{\theta}^2 + \dot{A}_\theta \ddot{\theta} \right) \right] \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \left(\dot{A}_\varphi A_0 \dot{\varphi} + A_\varphi \dot{A}_\theta \dot{\theta} \right) \begin{pmatrix} \dot{R} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + A_\varphi A_0 \begin{pmatrix} \dot{R} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Отсюда его проекции на неподвижные оси системы координат xuz :

$$\begin{aligned} a_x &= \ddot{x}_R \cos \varphi \cos \theta - \ddot{y}_\varphi \sin \varphi - \ddot{z}_\theta \cos \varphi \sin \theta; \\ a_y &= \ddot{x}_R \sin \varphi \cos \theta + \ddot{y}_\varphi \cos \varphi - \ddot{z}_\theta \sin \varphi \sin \theta; \\ a_z &= \ddot{x}_R \sin \theta + \ddot{z}_\theta \cos \theta. \end{aligned} \quad (9)$$

Модуль ускорения точки M

$$a = \sqrt{\ddot{x}_R^2 + \ddot{y}_\varphi^2 + \ddot{z}_\theta^2} = \sqrt{a_R^2 + a_\varphi^2 + a_\theta^2}.$$

Выражения проекций вектора ускорения на подвижные сферические оси координат $x_Ry_\varphi z_\theta$ (см. рисунок 1, a , δ) получаем, используя соотношение

$$\vec{a}_M = A^T \vec{a}. \quad (10)$$

С учётом (8) из равенства (10) находим

$$\begin{aligned} \ddot{x}_R &= a_R = \ddot{R} - R\dot{\theta}^2 - R\dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta; \\ \ddot{y}_\varphi &= a_\varphi = R\ddot{\varphi} \cos \theta + 2(\dot{R} \cos \theta - R\dot{\theta} \sin \theta)\dot{\varphi}; \\ \ddot{z}_\theta &= a_\theta = R\ddot{\theta} + R\dot{\varphi}^2 \cos \theta \sin \theta + 2\dot{R}\dot{\theta}. \end{aligned} \quad (11)$$

В тех случаях, когда ось z является осью симметрии, угол θ удобно отсчитывать от положительного направления оси z (рисунок 1, в). В этом случае равенство (1) имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A_\varphi A_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix} + A_\varphi A_\theta \begin{pmatrix} x_\varphi \\ y_\varphi \\ z_R \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Матрица A_φ сохраняется. Матрица A_θ по рисунку 1, в получается транспонированием матрицы A_θ , соответствующей рисунку 1, б. Следовательно, формулы для расчёта скорости и ускорения имеют вид (2), (6), (8), (10). В соответствии с (12) в них видоизменяется запись столбцевых матриц. Формулы (3), (4), (7), (9), (11) в этом случае приобретают вид:

$$\dot{x} = v_x = R\dot{\theta} \cos \varphi \cos \theta - R\dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{R} \cos \varphi \sin \theta;$$

$$\dot{y} = v_y = R\dot{\theta} \sin \varphi \cos \theta + R\dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{R} \sin \varphi \sin \theta;$$

$$\dot{z} = v_z = -R\dot{\theta} \sin \theta + \dot{R} \cos \theta;$$

$$v = \sqrt{R^2 \dot{\theta}^2 + R^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{R}^2};$$

$$\dot{x}_\theta = v_\theta = R\dot{\theta}; \quad \dot{y}_\varphi = v_\varphi = R\dot{\varphi} \sin \theta; \quad \dot{z}_R = v_R = \dot{R}.$$

$$a_x = \ddot{x}_\theta \cos \varphi \cos \theta - \ddot{y}_\varphi \sin \varphi + \ddot{z}_R \cos \varphi \sin \theta;$$

$$a_y = \ddot{x}_\theta \sin \varphi \cos \theta + \ddot{y}_\varphi \cos \varphi + \ddot{z}_R \sin \varphi \sin \theta;$$

$$a_z = -\ddot{x}_\theta \sin \theta + \ddot{z}_R \cos \theta.$$

$$\ddot{x}_\theta = a_\theta = R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta} - R\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta;$$

$$\ddot{y}_\varphi = a_\varphi = R\ddot{\varphi} \sin \theta + 2(\dot{R} \sin \theta - R\dot{\theta} \cos \theta)\dot{\varphi};$$

$$\ddot{z}_R = a_R = \ddot{R} - R\dot{\theta}^2 - R\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta.$$

Проекции векторов скорости и ускорения показаны на рисунке 1, в. Модуль ускорения точки M

$$a = \sqrt{\ddot{x}_\theta^2 + \ddot{y}_\varphi^2 + \ddot{z}_R^2} = \sqrt{a_\theta^2 + a_\varphi^2 + a_R^2}.$$

Таким образом, получены расчётные формулы, позволяющие определять скорости и ускорения для точек роботов-манипуляторов, работающих в сферической системе координат [1, 2, 5].

Динамические уравнения движения робота-манипулятора в сферической системе координат. Вертикальная колонна 1, несущая руку робота манипулятора (рисунок 2), поворачивается на угол φ . Рука со схватом поворачивается на угол θ и выдвигается на расстояние r . Момент инерции вертикальной колонны

относительно оси вращения J_1 ; звенья 2 и 3 считаем тонкими однородными стержнями длины l_2 и l_3 массы m_2 и m_3 ; масса переносимого груза m . К вертикальной оси вращения приложен момент M_ϕ ; к оси поворота второго звена – момент M_θ и движущая сила F_{23} , создаваемая приводом в поступательной паре. Составим дифференциальные уравнения движения механизма.

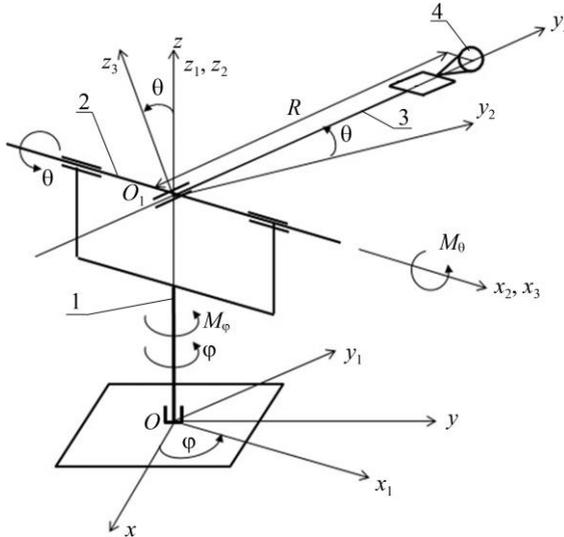


Рисунок 2 – Расчетная схема робота-манипулятора в сферической системе координат

Механизм робота-манипулятора имеет три степени свободы. За обобщенные координаты принимаем угол поворота ϕ вертикальной колонны 1, угол поворота θ руки со схватом и перемещение r руки со схватом.

Кинетическая энергия механизма определяется суммой кинетических энергий колонны 1, звена 2, выдвигающейся руки 3 со схватом и переносимого груза 4:

– для колонны 1

$$T_1 = \frac{J_1 \dot{\phi}^2}{2};$$

– звена 2

$$T_2 = \frac{J_2 \dot{\phi}^2}{2} = \frac{m_2 l_2^2}{24} \dot{\phi}^2;$$

– руки 3 со схватом

$$T_3 = \frac{m_3}{6} (r^2 + r l_3 + l_3^2) (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2) + \frac{m_3 \dot{r}^2}{2};$$

– переносимого груза 4

$$T_4 = \frac{m}{2} v_4^2,$$

где v_4 – скорость центра схвата.

Скорость центра схвата робота определим двумя способами: координатным и матричным методом.

Координатный способ. При данном способе движение центра схвата определяется декартовыми координатами, которые описываются уравнениями

$$x = -r \cos \theta \sin \varphi, \quad y = r \cos \theta \cos \varphi, \quad z = r \sin \theta.$$

Тогда проекции скорости центра схвата на оси x, y, z :

$$v_x = \dot{x} = -\dot{r} \cos \theta \sin \varphi + r \dot{\theta} \sin \theta \sin \varphi - r \dot{\varphi} \cos \theta \cos \varphi;$$

$$v_y = \dot{y} = \dot{r} \cos \theta \cos \varphi - r \dot{\theta} \sin \theta \cos \varphi - r \dot{\varphi} \cos \theta \sin \varphi;$$

$$v_z = \dot{z} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta.$$

Следовательно,

$$v_4^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta.$$

Матричный метод. Координаты центра схвата 4 в неподвижной системе $x_{02}y_{02}z_{02}$ выражается через координаты центра схвата в системе $x_3y_3z_3$ следующим образом (см. рисунок 3):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A_\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + A_\varphi A_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + A_\varphi A_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $a = OO_1 = \text{const}$.

Дифференцированием текущих координат определим вектор скорости \bar{v}_4 в системе $x_{02}y_{02}z_{02}$

$$\bar{v}_4 = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \dot{A}_\varphi \dot{\varphi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + \dot{A}_\varphi \dot{\varphi} A_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + \dot{A}_\varphi \dot{\varphi} A_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix} + A_\varphi \dot{A}_\theta \dot{\theta} \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix} + A_\varphi A_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{r} \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$

$$\dot{A}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi & -\cos \varphi & 0 \\ \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{A}_\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \theta & -\cos \theta \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \end{pmatrix},$$

$$\dot{A}_\varphi \dot{\varphi} A_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\dot{\varphi} \cos \varphi \cos \theta \\ -r\dot{\varphi} \sin \varphi \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}; \quad A_\varphi \dot{A}_\theta \dot{\theta} \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\dot{\theta} \sin \varphi \sin \theta \\ -r\dot{\theta} \cos \varphi \sin \theta \\ r\dot{\theta} \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$A_\varphi A_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{r} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{r} \sin \varphi \cos \theta \\ \dot{r} \cos \varphi \cos \theta \\ \dot{r} \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Проекции скорости \bar{v}_4 центра схвата на оси x, y, z определим из выражений

$$\dot{x} = -r\dot{\varphi} \cos \varphi \cos \theta + r\dot{\theta} \sin \varphi \sin \theta - \dot{r} \sin \varphi \cos \theta,$$

$$\dot{y} = -r\dot{\varphi} \sin \varphi \cos \theta - r\dot{\theta} \cos \varphi \sin \theta + \dot{r} \cos \varphi \cos \theta,$$

$$\dot{z} = r\dot{\theta} \cos \theta + \dot{r} \sin \theta.$$

Тогда $v_4^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta$.

Кинетическую энергию груза 4 определим по формуле

$$T_4 = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta).$$

Следовательно, кинетическая энергия механизма

$$T = \frac{1}{2} \left[J_1 + \frac{m_2 l_2^2}{12} + \frac{m_3}{3} (r^2 + r l_3 + l_3^2) + m r^2 \cos^2 \theta \right] \dot{\varphi}^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\frac{m_3}{3} (r^2 + r l_3 + l_3^2) + m r^2 \right] \dot{\theta}^2 + \frac{m_3 + m}{2} \dot{r}^2.$$

Вычисляя частные производные от кинетической энергии T по обобщенным скоростям $\dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{r}$ и обобщенным координатам θ и r , получим

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \left[J_1 + \frac{m_2 l_2^2}{12} + \frac{m_3}{3} (r^2 + r l_3 + l_3^2) + m r^2 \cos^2 \theta \right] \dot{\varphi},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \left[\frac{m_3}{3} (r^2 + r l_3 + l_3^2) + m r^2 \right] \dot{\theta}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = (m_3 + m) \dot{r},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = -m r^2 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{m_3}{6} (2r + l_3) (\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2) + m r (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta).$$

Сообщая механизму последовательно независимые обобщенные возможные перемещения $\delta\varphi, \delta\theta, \delta r$, определим обобщенные силы

$$Q_\varphi = M_\varphi, \quad Q_\theta = M_\theta - (m_3 + m)rg \cos \theta, \quad Q_r = F_{23} - (m_3 + m)g \sin \theta.$$

Подставим полученные выражения производных и обобщенных сил в уравнения Лагранжа II рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi;$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta;$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial T}{\partial r} = Q_r;$$

$$\frac{d}{dt} \left[J_1 + \frac{m_2 l_2^2}{12} + \frac{m_3}{3} (r^2 + r l_3 + l_3^2) + m r^2 \cos^2 \theta \right] \dot{\varphi}^2 = M_\varphi;$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{m_3}{3} (r^2 + r l_3 + l_3^2) + m r^2 \right] \dot{\theta} + m r^2 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta = M_\theta - (m_3 + m)rg \cos \theta;$$

$$(m_3 + m)\ddot{r} - \frac{m_3}{6} (2r + l_3)(\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2) - m r (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta) = F_{23} - (m_3 + m)g \sin \theta.$$

Таким образом, получены дифференциальные уравнения движения механизма робота-манипулятора.

Выводы.

1 Рассмотрены методы расчета кинематических параметров исполнительных механизмов. Получены расчетные формулы для нахождения кинематических характеристик пространственных исполнительных механизмов в сферических координатах.

2 Представлены расчетные формулы для составления дифференциального уравнения движения робота-манипулятора, работающего в сферической системе координат. Получены дифференциальные уравнения движения центра схвата робота пространственного исполнительного механизма.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Фролов, К. В.** Механика промышленных роботов / К. В. Фролов, Е. И. Воробьев // Кинематика и динамика. Ч. 1. – М. : Высш. шк., 1988. – 304 с.

2 **Козырев, Ю. Г.** Промышленные роботы : справочник / Ю. Г. Козырев. – М. : Машиностроение, 1988. – 392 с.

3 Пол, Р. Моделирование, планирование траекторий и управление движением робота-манипулятора / Р. Пол. – М. : Наука, 1976. – 104 с.

4 Чернышева, И. Н. Силовой расчет, уравнивание, проектирование механизмов и механика манипуляторов : учеб. пособие для студ. вузов / И. Н. Чернышева, А. К. Мусагов, Н. А. Глухов. – М. : МГТУ, 1990. – 80 с.

5 Локтионов, А. В. Оценка методов расчета кинематических параметров исполнительного механизма / А. В. Локтионов, А. В. Гусаков // Современные методы проектирования машин : респ. межведомств. сб. науч. тр. – Вып. 2 : в 7 т. / под общ. ред. П. А. Витязя. – Т. 2: Качество изделий машиностроения. Проектирование материалов и конструкций. – Минск : УП «Технопринт», 2004. – С. 132–136.

6 Локтионов, А. В. Расчет кинематических параметров двухзвенного механизма с тремя степенями подвижности / А. В. Локтионов, А. В. Гусаков // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия: Фундаментальные науки. – 2004. – № 4. – С. 99–102.

7 Zhang, Y. Vibration control for a nonlinear three-dimensional flexible manipulator trajectory tracking / Y. Zhang, J. Liu, W. He // International Journal of Control. – 2016. – Vol. 89, is. 8. – P. 1641–1663.

8 Siciliano, B. The Tricept robot: Inverse kinematics, manipulability analysis and closed-loop direct kinematics algorithm / B. Siciliano // Robotica. – 1999. – Vol. 17, is. 4. – P. 437–445.

9 Локтионов, А. В. Расчет кинематических параметров пространственных исполнительных механизмов / А. В. Локтионов // Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки. – 2014. – Вып. 8. – С. 106–120.

10 Локтионов, А. В. Расчет кинематических параметров и дифференциального уравнения движения пространственного исполнительного механизма в декартовых координатах / А. В. Локтионов // Горная механика и машиностроение. – 2019. – № 2. – С. 42–46.

11 Локтионов, А. В. Кинематический и динамический расчет пространственного исполнительного механизма / А. В. Локтионов // Горная механика и машиностроение. – 2019. – № 4. – С. 35–41.

A. V. LOKTIONOV, A. A. SIDOROVICH

Vitebsk State Technological University, Vitebsk, Belarus

KINEMATIC AND DYNAMIC MOTION EQUATIONS FOR A SPATIAL EXECUTIVE MECHANISM IN SPHERICAL COORDINATES

The calculation formulas are obtained and the derivation of differential equations of motion of a robotic manipulator operating in a spherical coordinate system is presented. The analytical dependencies are proposed for calculating the velocity of the gripping center of a three-link robot with three degrees of mobility. Differential equations of spatial actuator gripping center motion in spherical coordinates are obtained.

Keywords: kinematics, actuator, differential equations of motion, spherical coordinates.

Получено 08.07.2020