УДК 512.542

ИНВАРИАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА КАК ПОЛНЫЙ КЛАСС СОПРЯЖЁННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Коваленко А. В., ст. преп., Салманович С. И., студ., Мицкевич К. А., студ.

Витебский государственный технологический университет, г. Витебск, Республика Беларусь

Реферат. *В статье рассмотрены свойства инвариантных множеств бинарного отношения сопряжённости групп. Проведено исследование инвариантных множеств конечных групп. Построена математическая модель инвариантной группы, состоящей из классов сопряжённых подгрупп. С использованием математической модели проведено исследование инвариантных множеств конечных групп.*

Ключевые слова: группы, подгруппы, сопряжённость групп, инвариантность групп, сопряжённые множества, пересечение подгрупп, объединение классов.

Одним из направлений в теории групп является исследование класса групп, которые обладают тем или иным свойством. В данной статье рассматриваются инвариантные множества конечных групп на основе их сопряжённости. Инвариантные группы широко применяются на практике. Они используются в теории графов, математической логике, а также играют большую роль в алгебраических системах. Поэтому возникает необходимость исследовать свойства инвариантных групп.

Рассмотрим непустое множество M группы G. Множество M является инвариантным, если для любого элемента x из группы G, справедливо равенство $x^{-1}Mx = M$, то есть это такое множество, которое совпадает со всеми своими сопряжёнными множествами. Равенства $x^{-1}Mx = M$ и $Mx = xM$ являются эквивалентными. Поэтому множество M элементов группы G является инвариантным, если для любого элемента x из группы G, справедливо равенство $Mx = xM$, то есть это множество перестановочно с любым элементом группы G.

Пусть множество M состоит из одного элемента, то есть $M = \{a\}$. Элемент a является инвариантным в группе G, если для любого элемента x из группы G, справедливо равенство $x^{-1}ax = a$ или $ax = xa$, то есть он перестановочен с любым элементом группы G. Такой элемент хотя бы один существует, это – 1.

Покажем, что непустое множество M является инвариантным тогда и только тогда, когда оно является либо полным классом сопряжённых элементов, либо объединением некоторого числа классов сопряжённых элементов.

Из данного утверждения вытекает следствие: подгруппа H группы G инвариантна в группе G тогда и только тогда, когда для любого x из группы G и любого элемента h из подгруппы H имеет место включение: $x^{-1}hx \in H$.

Предположим, что множество M является инвариантным множеством элементов группы G. Тогда справедливо равенство $x^{-1}Mx = M$, для любого элемента x группы G. Выбираем произвольный элемент m из множества M. Следовательно, $x^{-1}mx = m_1 \in x^{-1}Mx = M$. Отсюда все элементы группы G, сопряжённые с элементом m, принадлежат M, а это означает, что M является либо классом сопряжённых элементов, либо объединением нескольких классов.

Рассмотрим случай, когда M является полным классом сопряжённых элементов и докажем, что M – инвариантное множество.

Выбираем произвольный элемент m из множества M, тогда:

$$\left.\begin{array}{l} x_1^{-1}mx_1 \\ x_2^{-1}mx_2 \\ \dots\dots\dots \\ x_i^{-1}mx_i \\ \dots\dots\dots \end{array}\right\} \qquad (1)$$

где $x_1, x_2, ..., x_i, ...$ – все элементы группы G, а (1) – множество элементов, которое сопряжено с M, то есть множество (1) совпадает с самим множеством M. Докажем, что $x^{-1}Mx = M$, для любого элемента x группы G. Протрансформируем элементы множества (1):

$$\left.\begin{array}{l} x^{-1}x_1^{-1}mx_1x \\ x^{-1}x_2^{-1}mx_2x \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x^{-1}x_i^{-1}mx_ix \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\}$$

В результате получили множество $x^{-1}Mx$, то есть множество, сопряжённое с множеством M. Полученное множество можно записать в виде:

$$\left.\begin{array}{l} (x_1x)^{-1}m(x_1x) \\ (x_2x)^{-1}m(x_2x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (x_ix)^{-1}m(x_ix) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Известно, что $Gx = xG = G$, но тогда элементы $x_1x, x_2x, ..., x_ix, ...$ являются элементами группы G. Учитывая совокупности (1) и (2) мы показали, что $x^{-1}Mx = M$, то есть доказано, что если M состоит из одного класса сопряжённых элементов, то оно является инвариантным множеством.

Предположим теперь, что множество M является объединением нескольких классов сопряжённых элементов, то есть $M = C_1 + C_2 + ... + C_i + ...$ где C_i – класс сопряжённых элементов. Протрансформируем обе части равенства произвольным элементом x из группы G: $x^{-1}Mx = x^{-1}C_1x + x^{-1}C_2x + ... + x^{-1}C_ix + ... = C_1 + C_2 + ... + C_i + ... = M$. Таким образом, из равенства $x^{-1}Mx = M$ следует, что множество M, которое состоит из объединения классов сопряжённых элементов, является инвариантным множеством.

Покажем теперь, что пересечение подгрупп, которые составляют один или несколько классов сопряжённых подгрупп, является инвариантной подгруппой.

Пусть задано некоторое множество подгрупп $\{A_i\}, i \in I$ группы G, которое составляет один или несколько классов сопряжённых подгрупп. Это означает, что справедливо включение $x^{-1}A_ix \in \{A_i\}$, для любого элемента x группы G.

Рассмотрим пересечение всех подгрупп, то есть подгруппу $P = \bigcap_{i \in I} A_i$.

Протрансформируем подгруппу P произвольным элементом x группы G:

$$x^{-1}Px = x^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)x = \bigcap_{i\in I} x^{-1}A_i x. \quad (3)$$

Пусть $x^{-1}px \in x^{-1}Px$, причём $p \in A_i$. Тогда справедливо включение $x^{-1}px \in x^{-1}A_i x$, а так как мы рассматриваем класс или объединение классов сопряжённых подгрупп, то:

$$x^{-1}Px \subseteq \bigcap_{i\in I} x^{-1}A_i x. \quad (4)$$

Пусть $q \in \bigcap_{i\in I} x^{-1}A_i x$, тогда $q \in x^{-1}A_i x$. После умножения последнего включения на x слева и на x^{-1} справа, получаем, что $xqx^{-1} \in A_i$. Следовательно, $xqx^{-1} \in P$. Поэтому $xqx^{-1} = p \in P$ или $q = x^{-1}px$. Получаем, что любой элемент правой части равенства (3) записывается в виде $x^{-1}px$ и, следовательно:

$$\bigcap_{i\in I} x^{-1}A_i x \subseteq x^{-1}Px. \quad (5)$$

Из включений (4) и (5) следует справедливость равенства (3).

Рассмотрим множество подгрупп, которое содержится в множестве всех подгрупп $\{A_i\}$, так как они сопряжены:

$$\left.\begin{array}{l} x^{-1}A_1 x \\ x^{-1}A_2 x \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^{-1}A_i x \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (6)$$

Данное множество составляет класс или несколько классов сопряжённых подгрупп. Рассмотрим $xA_i x^{-1} = (x^{-1})^{-1} A_i x^{-1} \in \{A_i\}$, так как $(x^{-1})^{-1} A_i x^{-1}$ – подгруппа, сопряжённая с множеством A_i и, следовательно, принадлежит множеству подгрупп $\{A_i\}$. В результате приходим к равенству: $A_i = x^{-1}(x^{-1})^{-1} A_i x^{-1} x$. После умножения обеих частей на элемент x^{-1} слева и на элемент x справа, получим множество $A_i = x^{-1}(xA_i x^{-1})x$, которое входит в систему множеств (6), то есть мы показали, что система (6) совпадает с множеством $\{A_i\}$, то есть $\bigcap_{i\in I} x^{-1}A_i x = \bigcap_{i\in I} A_i$. Таким образом, $x^{-1}Px = \bigcap_{i\in I} A_i = P$. Следовательно, группа P является инвариантной подгруппой группы G, то есть пересечение одного или нескольких классов сопряжённых подгрупп – инвариантно.

Таким образом, в статье построена математическая модель инвариантных множеств конечных групп и рассмотрены их основные свойства.

Список использованных источников

1. Андерсон, Дж. Дискретная математика и комбинаторика / Дж. Андерсон. – М. : Диалектика, 2019. – 960 с.
2. Спирина, М. С. Дискретная математика / М. С. Спирина. – М. : Academia, 2018. – 576 с.