УДК 685.34.024.4

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ФОРМОВАНИИ ЗАГОТОВОК ВЕРХА ОБУВИ

Водовозова А. А., студ., Дмитриев А. П., к.т.н., доц.

Витебский государственный технологический университет,
г. Витебск, Республика Беларусь

Реферат. *В статье рассмотрены теоретические аспекты деформации материалов верха обуви при деформировании с помощью модели Кельвина-Фойгта. Моделирование процесса формования верха обуви позволяет повысить качество обуви внутреннего способа формования путём определения физико-механических свойств использованных материалов для рационального их выбора на этапе подготовки производства, исходя из убеждения что важно выбирать подходящие материалы, которые будут приемлемы в цене и долговечны в носке.*

Ключевые слова: деформация, модели вязкоупругости материалов, модель Максвелла, модель Кельвина-Фойгта, дифференциальное уравнение.

Большое разнообразие обувных материалов способствует в настоящее время увеличению производства обуви различного типа, но при этом приводит к необходимости постоянной корректировки технологических режимов её изготовления. Это связано с тем, что используемые при сборке заготовки верха обуви материалы имеют существенные различия физико-механических свойств, показатели которых часто ниже нормируемых, что приводит к увеличению доли бракованной продукции или уменьшения срока эксплуатации. Поэтому исследование свойств материалов для обуви приобретает все большее значение, поскольку широкое внедрение в производство современных обувных материалов требует их рациональной комплектации и подбора в изделии. В связи с этим по стандартным методикам проводятся исследования физико-механических характеристик и деформационных свойств современных материалов, используемых в производстве верха обуви, среди которых наиболее важным для процесса формования является вязкоупругость.

Вязкоупругость – это свойство материалов быть и вязким, и упругим при деформации. Вязкие материалы при сопротивлении сдвигаются и натягиваются линейно во время напряжения, упругие же материалы тянутся во время растягивания и быстро возвращаются в обратное состояние после снятия растягивающих сил, т. е. напряжения. У вязкоупругих материалов присутствуют свойства обоих элементов, и по существу, проявляют напряжение в материале в зависимости от времени. Упругость обычно является результатом растягивания вдоль кристаллографической плоскости материала, а вязкость результат диффузии его атомов или молекул. В большинстве случаев различают три вида деформации: высокоэластичную, упругую и остаточную. В механике твёрдого деформируемого тела вязкоупругость определяется как один из видов поведения под нагрузкой и при котором одновременно проявляются свойства, характерные как для упругого тела, так и для вязкой жидкости [1].

В XIX веке физики Максвелл, Больцман и Кельвин исследовали и экспериментировали с ползучестью и возвращением в обратное состояние стекла, металлов и резины. В дальнейшем ставились эксперименты над вязкоупругостью в конце двадцатого века, когда разрабатывались синтетические полимеры, применяемые в различных областях. Величина вязкоупругости материала в большей степени зависит от изменчивости вязкости η, при этом инверсия η определяется текучестью φ.

В зависимости от изменения уровня нагрузки в противовес напряжения внутри материала вязкость может быть разделена на линейную, нелинейную и пластичную. Когда материал проявляет линейность, он характеризуется как ньютоновская жидкость. В этом случае напряжение линейно пропорционально уровню нагрузки.

Линейную вязкоупругость для одномерного состояния удобно трактовать при помощи механических моделей, которые наглядно демонстрируют поведение различных вязкоупругих материалов. Эти модели строятся из таких механических элементов, как линейно-упругая пружина с модулем упругости Е (массой этой пружины пренебрегают) и вязкий элемент (демпфер) с коэффициентом вязкости h (вязкий элемент представляет собой поршень, движущийся в цилиндре с вязкой жидкостью).

На рисунке 1 представлен график зависимости уровня деформации различных материалов с течением времени, из которого видно, что материал не принимает полностью свою исходную форму со временем (какая-то доля деформации остается).

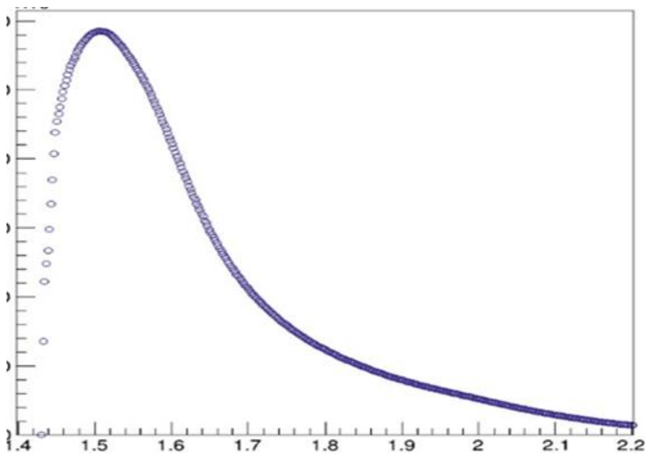

Рисунок 1 – Деформирование вязкоупругого материала

Вязкоупругие материалы, такие как аморфные полимеры, полукристаллические полимеры, биополимеры и даже живая материя и клетки, могут быть смоделированы для определения их напряжения и нагрузки или взаимодействия силы и сдвига, а также их временные зависимости. К таким моделям относят модели Максвелла и модель Кельвина-Фойгта и в зависимости от характера реакции материала на воздействие различных условий нагрузки. У вязкоупругого поведения есть упругие и вязкие составляющие, которые в построении моделей представляют собой комбинации пружин и поршней, соответственно. Каждая модель отличается порядком построения этих элементов.

Создаваемое приложением внешних сил, внутреннее напряжение σ, сочетает все виды деформации и является упруго-вязкой реакцией структуры материала. Наиболее оптимальной для материалов верха обуви является модель его реакции на деформирование, представленная на рисунке 2, где E0 и η_0 выражают упругую и остаточную (ε_0) (звено Максвелла), а E_1 и η_1 – высокоэластичную (ε_0) деформации (звено Кельвина-Фойгта) [2].

В представленной модели звено Максвелла описывается дифференциальным уравнением:

$$\frac{1}{\mathrm{E}_0}\frac{d\sigma}{dt}+\frac{\sigma}{\eta_o}=\frac{d\varepsilon}{dt}\,, \tag{1}$$

а звено Кельвина-Фойгта уравнением:

$$\frac{d\varepsilon}{dt}+\frac{\mathrm{E}_1}{\eta_1}\varepsilon_1=\frac{\sigma}{\eta_1} \tag{2}$$

Далее уравнения (1) и (2) домножаем на E_0 и E_1 и после их сложения получаем:

$$E_1\frac{d\sigma}{dt}+\frac{\sigma}{\eta_0}E_0E_1+E_0E_1\frac{d\varepsilon}{dt}+E_0E_1\frac{E_1}{\eta_1}\varepsilon_1-\frac{d\varepsilon}{dt}E_0E_1-E_0E_1\frac{\sigma}{\eta_1}=0 \tag{3}$$

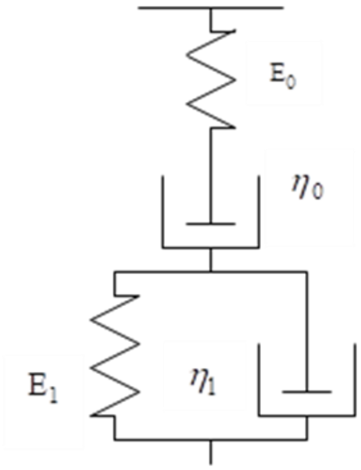

Рисунок 2 – Модель деформирования материалов верха обуви

Учитывая эти уравнения и $\varepsilon_1 + \varepsilon_0 = \varepsilon$, а также после дифференцирования мы получаем линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} + \left(\frac{E_0}{\eta_0} + \frac{E_0}{\eta_1} + \frac{E_1}{\eta_1}\right)\frac{d\sigma}{dt} + \frac{E_0 \cdot E_1}{\eta \cdot \eta_{10}}\sigma = E_0 \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + \frac{E_0 \cdot E_1}{\eta_1}\frac{d\varepsilon}{dt} \quad (4)$$

Если учесть, что $\varepsilon_1 + \varepsilon_0 = \varepsilon$, то уравнение (4) принимает вид:

$$E_0 \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + \frac{E_0 E_1}{\eta_1}\frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{E_0 E_1}{\eta_0 \eta_1}\sigma_0 = 0, \quad (5)$$

и так как при $\sigma = \sigma_0$, то:

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} + \left(\frac{E_0}{\eta_0} + \frac{E_0}{\eta_1} + \frac{E_1}{\eta_1}\right)\frac{d\sigma}{dt} = 0 \quad (6)$$

с учётом начальных условий решение (5) имеет вид:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E_0} + \frac{\sigma_0}{E_1} - \frac{\sigma_0}{E_1} e^{-\frac{E_1}{\eta_1} \cdot t} + \frac{\sigma_0}{\eta_0} t\,. \quad (7)$$

Таким образом, в работе рассмотрены механическая модель деформирования вязкоупругого материала и соответствующая математическая модель в виде дифференциальных уравнений и приведено одно из их решений [3].

Список использованных источников

1. Кравченко, А. Д. Элементы деформации и редеформации кожи при двухмерном растяжении / А. Д. Кравченко // Известия высш. учеб. завед. Технология лёгкой пром-ти. – 1971. – № 3 – С. 86−91.
2. Простейшие механические модели вязкоупругого поведения [Электронный ресурс]. – Режим доступа: monographies.ru. – Дата доступа: 17.04.2024.
3. Дмитриев, А. П. Математическое описание деформации материалов для верха обуви при двухосном растяжении / А. П. Дмитриев // Тезисы докладов 42 научно-технической конференции преподавателей и студентов университета / УО «ВГТУ». – Витебск, 2009. – С. 38–39.