МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ

«ВИТЕБСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

УДК 513.8, 515.1

№ ГР 2001523

Инв. № ______________

УТВЕРЖДАЮ

Проректор УО ВГТУ по научной работе

____________________ С.М. Литовский

М.П.

ПРОМЕЖУТОЧНЫЙ ОТЧЕТ

о научно-исследовательской работе «Исследование алгебраических структур на многообразиях» Государственной программы фундаментальных исследований «Исследование основных математических структур и проблем математического моделирования» (шифр «Математические структуры»)

(полугодовой)

2004-Г/Б-308

Начальник НИС С.А. Беликов

Научный руководитель,

Дфмн, проф. Ю.В. Муранов

Витебск

2004

Список исполнителей

1. Муранов Ю. В. -- научный руководитель, главный научный сотрудник, профессор, дфмн.

2. Муранова Е. Н. -- исполнитель, старший научный сотрудник НИС.

РЕФЕРАТ

Отчет 6 с., 1 кн., 1 прил.

ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СТРУКТУР НА МНОГООБРАЗИЯХ

Объектом исследования является проблема расщепления и группы препятствий для многообразий с подмногообразиями.

Цель работы --- изучить алгебраические и геометрические свойства групп препятствий и структурных множеств.

В процессе работы проводились исследования геометрических свойств проблемы расщепления для многообразия с фильтрацией и структурных множеств.

В результате исследования получены новые результаты о геометрических свойствах проблемы расщепления для систем многообразий, определены и исследованы структурные множества для фильтрации и описаны связи введенных групп с классическим группами препятствий.

Полученные результаты применимы в геометрической топологии, алгебраической К-теории, теории стратифицированных пространств.

Введение.

Исследование различных алгебраических структур для систем многообразий были использованы Браудером и Ливси при исследовании инволюций на гомотопических сферах, а затем интенсивно развивались в тесной связи с теорией перестроек в работах Лопеза де Медрано, Уолла и Раницкого. Тесная связь алгебраических и геометрических аспектов эрмитовой К-теории (L-теории), глубокому исследованию которой положила начало работа С. П. Новикова, имеет место не только для многообразий, но и для различных систем многообразий. Параллельно с классической теорией перестроек развивалась также теория внутренних перестроек или теория расщепления гомотопической эквивалентности вдоль подмногообразия. В частности, техника расщепления эффективно применяется для вычисления отображений в точной последовательности Сулливана и для решения вопроса о реализации элементов групп Уолла нормальными отображениями замкнутых многообразий. При этом основные запрещающие реализацию замкнутыми многообразиями инварианты задаются на языке отображений между различными L-группами и группами препятствий к расщеплению. Сюда следует отнести такие естественные отображения как трансфер, скрученный трансфер и индуцирование. Мы изучаем их алгебраические и геометрические свойства для случая систем многообразий.

Группы препятствий к расщеплению $LS_{n-q}(F)$ естественно возникают в задаче перестройки подмногообразия $N \subset M$ коразмерности q внутри n-мерного многообразия M. Если коразмерность подмногообразия N больше или равна 3, то группы $LS_{n-q}(F)$ не зависят от многообразия M и совпадают с абстрактными группами препятствий к перестройкам $L_{n-q}(\pi_1(N))$, где $\pi_1(N)$ — фундаментальная группа подмногообразия N, снабженная гомоморфизмом ориентации $w : \pi_1(N) \to \{\pm 1\}$. Рассмотрим простую гомотопическую эквивалентность $f : M \to Y$ многообразия M в n - мерный геометрический комплекс Пуанкаре Y с подкомплексом X коразмерности q. Соответствующая задача расщепления отображения f вдоль X состоит в деформации f с точностью до гомотопии в такое трансверсальное к X отображение, что ограничения

$$f|_N : N \to X, f|_{M\setminus N} : (M \setminus N) \to (Y \setminus X), N = f^{-1}(X)$$

являются простыми гомотопическими эквивалентностями. Препятствие к расщеплению $\sigma(f, Y)$ лежит в группе $LS_{n-q}(F)$, которая функториально зависит от универсального квадрата F фундаментальных групп с ориентацией

$$F = \begin{pmatrix} \pi_1(\partial U) & \longrightarrow & \pi_1(Y \setminus X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(X) & \longrightarrow & \pi_1(Y) \end{pmatrix},$$

где ∂U — пространство сферического расслоения нормального расслоения X в Y. При этом группы $LS_{n-q}(F)$ 4-периодичны, т. е. $n-q$ можно считать равным $0, 1, 2, 3 \bmod 4$. Для удобства обозначим группы с ориентациями из квадрата F следующим образом:

$$F = \begin{pmatrix} A & \longrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & D \end{pmatrix}.$$

Пусть $Y^{n-q} \subset X^n$ — подмногообразие коразмерности q с нормальным расслоением ξ в n-мерном многообразии X. Обозначим через ∂U_ξ границу трубчатой окрестности U_ξ подмногообразия Y в X. Здесь и в дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем рассматривать только $L^s_* = L_*$-группы, задающие препятствия к перестройке до простой гомотопической эквивалентности.

В 1978 году Кэппел и Шейнсон отметили интересные свойства инвариантов Браудера-Ливси, которые аналогичны дифференциалам некоторой спектральной последовательности. Такая спектральная последовательность была построена Хэмблтоном и Харшиладзе в 1991 году. Эта спектральная последовательность тесно связана с важнейшей геометрической задачей реализации элементов групп Уолла нормальными отображениями замкнутых многообразий. Основной шаг конструкции спектральной последовательности состоит в построении бесконечной фильтрации спектров, в которой только первые два, как хорошо известно, имеют ясный геометрический смысл. Первый из них это спектр $\mathbb{L}(\pi_1(X))$ для групп препятствий к перестройкам многообразия X, а второй $\mathbb{L}P_*(F)$ это спектр для групп препятствий к перестройкам пары $Y \subset X$ многообразий Браудера-Ливси. Геометрический смысл третьего члена фильтрации был объяснен Мурановым, Реповшем и Спаггиари в 2002 году.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Список публикаций по результатам исследований

1. Rolando Jimenez, Y.V. Muranov, D. Repovš. Surgery spectral sequence and stratified manifolds. Preprint University of Ljubljana, IMFM. 2004. 1–33.

2. Matija Cencelj, Y. V. Muranov, D. Repovs. On splitting problem for manifold with boundaries. Preprint University of Ljubljana, IMFM. 2004. 1–22.

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX