МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ КРУГЛОЙ МЕМБРАНЫ С ВЫРЕЗОМ

Капник Е.С.,
студент 1 курса УО «ВГТУ», г. Витебск, Республика Беларусь
Научный руководитель – Никонова Т.В., канд. физ.-мат. наук, доцент

Целью исследования является получение асимптотических формул для нахождения частоты свободных колебаний круглой мембраны с вырезом. Полученные результаты можно использовать при изучении свободных колебаний барабанной перепонки в математическом моделировании среднего уха.

Материал и методы. Рассмотрим малые колебания круглой мембраны с вырезом, где $r=R_1$ и $r=R_2$ – линии, определяющие края мембраны.

В безразмерном виде в полярной системе координат (r, φ) уравнение колебаний запишется следующим образом [1]:

$$\Delta u - a^2(\varepsilon r, \varepsilon\varphi)\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = 0, \tag{1}$$

где $\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}$ – оператор Лапласа, u – прогиб, a медленно зависит от r и φ, t – время.

В качестве граничных условий рассмотрим следующие:

$$u(R_1)=0, \quad u(R_2)=0. \tag{2}$$

Будем искать $u(r, \varphi, t)$ в виде [2]:

$$u(r, \varphi, t)=U(r, \varphi)\cos(\omega t). \tag{3}$$

Пусть

$$a(\varepsilon r, \varepsilon\varphi)=a_0+\varepsilon a_1(r, \varphi)+\varepsilon^2 a_2(r, \varphi)+\ldots,$$

где a_i – непрерывные функции.

Разложим функции $U(r, \varphi)$ и ω в ряды по степеням ε:

$$U(r, \varphi)=U_0+\varepsilon U_1(r, \varphi)+\varepsilon^2 U_2(r, \varphi)+\ldots, \ \ \omega(\varepsilon r)= \omega_0+\varepsilon\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+\ldots \tag{4}$$

Результаты и их обсуждение. Подставив разложения (4), (3) в (1) и (2), приравняв нулю коэффициенты при ε^0, получим уравнения:

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U_0}{\partial\varphi^2} + a_0^2\omega_0^2 U_0 = 0 \tag{5}$$

с граничными условиями:

$$U_0(R_1)=0, \quad U_0(R_2)=0. \tag{6}$$

Уравнение (5) представляет собой уравнение, сводящееся к уравнению Бесселя порядка n, его общее решение записывается в виде:

$$U_0(r, \varphi)=(AJ_n(a_0\omega_0 r)+BY_n(a_0\omega_0 r))\sin(n\varphi), \tag{7}$$

где $J_n(a_0\omega_0 r)$ и $Y_n(a_0\omega_0 r)$ – функции Бесселя порядка n первого и второго рода соответственно.

Из рассмотрения граничных условий (6) получим [3]:

$$\Delta = \begin{vmatrix} J_n(a_0\omega_0 R_1) & Y_n(a_0\omega_0 R_1) \\ J_n(a_0\omega_0 R_2) & Y_n(a_0\omega_0 R_2) \end{vmatrix} = 0, \quad \omega_0=\Omega_{nm}, \tag{8}$$

где Ω_{nm} – корни алгебраического уравнения (8).

Подставив разложения (4), (3) в (1) и (2), приравняв нулю коэффициенты при ε^1, получим уравнение:

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U_1}{\partial \varphi^2} + a_0^2\omega_0^2 U_1 + 2a_0^2\omega_0\omega_1 U_0 + 2a_0 a_1\omega_0^2 U_0 = 0 \tag{9}$$

с граничными условиями:

$$U_1(R_1)=0, \quad U_1(R_2)=0. \tag{10}$$

Заключение. Условие разрешимости неоднородной задачи имеет вид [4]:

$$\begin{aligned} 2\Omega_{nm}a_0 \Bigg[& \omega_1 a_0 \int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} \left[r(AJ_n(\Omega_{nm}a_0 r) + BY_n(\Omega_{nm}a_0 r))^2 \sin^2(n\varphi) \right] dr d\varphi + \\ & + \Omega_{nm} \int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} \left[a_1 r(AJ_n(\Omega_{nm}a_0 r) + BY_n(\Omega_{nm}a_0 r))^2 \sin^2(n\varphi) \right] dr d\varphi \Bigg] = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Откуда найдем выражение для ω_1:

$$\omega_1 = -\Omega_{nm} \frac{\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} r a_1(r,\varphi)(AJ_n + BY_n)^2 \sin^2(n\varphi) dr d\varphi}{a_0 \int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} r(AJ_n + BY_n)^2 \sin^2(n\varphi) dr d\varphi}. \tag{12}$$

Поступая аналогично, строим второе приближение и из условия разрешимости можно получить формулу для ω_2. С учетом разложения (4) для частоты ω получим:

$$\omega = \Omega_{nm} - \varepsilon\Omega_{nm} \frac{\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} r a_1(r,\varphi)(AJ_n(a_0\omega_0 r) + BY_n(a_0\omega_0 r))^2 \sin^2(n\varphi) dr d\varphi}{a_0 \int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} r(AJ_n(a_0\omega_0 r) + BY_n(a_0\omega_0 r))^2 \sin^2(n\varphi) dr d\varphi}. \tag{13}$$

Таким образом, получены асимптотические формулы для нахождения частоты малых колебаний круглой мембраны с вырезом. Полученные результаты можно использовать при изучении колебаний барабанной перепонки в математическом моделировании биомеханической системы среднего уха.

1. Бицадзе, А.В. Уравнения математической физики / А.В. Бицадзе. – М.: Наука, 1982. – 336 с.
2. Смирнов, М.М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. / М.М. Смирнов. – М.: Наука, 1964. – 104 с.
3. Янке, Е. Специальные функции / Е.Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М.: Наука, 1977. – 342 с.
4. Найфе, А.Х. Введение в методы возмущений / А.Х. Найфе. – М.: Мир, – 1984. – 535 с.