**Заключение**. Таким образом, создание веб-приложения для предоставления точных метеорологических данных на основе JavaScript-библиотек React и Redux может стать одним из многочисленных этапов в процессе информатизации страны. Основным преимуществом созданного приложения является возможность получения актуальной информации о погоде в режиме реального времени.

1. Документация React [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://ru.reactjs.org/docs/getting-started.html – Дата доступа: 13.03.2023.
2. Документация Redux [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://reactdev.ru/libs/redux/ – Дата доступа: 15.03.2023.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕМБРАНЫ ПРИ РАДИАЛЬНО НЕОДНОРОДНОЙ ПЛОТНОСТИ МАТЕРИАЛА

***Шкурко И.К.,***
*студент 1 курса УО «ВГТУ», г. Витебск, Республика Беларусь*
Научный руководитель – Никонова Т.В., канд. физ.-мат. наук, доцент

Целью исследования является получение асимптотических формул для нахождения частоты колебаний мембраны при радиально неоднородной плотности материала. Полученные результаты можно использовать при изучении колебаний барабанной перепонки в математическом колебании среднего уха.

**Материал и методы.** Рассмотрим малые колебания круглой мембраны радиуса $R$. В безразмерном виде в полярной системе координат уравнения колебаний запишутся следующим образом [1]:

$$\Delta u - a^2(\varepsilon r)\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = 0, \tag{1}$$

где $\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}$ – оператор Лапласа, $u$ – прогиб, $a^2 = \frac{\mu}{\rho}$ – скорость распространения звука медленно зависящая от $r$, $\mu$ – натяжение мембраны, $\rho$ – поверхностная плотность массы мембраны, $t$ – время.

В качестве граничных условий рассмотрим следующие:

$$u\big|_{r=R} = 0, \quad |u| < \infty \ \text{ при } \ r=0. \tag{2}$$

Рассматривая гармонические по времени колебания, положим [2]:

$$u(r,\varphi,t)=U(r)\sin(n\varphi)\cos(\omega t), \tag{3}$$

где $n$ – число волн в окружном направлении, $\omega$ – безразмерная частота.

Скорость распространения звука разложим по степеням $\varepsilon$:

$$a(\varepsilon r)=a_0+\varepsilon a_1(r)+\varepsilon^2 a_2(r)+\ldots,$$

где $a_i$ – непрерывные функции.

Разложим функции $U(r)$ и $\omega$ в ряды по степеням $\varepsilon$:

$$U(\varepsilon r)= U_0+\varepsilon U_1(r)+\varepsilon^2 U_2(r)+\ldots, \quad \omega(\varepsilon r)= \omega_0+\varepsilon\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+\ldots \tag{4}$$

**Результаты и их обсуждение.** Подставив разложения (3), (4) в (1) и (2), приравняв нулю коэффициенты при $\varepsilon^0$, получим уравнения:

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_0}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2}U_0 + a_0^2\omega_0^2 U_0 = 0 \tag{5}$$

с граничными условиями:

$$U_0\big|_{r=R} = 0, \quad |U_0| < \infty \ \text{ при } \ r=0. \tag{6}$$

Уравнение (5) представляет собой уравнение Бесселя порядка $n$, его общее решение записывается в виде:

$$U_0=AJ_n(a_0\omega_0 r)+BY_n(a_0\omega_0 r), \tag{7}$$

где $J_n(a_0\omega_0 r)$ и $Y_n(a_0\omega_0 r)$ – функции Бесселя порядка $n$ первого и второго рода соответственно.

Из условия ограниченности (6) для $U_0$, следует, что необходимо положить коэффициент $B$=0. Тогда

$$U_0=AJ_n(a_0\omega_0 r). \tag{8}$$

При этом граничное условие $U_0(R)$=0 приводит к характеристическому уравнению

$$J_n(a_0\omega_0 R)=0. \tag{9}$$

Таким образом, имеем [3]

$$\omega_0=\Omega_{nm}, \tag{10}$$

где $\Omega_{nm}$ – корни уравнения $J_n(a_0\Omega R)$=0. Следовательно,

$$U_0=AJ_n(a_0\Omega_{nm}R). \tag{11}$$

Подставив разложения (4) в (1) и (2), приравняв нулю коэффициенты при $\varepsilon^1$, получим уравнение:

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U_1}{\partial r}-\frac{n^2}{r^2}U_1+a_0^2\omega_0^2 U_1+2a_0^2\omega_0\omega_1 U_0+2a_0a_1\omega_0^2 U_0=0 \tag{12}$$

с граничными условиями:

$$U_1\big|_{r=R}=0,\quad |U_1|<\infty \ \text{ при } \ r=0. \tag{13}$$

**Заключение.** Однородная задача, соответствующая (12), (13) имеет нетривиальное решение, и поэтому неоднородная задача имеет решение только при выполнении некоторого условия разрешимости [4].

Возвращаясь к неоднородной задаче, получаем искомое условие разрешимости:

$$2A^2\Omega_{nm}a_0\left[\omega_1 a_0\int_0^R rJ_n^2(\Omega_{nm}a_0 r)dr+\Omega_{nm}\int_0^R a_1 r\,J_n^2(\Omega_{nm}a_0 r)dr\right]=0. \tag{14}$$

Откуда находим выражение для $\omega_1$:

$$\omega_1=-\frac{\Omega_{nm}\int_0^R a_1 r\,J_n^2(\Omega_{nm}a_0 r)dr}{a_0\int_0^R rJ_n^2(\Omega_{nm}a_0 r)dr}. \tag{15}$$

С учетом разложения (4) для частоты $\omega$ получим:

$$\omega=\Omega_{nm}-\varepsilon\,\Omega_{nm}\frac{\int_0^R a_1 r\,J_n^2(\Omega_{nm}a_0 r)dr}{a_0\int_0^R rJ_n^2(\Omega_{nm}a_0 r)dr}+\ldots. \tag{16}$$

Таким образом, получены асимптотические формулы для нахождения частоты колебаний мембраны при радиально неоднородной плотности материала. Полученные результаты можно использовать при изучении колебаний барабанной перепонки в математическом моделировании колебаний среднего уха, выполняемом при его хирургической реконструкции.

1. Бицадзе, А.В. Уравнения математической физики / А.В. Бицадзе. – М.: Наука, 1982. – 336 с.
2. Смирнов, М.М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. / М.М. Смирнов. – М.: Наука, 1964. – 104 с.
3. Янке, Е. Специальные функции / Е.Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М.: Наука, 1977. – 342 с.
4. Найфе, А.Х. Введение в методы возмущений / А.Х. Найфе. – М.: Мир, – 1984. – 535 с.