

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Учреждение образования
«Витебский государственный технологический университет»

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.
ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ.
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ
И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ**

Практикум

для студентов первого курса специальностей
6-05-0611-04 «Электронная экономика»,
6-05-0611-01 «Информационные системы и технологии»

Витебск
2023

УДК 517 (076.1) (075.8)

Составители:

А. В. Коваленко

А. П. Дмитриев

Одобрено кафедрой математики и информационных технологий
УО «ВГТУ», протокол № 4 от 22.11.2023.

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским
советом УО «ВГТУ», протокол № 3 от 27.11.2023.

Математический анализ. Предел и непрерывность функций. Дифференциальное исчисление функции одной и нескольких переменных : практикум / сост. А. В. Коваленко, А. П. Дмитриев. – Витебск : УО «ВГТУ», 2023. – 106 с.

Практикум содержит основные теоретические сведения, задания к практическим занятиям, примеры для самостоятельного выполнения заданий, вопросы к экзамену или зачёту по пяти разделам курса «Математический анализ» для студентов специальностей 6-05-0611-04 «Электронная экономика», 6-05-0611-01 «Информационные системы и технологии»: комплексные числа, числовые последовательности, функции, дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных. Данное издание предназначено для проведения практических занятий у студентов первого курса факультетов «Информационные технологии и робототехника» и «Экономика и бизнес-управление», а также может быть использовано в ходе изучения указанных тем студентами заочной и дистанционной форм обучения.

УДК 517 (076.1) (075.8)

© УО «ВГТУ», 2023

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
Перечень вопросов учебной программы по курсу «Математический анализ» для специальностей 6-05-0611-04, 6-05-0611-01 (первый курс, первый семестр)	5
Практикум по решению задач.....	8
1 Комплексные числа	8
2 Числовая последовательность	13
3 Предел функции	21
4 Непрерывность функций	34
5 Дифференциальное исчисление функции одной переменной	40
6 Дифференциал функции	47
7 Правило Лопиталю	54
8 Формула Тейлора	60
9 Применение дифференциального исчисления к исследованию функции одной переменной	68
10 Функции нескольких переменных. Частные производные функции нескольких переменных	82
11 Геометрические применения функции нескольких переменных. Полный дифференциал функции нескольких переменных	87
12 Локальный экстремум функции нескольких переменных	93
13 Условный и глобальный экстремум функции нескольких переменных	96
Литература	104
Приложение А	105

ВВЕДЕНИЕ

Учебный практикум составлен на основе практических занятий, которые авторы проводили на протяжении многих лет работы преподавания дисциплины «Математический анализ» в Витебском государственном технологическом университете. Приведённый материал проверен на нескольких поколениях студентов и содержит необходимые сведения для будущих выпускников. Большинство рассматриваемых задач носят практическую направленность и имеют тесную связь с дисциплинами, которые будут изучать студенты в следующих семестрах.

Настоящие учебно-методические материалы предназначены для студентов факультетов «Информационные технологии и робототехника» и «Экономика и бизнес-управление», которые изучают курс «Математический анализ». В работе приведён краткий теоретический материал для проведения практических занятий по указанному выше курсу. Практикум написан в соответствии с учебной программой дисциплины «Математический анализ».

В работе выделяются тринадцать разделов курса. Каждый раздел представляет собой методический материал для проведения преподавателем практических занятий и выполнения контролируемой самостоятельной работы студентами. В начале каждого раздела приведён краткий теоретический материал (определения, теоремы, формулы), который необходим студенту для решения задач по рассматриваемой теме. В то же время этих сведений недостаточно для итоговой аттестации по предмету. Прежде чем приступать к решению задач практического занятия или выполнения домашнего задания, студенту необходимо изучить теоретический курс лекционного материала или обратиться к академическим изданиям для более детального изучения разделов курса, которые его интересуют. Наименование разделов, а также их структура построены в соответствии с учебной программой дисциплины «Математический анализ» для студентов специальностей 6-05-0611-04, 6-05-0611-01. Некоторые разделы курса «Математический анализ» могут применяться на практических занятиях студентами всех видов специальностей и форм обучения вуза в процессе изучения других дисциплин.

На кафедре «Математика и информационные технологии» по дисциплине «Математический анализ» разработана тестовая форма контроля знаний с применением компьютерной техники. Предложенная методическая разработка позволяет подготовиться студентам к прохождению теста, как по отдельным темам курса, так и по всему материалу.

Данный практикум может быть использован преподавателем для проведения практических занятий у студентов не только дневной формы обучения, но и заочной. Студенты заочной формы обучения могут применять теоретический и практический материал практикума для самостоятельной работы по предмету и выполнению контрольных заданий.

**ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ ПО КУРСУ
«МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»
ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ 6-05-0611-04, 6-05-0611-01
(ПЕРВЫЙ КУРС, ПЕРВЫЙ СЕМЕСТР)**

1. Действительные числа. Модуль действительного числа.
2. Комплексные числа.
3. Числовые последовательности. Способы задания числовых последовательностей.
4. Многочлены и уравнения. Основная теорема алгебры.
5. Ограниченные и монотонные числовые последовательности.
6. Предел числовой последовательности и его свойства.
7. Бесконечно малые и бесконечно большие числовые последовательности и их свойства.
8. Правила предельного перехода для числовых последовательностей.
9. Предел монотонной последовательности. Второй замечательный предел.
10. Предел функции и его свойства.
11. Бесконечно малые функции и их свойства. Бесконечно большие функции и их свойства.
12. Правила предельного перехода для функций.
13. Замечательные пределы функций.
14. Различные определения непрерывности функции в точке. Классификация точек разрыва.
15. Производная функции. Теорема о связи дифференцируемой и непрерывной функции.
16. Геометрический смысл производной. Уравнение касательной и нормали.
17. Производная степенной и показательной функций.
18. Производная тригонометрических функций.
19. Производная обратной функции. Производная обратных тригонометрических функций.
20. Производная обратной функции. Производная логарифмической функции.
21. Производная сложной функции. Производная гиперболических функций.
22. Основные правила дифференцирования.
23. Дифференциал функции. Его геометрический смысл и свойства.

24. Логарифмическое дифференцирование. Производная функции, заданной неявно.
25. Производная функции, заданной параметрическим образом.
26. Производные высшего порядка. Механический смысл первой и второй производных.
27. Теорема Ролля и её геометрический смысл.
28. Теорема Лагранжа и её геометрический смысл.
29. Теоремы Коши и её геометрический смысл.
30. Правило Лопиталя и его применение к раскрытию неопределенностей различных типов.
31. Формула Тейлора (Маклорена) с остаточным членом в форме Пеано.
32. Формула Тейлора (Маклорена) с остаточным членом в форме Лагранжа.
33. Монотонные функции. Необходимое и достаточное условие монотонности функции.
34. Локальный экстремум функций одной переменной. Необходимое условие локального экстремума.
35. Локальный экстремум функций одной переменной. Достаточные условия локального экстремума.
36. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.
37. Выпуклость и вогнутость графика функции. Достаточное условие выпуклости и вогнутости функции.
38. Точки перегиба графика функции. Необходимое и достаточное условие существования точек перегиба.
39. Асимптоты графика функции. Необходимое и достаточное условие существования асимптот графика функции.
40. Схема полного исследования функции.
41. Понятие функции нескольких переменных. Предел и непрерывность функций нескольких переменных.
42. Частные производные функции нескольких переменных.
43. Геометрический смысл частных производных функций двух переменных.
44. Необходимое условие дифференцируемости функции нескольких переменных.
45. Полный дифференциал функции нескольких переменных и его применение к приближенным вычислениям.
46. Дифференцирование сложных функций нескольких переменных. Инвариантность формы полного дифференциала.
47. Дифференцирование функции нескольких переменных, заданных неявно.

48. Касательная плоскость и нормаль к поверхности $z = f(x, y)$.
49. Скалярное поле. Производная функции по направлению скалярного поля. Градиент скалярного поля.
50. Частные производные высшего порядка и полные дифференциалы высшего порядка функции нескольких переменных.
51. Формула Тейлора для функций двух переменных.
52. Локальные экстремумы функций нескольких переменных. Необходимое и достаточное условия локального экстремума функций нескольких переменных.
53. Локальные экстремумы функций двух переменных. Необходимое и достаточное условия локального экстремума функций двух переменных.
54. Условный экстремум функций нескольких переменных.
55. Условный экстремум функций двух переменных.
56. Наибольшее и наименьшее значения (глобальные экстремумы) функций нескольких переменных в замкнутой области.
57. Первообразная функции. Теорема о первообразных.
58. Определение неопределенного интеграла, его геометрический смысл.
59. Таблица неопределённых интегралов основных элементарных функций.
60. Свойства неопределенного интеграла.
61. Методы интегрирования неопределенного интеграла.
62. Интегрирование простейших рациональных дробей.
63. Интегрирование рациональных выражений.
64. Интегрирование иррациональных выражений.
65. Интегрирование тригонометрических выражений.
66. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.
67. Интегральная сумма. Понятие определенного интеграла. Условия интегрируемости функции.
68. Свойства определенного интеграла.
69. Интеграл с переменным верхним пределом интегрирования.
70. Связь неопределенного и определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.
71. Методы интегрирования определенного интеграла.
72. Несобственные интегралы первого рода.
73. Несобственные интегралы второго рода.
74. Вычисление площадей фигур с помощью определённого интеграла.
75. Вычисление площадей плоских фигур в полярной системе координат.
76. Вычисление длины дуги кривой с помощью определённого интеграла.
77. Вычисление объемов тел с помощью определённого интеграла.
78. Площади поверхности вращения.
79. Применение определённого интеграла в механике.

ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

1 КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Содержание: комплексные числа в алгебраической, тригонометрической и показательной форме записи, основная теорема алгебры.

1.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Существуют задачи, для решения которых множества действительных чисел недостаточно. Например, квадратное уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет корней на множестве действительных чисел, так как не существует действительного числа, квадрат которого равнялся бы -1 : $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$. Поэтому возникла необходимость расширения множества действительных чисел.

Комплексными числами называются всевозможные упорядоченные пары $z = (x; y)$ действительных чисел, для которых введены операции сложения и умножения по следующим правилам:

$$(x_1; y_1) + (x_2; y_2) = (x_1 + x_2; y_1 + y_2), \quad (1.1.1)$$

$$(x_1; y_1) \cdot (x_2; y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2; x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (1.1.2)$$

Множество комплексных чисел обозначается символом $\mathbb{C}$.

Действительные числа x и y называются *действительной* и *мнимой частями* комплексного числа $z = (x; y)$ и обозначаются символами $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ соответственно.

Два комплексных числа $z_1 = (x_1; y_1)$ и $z_2 = (x_2; y_2)$ называются *равными*, если равны их действительные и мнимые части, то есть $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$. Отношение неравенства на множестве комплексных не определено.

Из равенств (1.1.1) и (1.1.2) следует, что любое комплексное число $z = (x; y)$ может быть записано в виде

$$z = (x; y) = (x; 0) + (0; 1) \cdot (y; 0). \quad (1.1.3)$$

Установим взаимно однозначное соответствие $(x; 0) \leftrightarrow x$ между множеством $\{(x; 0) | x \in \mathbf{R}\}$ и множеством действительных чисел $\mathbf{R}$. Из формул (1.1.1) и (1.1.2) следует, что это соответствие «сохраняет операции:

$$(x_1; 0) + (x_2; 0) = (x_1 + x_2; 0) \Leftrightarrow x_1 + x_2,$$

$$(x_1; 0) \cdot (x_2; 0) = (x_1 x_2; 0) \leftrightarrow x_1 x_2.$$

Комплексное число $(0; 1)$ обозначается символом i и называется мнимой единицей (мнимая единица может обозначаться символом j), причём $i^2 = -1$.

Комплексным числом в алгебраической форме называется число вида $z = x + iy$, где $x, y \in R$, а $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица, причём $i^2 = -1$. Число $x = \operatorname{Re} z$ называется *действительной частью* комплексного числа $z = x + iy$, а число $y = \operatorname{Im} z$ – мнимой частью этого числа. Множество комплексных чисел обозначается буквой C . На комплексной плоскости по оси абсцисс откладывается действительная часть комплексного числа, а по оси ординат – мнимая часть этого числа. Так, например, на комплексной плоскости мнимой единице будет соответствовать точка с координатами $(0, 1)$.

Два комплексных числа равны, если соответственно равны их действительные и мнимые части. Числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ называются сопряжёнными. Если $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ – два комплексных числа, то арифметические операции над ними выполняются по следующим правилам:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i;$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

Пусть дано комплексное число $z = x + iy$ в алгебраической форме. На комплексной плоскости ему будет соответствовать точка $M(x, y)$ с радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$, где точка O – начало координат.

Число $r = |z| = |\overrightarrow{OM}|$ называется *модулем комплексного числа* $z = x + iy$.

Угол φ , образованный вектором $\overrightarrow{OM}$ с положительным направлением оси абсцисс, называется *аргументом комплексного числа* z и обозначается $\varphi = \operatorname{Arg} z$.

Для любого комплексного числа справедливы формулы:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \\ r &= |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \varphi = x/r, \quad \sin \varphi = y/r, \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

где *главное значение аргумента* $\varphi = \arg z$ удовлетворяет следующим условиям: $0 \leq \arg z < 2\pi$ или $-\pi < \arg z \leq \pi$.

Любое комплексное число $z = x + iy$ может быть представлено в тригонометрической форме

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (1.1.5)$$

Используя формулу Эйлера $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, комплексное число может быть представлено в показательной форме

$$z = re^{i\varphi}. \quad (1.1.6)$$

Если $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_2 e^{i\varphi_2}$, то справедливы формулы

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad (1.1.7)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad (1.1.8)$$

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad (1.1.9)$$

$$\omega_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) = \sqrt[n]{r} e^{\frac{\varphi + 2\pi k}{n} i}, \quad k = \overline{0; n-1}. \quad (1.1.10)$$

Формула (1.1.9) называется *формулой Муавра*. Для нахождения корня n -ой степени из комплексного числа используется формула (1.1.10), дающая n значений этого корня, при этом под корнем $\sqrt[n]{r}$ понимается арифметический корень.

Многочленом n -ой степени называется функция вида

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n, \quad (1.1.11)$$

где $z \in \mathbb{C}$, $a_0 \neq 0, a_1, \dots, a_n$ — коэффициенты многочлена, вообще говоря, комплексные, $n \in \mathbb{N}$. Уравнение

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0 \quad (1.1.12)$$

называется алгебраическим уравнением n -ой степени. Число z_0 , для которого $P_n(z_0) = 0$, называется *корнем* многочлена (1.1.11) или уравнения (1.1.12).

Теорема Гаусса (основная теорема алгебры). Всякий многочлен ненулевой степени имеет, по крайней мере, один корень (вообще говоря, комплексный).

Если учесть кратность корней, основная теорема алгебры может быть уточнена следующим образом: *многочлен n -ой степени имеет ровно n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.*

1.2 Примеры решения типовых задач

1.2.1 Даны комплексные числа $z_1 = 4 - 3i$ и $z_2 = 2 + 5i$. Найти $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$, z_2^2 , z_1^3 , $\bar{z}_1/z_2$.

Решение. Последовательно вычисляем:

$$z_1 + z_2 = (4 - 3i) + (2 + 5i) = (4 + 2) + (-3 + 5)i = 6 + 2i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (4 - 3i) \cdot (2 + 5i) = 8 - 6i + 20i - 15i^2 = 8 + 14i + 15 = 23 + 14i,$$

$$z_2^2 = (2 + 5i)^2 = 4 + 20i + 25i^2 = 4 + 20i - 25 = -21 + 20i,$$

$$z_1^3 = (4 - 3i)^3 = 64 - 144i + 108i^2 - 27i^3 = 64 - 144i - 108 + 27i = -44 - 117i,$$

$$\frac{\bar{z}_1}{z_2} = \frac{4 + 3i}{2 + 5i} = \frac{(4 + 3i) \cdot (2 - 5i)}{(2 + 5i) \cdot (2 - 5i)} = \frac{8 + 6i - 20i - 15i^2}{4 - 25i^2} = \frac{23 - 14i}{29} = \frac{23}{29} - \frac{14}{29}i.$$

1.2.2 Данные числа $z_1 = \sqrt{3} - i$ и $z_2 = -3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i$ представить в тригонометрической и показательной форме записи комплексных чисел. Выполнить указанные действия над ними: $z_1 \cdot z_2$, z_1/z_2 , z_1^{10} , $\sqrt[3]{z_2}$.

Решение. Представим указанные числа в тригонометрической и показательной форме записи. Для числа $z_1 = \sqrt{3} - i$, по формулам (1.1.4), находим модуль и аргумент комплексного числа. Модуль числа равен

$|z_1| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$, а аргумент определяем из системы: $\cos \varphi_1 = \sqrt{3}/2$, $\sin \varphi_1 = -1/2$, то есть $\varphi_1 = 11\pi/6$. По формулам (1.1.5) и (1.1.6) получаем необходимые записи числа $z_1 = \sqrt{3} - i$: $z_1 = 2 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) = 2e^{\frac{11\pi i}{6}}$. Аналогично,

$z_2 = 6 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = 6e^{\frac{3\pi i}{4}}$. Для нахождения $z_1 \cdot z_2$, z_1/z_2 , z_1^{10} , $\sqrt[3]{z_2}$ воспользуемся формулами (1.1.7) – (1.1.10):

$$z_1 z_2 = 2 \cdot 6 \cdot \left(\cos \left(\frac{11\pi}{6} + \frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{11\pi}{6} + \frac{3\pi}{4} \right) \right) = 12 \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right) = 12e^{\frac{7\pi i}{12}},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{6} \cdot \left(\cos \left(\frac{11\pi}{6} - \frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{11\pi}{6} - \frac{3\pi}{4} \right) \right) = \frac{1}{3} \left(\cos \frac{13\pi}{12} + i \sin \frac{13\pi}{12} \right) = \frac{1}{3}e^{\frac{13\pi i}{12}},$$

$$z_1^{10} = 2^{10} \cdot \left(\cos \left(10 \cdot \frac{11\pi}{6} \right) + i \sin \left(10 \cdot \frac{11\pi}{6} \right) \right) = 1024 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 1024e^{\frac{\pi i}{3}}.$$

$$\omega_k = \sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{6} \left(\cos \frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3} \right) = \sqrt[3]{6}e^{\frac{3\pi/4 + 2\pi k i}{3}}, k = 0, 1, 2.$$

В частном случае, если значение $k=0$, то $\omega_0 = \sqrt[3]{6} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt[3]{6} e^{\frac{\pi}{4}i}$.

Если же значение $k=1$, то $\omega_1 = \sqrt[3]{6} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right) = \sqrt[3]{6} e^{\frac{11\pi}{12}i}$. Если $k=2$, то

$$\omega_2 = \sqrt[3]{6} \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right) = \sqrt[3]{6} e^{\frac{19\pi}{12}i}.$$

1.2.3 Решить уравнение $z^2 + 6z + 13 = 0$.

Решение. $D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = -16 = 16i^2$, $z_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{16i^2}}{2} = \frac{-6 \pm 4i}{2} = -3 \pm 2i$.

1.2.4 Найти корни многочлена $z^6 + 2z^3 + 1$ и разложить его на множители.

Решение. Так как $z^6 + 2z^3 + 1 = (z^3 + 1)^2$, то корнями этого многочлена являются корни третьей степени из числа $-1 = 1 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi)$: $\omega_1 = -1$, $\omega_0 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\omega_2 = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$. При этом каждый корень имеет кратность $k=2$. Разложение многочлена на линейные множители имеет вид: $z^6 + 2z^3 + 1 = (z+1)^2 \left(z - \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)^2 \left(z - \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)^2$.

1.3 Задания для решения на практическом занятии

1.3.1 Выполнить указанные операции, представив результат в алгебраической форме: а) $(2-4i) \cdot (5+3i) + 7i$; б) $(6+i) \cdot (3-7i) - 2i$; в) $(3-2i)^2 + (1+i)^2$; г) $(3-i)^3 + (3+i)^3$; д) $(i-3i^2)^2 + (4i^3+i^2)^2$; е) $\frac{2-i}{3+i}$; ж) $\frac{1}{5-i} + \frac{1}{1+5i}$; з) $\left(\frac{i^7+3}{i^{19}+2} \right)^2$.

1.3.2 Найти действительные решения уравнения:

$$12((2x+1) \cdot (1+i) + (x+y) \cdot (3-2i)) = 17 + 6i.$$

1.3.3 Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} (3-i)z_1 + (4+2i)z_2 = 1+3i, \\ (4+2i)z_1 - (2+3i)z_2 = 7. \end{cases}$$

1.3.4 Следующие комплексные числа представить в тригонометрической и показательной формах и изобразить точками на комплексной плоскости:

а) $-i$; б) $\sqrt{3}-i$; в) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$; г) $2-2\sqrt{3}i$; д) $\sin \frac{\pi}{12} + i \cos \frac{\pi}{12}$; е) $-\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}$.

1.3.5 Найти $z_1 \cdot z_2$, z_2/z_1 , z_1^8 , $\sqrt[4]{z_2}$, если $z_1 = 2(\cos \pi/12 + i \sin \pi/12)$, $z_2 = 16(\cos 23\pi/12 + i \sin 23\pi/12)$.

1.3.6 Найти $z_1 \cdot z_2$, z_1/z_2 , z_1^{12} , $\sqrt[5]{z_2}$, если $z_1 = 4e^{\frac{5\pi}{12}i}$, $z_2 = 32e^{\frac{\pi}{3}i}$.

1.3.7 Найти и изобразить на комплексной плоскости все корни 2-й, 3-й и 4-й степени из единицы.

1.3.8 Найти решения уравнений: а) $z^2 - 2z + 5 = 0$; б) $4z^2 + 2z + 1 = 0$; в) $z^2 + (5 - 2i)z + 5 - 5i = 0$; г) $z^4 + 5z^2 + 4 = 0$; д) $z^3 + 64 = 0$; е) $z^6 + 729 = 0$.

1.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

1.4.1 Заданы два комплексных числа $z_1 = \sin \alpha + i \cos \alpha$ и $z_2 = \sin \beta - i \cos \beta$, где $\alpha = n\pi/6$, $\beta = n\pi/4$, n – номер варианта, причём $\alpha, \beta \in (0; 2\pi]$. Если значения углов α, β превышают угол 2π , то из полученных значений α и β исключить угол, кратный 2π , и принять полученные значения за значения углов α и β . Представить полученные числа в алгебраической, тригонометрической и показательной формах. При записи комплексных чисел в алгебраической форме найти $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, z_1^3 , z_2^2 . При записи комплексных чисел в тригонометрической форме найти $z_1 z_2$, $\frac{z_1^3}{z_2^2}$, z_1^{10} , z_2^8 . При записи комплексных чисел в показательной форме найти $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2^2}$, z_1^7 , z_2^9 . Решить квадратное уравнение $z^2 - 2nz + (n^2 + 1) = 0$. Решить кубическое уравнение $\omega^3 + (-1)^n z_1 = 0$.

2 ЧИСЛОВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ

Содержание: числовая последовательность, её монотонность и ограниченность, предел и свойства предела сходящейся числовой последовательности, правила предельного перехода для числовых последовательностей, второй замечательный предел для числовых последовательностей.

2.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Определение 2.1.1 Числовой последовательностью называется функция $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, областью определения которой является множество натуральных чисел, множеством значений – некоторое подмножество действительных чисел.

Число $f(n)$ называется n -м членом последовательности и обозначается символом x_n , а формула $x_n = f(n)$ называется формулой общего члена последовательности (x_n) .

Определение 2.1.2 Числовая последовательность (x_n) называется *возрастающей* (убывающей), если для любого натурального n выполняется неравенство $x_{n+1} > x_n$ ($x_{n+1} < x_n$).

Определение 2.1.3 Числовая последовательность (x_n) называется *неубывающей* (невозрастающей), если для любого натурального n выполняется неравенство $x_{n+1} \geq x_n$ ($x_{n+1} \leq x_n$).

Определение 2.1.4 Числовая последовательность (x_n) называется *ограниченной сверху*, если существует число M такое, что для любого натурального n выполняется неравенство $x_n \leq M$.

Определение 2.1.5 Числовая последовательность (x_n) называется *ограниченной снизу*, если существует число m такое, что для любого натурального n выполняется неравенство $x_n \geq m$.

Определение 2.1.6 Числовая последовательность (x_n) называется *ограниченной*, если она ограничена сверху и снизу, то есть если существуют числа M и m такие, что для любого натурального n выполняется неравенство $m \leq x_n \leq M$.

Теорема 2.1.1 Числовая последовательность (x_n) является ограниченной тогда и только тогда, когда существует число L такое, что для любого натурального n выполняется неравенство $|x_n| \leq L$.

Определение 2.1.7 Число a называется пределом числовой последовательности (x_n) , если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдётся такое натуральное число n_0 , зависящее от ε , что для всех натуральных чисел n больших n_0 все члены последовательности будут попадать в ε -окрестность точки a .

Используя символы математической логики, определение предела числовой последовательности записывается в виде

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \stackrel{\text{def}}{\leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0), (\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}), (\forall n > n_0) \rightarrow |x_n - a| < \varepsilon. \quad (2.1.1)$$

Определение 2.1.8 Числовая последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, в противном случае – *расходящейся*.

Свойства сходящихся последовательностей:

- 1) сходящаяся последовательность имеет единственный предел;
- 2) если последовательность сходится, то она ограничена;
- 3) любая ограниченная монотонная последовательность сходится;
- 4) любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к тому же пределу;
- 5) если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \neq 0$, то, начиная с некоторого номера N , все члены последовательности сохраняют знак числа a ;

6) если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ и $a < b$, то, начиная с некоторого номера N , выполняется неравенство $x_n < y_n$;

7) если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ и начиная с некоторого номера N , $x_n \leq y_n$, то $a \leq b$;

8) если для всех членов последовательностей (x_n) , (y_n) и (z_n) выполняется неравенство $x_n \leq z_n \leq y_n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$.

Определение 2.1.9 Числовая последовательность (α_n) называется *бесконечно малой числовой* последовательностью, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$. Числовая последовательность (x_n) называется *бесконечно большой* числовой последовательностью, если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

Теорема 2.1.2 Если числовая последовательность (α_n) является бесконечно малой числовой последовательностью, то последовательность $(1/\alpha_n)$ является бесконечно большой числовой последовательностью.

Теорема 2.1.3 Если числовая последовательность (x_n) является бесконечно большой числовой последовательностью, то последовательность $(1/x_n)$ является бесконечно малой числовой последовательностью.

Теорема 2.1.4 Для того чтобы числовая последовательность (x_n) сходилась, необходимо и достаточно, чтобы её можно представить в виде некоторого числа и бесконечно малой числовой последовательности.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \leftrightarrow x_n = a + \alpha_n.$$

Определение 2.1.10 Суммой, разностью, произведением и частным последовательностей (x_n) и (y_n) называются последовательности $(x_n + y_n)$, $(x_n - y_n)$, $(x_n \cdot y_n)$, (x_n/y_n) соответственно (при частном предполагается, что все члены последовательности (y_n) отличны от нуля). *Произведением последовательности (x_n) на число α* называется числовая последовательность $(\alpha \cdot x_n)$, полученная путём умножения на α каждого члена последовательности (x_n) .

Теорема 2.1.5 Если числовые последовательности (x_n) и (y_n) сходятся и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, то:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \pm b;$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \cdot b;$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha \cdot x_n) = \alpha \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha \cdot a;$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0 \right] = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = \frac{a}{b}.$$

В теореме 2.1.5 пункты 1) и 2) верны для любого конечного числа слагаемых и сомножителей. При вычислении пределов условия теоремы могут не выполняться, то есть возникают неопределённости вида $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$, $\left(\frac{0}{0} \right)$, $(0 \cdot \infty)$, $(\infty - \infty)$, (1^∞) , (0^0) , (∞^0) . Раскрыть неопределённость – означает найти предел.

Приведём признаки сходимости числовых последовательностей.

Теорема 2.1.6 Если числовая последовательность не убывает и ограничена сверху, то она сходится.

Теорема 2.1.7 Если числовая последовательность не возрастает и ограничена снизу, то она сходится.

Данные признаки применяются для доказательства *второго замечательного предела*.

Второй замечательный предел: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$, где $e = 2,71828182845...$

Второй замечательный предел используется при раскрытии неопределённости типа (1^∞) .

2.2 Примеры решения типовых задач

2.2.1 Написать первые четыре члена числовой последовательности, общий член которой задан формулой $x_n = (-1)^{n-1} \cdot n^2$.

Решение. Полагая в данной формуле $n = 1, 2, 3, 4$, находим первые четыре члена числовой последовательности: $x_1 = (-1)^{1-1} \cdot 1^2 = 1$, $x_2 = (-1)^{2-1} \cdot 2^2 = -4$, $x_3 = (-1)^{3-1} \cdot 3^2 = 9$, $x_4 = (-1)^{4-1} \cdot 4^2 = -16$.

2.2.2 Написать формулу общего члена последовательности:
 $2, \frac{4}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \frac{2}{81}, \frac{4}{243}, \dots$

Решение. Каждый член последовательности представляет собой дробь, числитель которой равен двойке для членов с нечётными номерами и четырём для членов с чётными номерами, а знаменатель – соответствующей степени числа три. Следовательно, числитель можно представить формулой $3 + (-1)^n$, а знаменатель – формулой 3^{n-1} , поэтому формула общего члена числовой последовательности имеет вид: $a_n = \frac{3 + (-1)^n}{3^{n-1}}$.

2.2.3 Доказать, что последовательность $x_n = \frac{n-1}{n}$ является возрастающей.

Решение. Рассмотрим разность $x_{n+1} - x_n$. Имеем

$$x_{n+1} - x_n = \frac{(n+1)-1}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{n^2 - n^2 + 1}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0.$$

Таким образом, при любом натуральном n справедливо неравенство $x_{n+1} > x_n$, и, следовательно, последовательность является возрастающей.

2.2.4 Доказать, что последовательность $x_n = -(n+1)$ является убывающей.

Решение. Рассмотрим частное x_{n+1}/x_n . Имеем

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{-(1+(n+1))}{-(n+1)} = \frac{-n-2}{-n-1} = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} > 1.$$

Так как все члены последовательности отрицательны, то при любом натуральном n из неравенства $x_{n+1}/x_n > 1$ получаем, что $x_{n+1} < x_n$.

Следовательно, заданная последовательность является убывающей.

2.2.5 Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = \frac{n-2}{n+1}$ является ограниченной.

Решение. Так как $x_n = \frac{n-2}{n+1} = \frac{n+1-3}{n+1} = 1 - \frac{3}{n+1} < 1$, то есть при любом натуральном n последовательность ограничена сверху.

Рассмотрим разность $x_{n+1} - x_n$. Имеем

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n-2}{n+1} - \frac{n-1}{n+2} = \frac{-3}{(n+1) \cdot (n+2)} < 0,$$

то есть при любом натуральном n справедливо неравенство $x_n < x_{n+1}$. Поэтому $x_1 = -1/2$ – наименьший член этой последовательности. Таким образом, для любого натурального n справедливо неравенство $x_n \geq -1/2$, то есть последовательность (x_n) ограничена снизу. Итак, последовательность (x_n) ограничена сверху и ограничена снизу, поэтому она является ограниченной последовательностью.

2.2.6 Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = n^2$ не является ограниченной.

Решение. Предположим, что данная последовательность является ограниченной сверху, то есть пусть существует такое число M , что для любого n справедливо неравенство $n^2 \leq M$. Из последнего неравенства следует, что $M > 0$. Рассмотрим целое число k , большее, чем число $\sqrt{M}$; положим, например, $k = [\sqrt{M}] + 1$, тогда $k^2 = ([\sqrt{M}] + 1)^2 > (\sqrt{M})^2 = M$. Итак, получено противоречие: при предположении, что существует такое число M , что для любого натурального n справедливо неравенство $n^2 \leq M$, в то же время оказалось, что

существует номер $k = [\sqrt{M}] + 1$ такой, что $a_k = k^2 = ([\sqrt{M}] + 1)^2 > M$. Следовательно, последовательность с общим членом $x_n = n^2$ не является ограниченной сверху, и тем самым доказано, что она не является ограниченной.

2.2.7 Доказать, что число 2 является пределом числовой последовательности с общим членом $x_n = \frac{2n-1}{n+3}$, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n+3} = 2$.

Решение. Надо доказать, что для любого положительного числа ε найдётся номер N такой, что для любого натурального $n > N$ справедливо неравенство

$$\left| \frac{2n-1}{n+3} - 2 \right| < \varepsilon.$$

Так как $\left| \frac{2n-1}{n+3} - 2 \right| = \left| \frac{-4}{n+3} \right| = \frac{4}{n+3}$, то неравенство $\left| \frac{2n-1}{n+3} - 2 \right| < \varepsilon$ равносильно неравенству $\frac{4}{n+3} < \varepsilon$, то есть неравенству $n > \frac{4-3\varepsilon}{\varepsilon}$. Если взять некоторое натуральное число N , больше числа $\frac{4-3\varepsilon}{\varepsilon}$, например, число $\left[\frac{4-3\varepsilon}{\varepsilon} \right] + 1$, то для каждого натурального числа n , больше этого числа N , выполнено неравенство

$$\left| \frac{2n-1}{n+3} - 2 \right| = \frac{4}{n+3} < \frac{4}{N+3} = \frac{4}{\left[\frac{4-3\varepsilon}{\varepsilon} \right] + 1} < \frac{4}{4/\varepsilon} = \varepsilon,$$

а это означает, что для произвольного числа $\varepsilon > 0$ нашёлся номер $N(\varepsilon) = \left[\frac{4-3\varepsilon}{\varepsilon} \right] + 1$ такой, что для любого $n > N$ справедливо неравенство $\left| \frac{2n-1}{n+3} - 2 \right| < \varepsilon$. Следовательно, число 2 является пределом заданной последовательности, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n+3} = 2$.

2.2.8 Вычислить предел числовой последовательности $x_n = \frac{4n^3 + 5n + 1}{7n^3 + n^2 - 2}$.

Решение. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 + 5n + 1}{7n^3 + n^2 - 2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \left[\begin{array}{l} \text{разделим числитель и} \\ \text{знаменатель на их старшую} \\ \text{степень переменной } n \end{array} \right] =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{5}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{7 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^3}} = \frac{4 + 0 + 0}{7 + 0 - 0} = \frac{4}{7}.$$

2.2.9 Вычислить предел числовой последовательности $y_n = \frac{5n^4 - 3n^2 + 3}{8n^7 + n^3 + 9}$.

Решение. $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^4 - 3n^2 + 3}{8n^7 + n^3 + 9} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{n^3} - \frac{3}{n^5} + \frac{3}{n^7}}{8 + \frac{1}{n^4} + \frac{9}{n^7}} = \frac{0}{8} = 0$.

2.2.10 Вычислить предел числовой последовательности $z_n = \frac{2 - 3n^4 - 4n^3}{6n^2 + 5}$.

Решение. $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - 3n^4 - 4n^3}{6n^2 + 5} = \left(\frac{-\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n^4} - 3 - \frac{4}{n}}{\frac{6}{n^2} + \frac{5}{n^4}} = \left(\frac{-3}{0} \right) = -\infty$.

2.2.11 Вычислить предел числовой последовательности $a_n = \sqrt{n^2 + 9n} - n$.

Решение. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 9n} - n) = \left[\begin{array}{l} \text{домножаем и делим на выраже-} \\ \text{ние, сопряженное данному} \end{array} \right] =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 9n} - n) \cdot (\sqrt{n^2 + 9n} + n)}{\sqrt{n^2 + 9n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n}{\sqrt{n^2 + 9n} + n} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{\sqrt{1 + \frac{9}{n}} + 1} = \frac{9}{2}$.

2.2.12 Вычислить предел числовой последовательности $b_n = \left(\frac{3n-5}{3n-9} \right)^{6n+3}$.

Решение. Для нахождения предела числовой последовательности воспользуемся вторым замечательным пределом $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-5}{3n-9} \right)^{6n+3} = (1^\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3n-5}{3n-9} - 1 \right)^{6n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{3n-9} \right)^{6n+3} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{3n-9}{4}} \right)^{\frac{3n-9}{4}} \right)^{\frac{4(6n+3)}{3n-9}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{24n+12}{3n-9}} = e^{\frac{24}{3}} = e^8. \end{aligned}$$

2.3 Задания для решения на практическом занятии

2.3.1 Написать первые шесть членов числовой последовательности:

2.3.1.1 $x_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \left(\frac{5}{6} \right)^n$. **2.3.1.2** $x_n = \frac{2^n}{n!}$. **2.3.1.3** $x_n = \sin \frac{\pi(n-1)}{4}$.

2.3.2 Найти формулу общего члена числовой последовательности:

2.3.2.1 $\frac{1}{2}, \frac{3}{4 \cdot 5}, \frac{5}{6 \cdot 25}, \frac{7}{8 \cdot 125}, \frac{9}{10 \cdot 625}, \dots$

2.3.2.2 $\frac{3}{1 \cdot 4}, \frac{5}{4 \cdot 9}, \frac{7}{9 \cdot 16}, \frac{9}{16 \cdot 25}, \frac{11}{25 \cdot 36}, \dots$

2.3.2.3 $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{6}, \frac{5}{24}, \frac{6}{120}, \frac{7}{720}, \frac{8}{5040}, \dots$

2.3.3 Доказать, что последовательность $x_n = 2^{n-1}$ является возрастающей.

2.3.4 Доказать, что последовательность $x_n = \frac{2n+3}{3n-2}$ является убывающей.

2.3.5 Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = \frac{n+4}{n+3}$ является ограниченной.

2.3.6 Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = (-1)^n n^3$ не является ограниченной.

2.3.7 Доказать, что число $3/2$ является пределом числовой последовательности с общим членом $x_n = \frac{3n^2-2}{2n^2-3}$, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2-2}{2n^2-3} = \frac{3}{2}$.

2.3.8 Доказать, что число 1 не является пределом числовой последовательности с общим членом $x_n = \frac{3n-1}{n+5}$, $n \in \mathbb{N}$.

2.3.9 Вычислить пределы:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3-2n+3}{2n^3+n^2-1}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-n-3n^3}{6n^3+2n^2-4}$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+1}{5n^4-3n^2}$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4+3n^3+1}{5n^3-3n-8}$.

2.3.10 Вычислить пределы:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2+8}-2n)$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+9}-\sqrt{n-9})$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{n^3-1})$.

2.3.11 Вычислить пределы:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+4}{2n-3} \right)^{5n-2}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n^2-1}{6n^2+5} \right)^{2n+3}$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{3n-2} \right)^{4n}$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n+7}{4n-8} \right)^{n-1}$.

2.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

2.4.1 Вычислить предел числовой последовательности.

2.4.1.1 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{9n^2+1}-3n)$. 2.4.1.2 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{9n^2+n}-3n)$.

2.4.1.3 $\lim_{n \rightarrow \infty} 3n(\sqrt{16n^2+5}-4n)$. 2.4.1.4 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{16n^2+2n}-4n)$.

2.4.1.5 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n-2)(\sqrt{9n^2+8}-3n)$. 2.4.1.6 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{25n^2+3n}-5n)$.

2.4.1.7 $\lim_{n \rightarrow \infty} 4n(\sqrt{49n^2+2}-7n)$. 2.4.1.8 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{36n^2+n}-6n)$.

2.4.1.9	$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \left(\sqrt{4n^2 - 9} - 2n \right).$	2.4.1.10	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4n^2 + 3} - 2n \right).$
2.4.1.11	$\lim_{n \rightarrow \infty} (n-7) \left(\sqrt{9n^2 + 3} - 3n \right).$	2.4.1.12	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(\sqrt{81n^2 + n} - 9n \right).$
2.4.1.13	$\lim_{n \rightarrow \infty} (5n-2) \left(\sqrt{n^2 - 4} - n \right).$	2.4.1.14	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{81n^2 - 5n} - 9n \right).$
2.4.1.15	$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+4) \left(\sqrt{n^2 + 16} - n \right).$	2.4.1.16	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(\sqrt{n^2 - 2} - n \right).$
2.4.1.17	$\lim_{n \rightarrow \infty} (n-2) \left(\sqrt{9n^2 + 3} - 3n \right).$	2.4.1.18	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{9n^2 - 7n} - 3n \right).$
2.4.1.19	$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+9) \left(\sqrt{9n^2 - 1} - 3n \right).$	2.4.1.20	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n} \left(\sqrt{2n^2 + 3n} - \sqrt{2n} \right).$
2.4.1.21	$\lim_{n \rightarrow \infty} (9n-1) \left(\sqrt{n^2 + 25} - n \right).$	2.4.1.22	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{25n^2 + 3n} - 5n \right).$
2.4.1.23	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(\sqrt{9n^2 + 3} - 3n \right).$	2.4.1.24	$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\sqrt{81n^3 + 3n} - 9\sqrt{n^3} \right).$
2.4.1.25	$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+12) \left(\sqrt{n^2 + 3} - n \right).$	2.4.1.26	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{15n^2 + 3n} - \sqrt{15} \cdot n \right).$
2.4.1.27	$\lim_{n \rightarrow \infty} (n-9) \left(\sqrt{4n^2 + 1} - 2n \right).$	2.4.1.28	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{32n^2 + 3n} - 4\sqrt{2} \cdot n \right).$
2.4.1.29	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{2n} \left(\sqrt{81n^2 + 1} - 9n \right).$	2.4.1.30	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{51n^2 + 5n} - \sqrt{51} \cdot n \right).$

3 ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Содержание: предел функции в точке и на бесконечности, свойства предела функции, правила предельного перехода для функций, замечательные пределы, бесконечно малые и бесконечно большие функции.

3.1 Теоретический материал по теме практических занятий

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой проколотой δ -окрестности точки x_0 , то есть на множестве $\overset{o}{U}_\delta(x_0) = \{x | 0 < |x - x_0| < \delta\}$. В точке x_0 значение функции $y = f(x)$ может быть не определено. Дадим определения Коши и Гейне предела функции в точке.

Определение 3.1.1 Число a называется *пределом функции* $y = f(x)$ в точке x_0 , если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдётся такое положительное число δ , зависящие от ε , что для всех чисел x из проколотой δ -окрестности точки x_0 , все значения функции будут попадать в ε -окрестность точки a .

Используя символы математической логики, определение предела функции в точке по Коши записывается в виде

$$a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \stackrel{\text{def}}{\leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0), (\exists \delta(\varepsilon) > 0), (\forall x: 0 < |x - x_0| < \delta) \rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon. \quad (3.1.1)$$

Определение 3.1.2 Число a называется *пределом функции* $y = f(x)$ в точке x_0 , если для любой последовательности точек $x_n \in \overset{o}{U}_\delta(x_0)$, сходящейся к точке x_0 , последовательность соответствующих значений функций $f(x_n)$ сходится к точке a .

Используя символы математической логики, определение предела функции в точке по Гейне записывается в виде

$$a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \stackrel{\text{def}}{\leftrightarrow} \forall x_n : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a. \quad (3.1.2)$$

Определение 3.1.3 Предел функции $y = f(x)$ при значении $x \rightarrow x_0$ называется *бесконечным*, если для любого положительного числа M существует положительное число δ , такое, что для всех значений x , удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, будет выполняться неравенство $|f(x)| > M$.

Если функция $y = f(x)$ стремится к бесконечности при значении $x \rightarrow x_0$, то её называют *бесконечно большой функцией* и пишут $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \leftrightarrow (\forall M > 0), (\exists \delta > 0), (\forall x: 0 < |x - x_0| < \delta) \rightarrow |f(x)| > M. \quad (3.1.3)$$

Если функция $y = f(x)$ стремится к бесконечности при значении $x \rightarrow x_0$ и при это принимает только положительные или только отрицательные значения, то записывают соответственно: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ или $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

Определение 3.1.4 Число a называется *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, если для любого положительного ε существует положительное число M , такое, что неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$ выполняется для всех значений переменной x , при которых $x > M$:

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0), (\exists M > 0), (\forall x > M) \rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon. \quad (3.1.4)$$

Геометрически это означает, что график функции $y = f(x)$ будет находиться в полосе, ограниченной прямыми $y = a - \varepsilon$ и $y = a + \varepsilon$, при любом $x > M$. Аналогично определяется предел функции при $x \rightarrow -\infty$ и $x \rightarrow \infty$.

Существуют функции, которые при неограниченном увеличении аргумента также неограниченно возрастают. В этом случае пишут $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

Свойства предела функции:

- 1) если функция имеет предел в точке, то он единственен;
- 2) функция, имеющая предел в точке, ограничена в некоторой проколотой окрестности этой точки;
- 3) если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a > 0 (< 0)$, то существует такая проколотая окрестность точки x_0 , в которой $f(x) > 0 (f(x) < 0)$;
- 4) если $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = a$ и в некоторой проколотой окрестности точки x_0 имеет место неравенство $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$.

Если в бесконечно малой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $x < x_0$, то предел функции называется левосторонним пределом $f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$, если же выполняется неравенство $x > x_0$, то правосторонним пределом $f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$.

Теорема 3.1.1 Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют конечные пределы в точке x_0 , то есть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = b$, то:

- 1) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = a \pm b$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = a \cdot b$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha \cdot f(x)) = \alpha \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha \cdot a$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{\varphi(x)} \right) = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \neq 0 \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x)} = \frac{a}{b}$.

В теореме 3.1.1 пункты 1) и 2) верны для любого конечного числа слагаемых и сомножителей. При вычислении пределов условия теоремы могут не выполняться, то есть возникают неопределённости вида $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$, $\left(\frac{0}{0} \right)$, $(0 \cdot \infty)$, $(\infty - \infty)$, (1^∞) , (0^0) , (∞^0) . Раскрыть неопределённость – означает найти предел.

Первый замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Второй замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$ или $\lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e$.

Третий замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$.

Четвёртый замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$.

Пятый замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$.

При вычислении пределов вида $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{\varphi(x)}$, где $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty$, используется второй замечательный предел.

Определение 3.1.5 Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно большой функцией* в точке x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

Определение 3.1.6 Функция $y = \alpha(x)$ называется *бесконечно малой функцией* в точке x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$.

Теорема 3.1.2 Если $\alpha(x)$ бесконечно малая функция, то $1/\alpha(x)$ является бесконечно большой функцией.

Теорема 3.1.3 Если $f(x)$ бесконечно большая функция, то $1/f(x)$ является бесконечно малой функцией.

Теорема 3.1.4 Для того чтобы число a было пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0 , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $f(x) = a + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция в точке x_0 .

$$a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leftrightarrow \left(f(x) = a + \alpha(x), \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0 \right).$$

Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *сравнимыми*, если существует хотя бы один из пределов $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C$ или $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = C_1$. Если $C = 0$, то $\alpha(x)$ называют *бесконечно малой более высокого порядка малости* чем $\beta(x)$. При значении $C \neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми одного порядка*.

Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ в точке x_0 называются *эквивалентными бесконечно малыми функциями*: $\alpha(x) \sim \beta(x)$. Например, в точке $x = 0$ эквивалентными будут функции: $\sin cx \sim cx$, $\operatorname{tg} cx \sim cx$, $\arcsin cx \sim cx$, $\operatorname{arctg} cx \sim cx$, $1 - \cos x \sim x^2/2$, $e^x - 1 \sim x$, $a^x - 1 \sim x \ln a$, $\ln(1+x) \sim x$, $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \sim x$, $(1+x)^{ax} \sim ax + 1$, $\operatorname{sh} x \sim x$, $\operatorname{ch} x - 1 \sim x^2/2$.

Теорема 3.1.5 Предел отношения бесконечно малых функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ в точке равен пределу отношения эквивалентно им бесконечно малых функций $\alpha^*(x)$ и $\beta^*(x)$, то есть справедливы предельные равенства:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta^*(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha^*(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha^*(x)}{\beta^*(x)}. \quad (3.1.5)$$

3.2 Примеры решения типовых задач

3.2.1 Доказать, исходя из определения предела функции, что $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2$. Областью определения функции является множество действительных чисел. Пусть ε – произвольное положительное число. Требуется доказать, что можно подобрать такое $\delta > 0$, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $|x - 2| < \delta$, будет выполняться неравенство $|x^2 - 4| < \varepsilon$.

Если $|x - 2| < \delta$, то $|x + 2| = |x - 2 + 4| \leq |x - 2| + 4 < \delta + 4$ и $|x^2 - 4| = |x - 2| \times |x + 2| < \delta \cdot (\delta + 4)$. Для выполнения неравенства $|x^2 - 4| < \varepsilon$ достаточно потребовать, чтобы $\delta \cdot (\delta + 4) = \varepsilon$, то есть $\delta^2 + 4\delta - \varepsilon = 0$, откуда $\delta = -2 + \sqrt{4 + \varepsilon}$ (второй корень $-2 - \sqrt{4 + \varepsilon}$ не подходит, так как δ должно быть положительным).

Таким образом, для любого ε найдено такое δ , что из неравенства $|x - 2| < \delta$ следует неравенство $|x^2 - 4| < \varepsilon$, то есть $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$.

3.2.2 Доказать, исходя из определения предела, что $\lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{9x^2 - 1}{3x - 1} = 2$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{9x^2 - 1}{3x - 1}$. Областью определения функции является множество действительных чисел, за исключением точки $x = 1/3$, то есть функция определена в проколоте окрестности этой точки. Пусть ε – произвольное положительное число. Требуется доказать, что можно подобрать такое $\delta > 0$, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $|x - \frac{1}{3}| < \delta$, будет выполняться неравенство $\left| \frac{9x^2 - 1}{3x - 1} - 2 \right| < \varepsilon$.

Последнее неравенство равносильно неравенству $|3x + 1 - 2| < \varepsilon$ или $0 < |x - \frac{1}{3}| < \frac{\varepsilon}{3}$, так как $x \neq \frac{1}{3}$. Следовательно, в качестве δ можно выбрать число $\delta = \varepsilon/3$. Таким образом, для любого положительного ε найдено такое $\delta = \varepsilon/3$, что из неравенства $0 < |x - \frac{1}{3}| < \frac{\varepsilon}{3} = \delta$ будет выполняться неравенство

$$\left| \frac{9x^2 - 1}{3x - 1} - 2 \right| < \varepsilon, \text{ то есть } \lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{9x^2 - 1}{3x - 1} = 2.$$

3.2.3 Доказать, исходя из определения предела функции, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = 1$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$. Областью определения функции является множество действительных чисел. Пусть ε – произвольное положительное число. Требуется доказать, что можно подобрать такое $M > 0$, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $|x| > M$, будет выполняться неравенство $\left| \frac{x^2}{x^2 + 1} - 1 \right| < \varepsilon$.

Если $|x| > M$, то $x^2 > M^2$ и

$$\left| \frac{x^2}{x^2 + 1} - 1 \right| = \frac{1}{x^2 + 1} < \frac{1}{M^2 + 1} < \frac{1}{M^2}.$$

Следовательно, для выполнения неравенства $\left| \frac{x^2}{x^2 + 1} - 1 \right| < \varepsilon$ достаточно найти число M из условия $1/M^2 = \varepsilon$, то есть $M = 1/\sqrt{\varepsilon}$. Итак, для любого положительного числа ε найдено такое число $M = 1/\sqrt{\varepsilon}$, что из выполнения неравенства $|x| > M$ следует неравенство $\left| \frac{x^2}{x^2 + 1} - 1 \right| < \varepsilon$, то есть доказано, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = 1.$$

3.2.4 Вычислить предел функции $f(x) = \frac{2x - 5}{7x + 1}$ в точке $x_0 = 3$.

Решение. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 5}{7x + 1} = \frac{2 \cdot 3 - 5}{7 \cdot 3 + 1} = \frac{1}{22}.$

3.2.5 Вычислить предел функции $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^3 - 8}$ в точке $x_0 = 2$.

Решение. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^3 - 8} = \left(\frac{0}{0} \right) = \left[\begin{array}{l} \text{раскладываем} \\ \text{числитель и знаменатель} \\ \text{на множители} \end{array} \right] =$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x - 1) \cdot (x - 2)}{(x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 1}{x^2 + 2x + 4} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

3.2.6 Вычислить предел функции $f(x) = \frac{\sqrt{5x + 1} - 4}{3x^2 - 10x + 3}$ в точке $x_0 = 3$.

Решение. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x + 1} - 4}{3x^2 - 10x + 3} = \left(\frac{0}{0} \right) =$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{5x+1}-4) \cdot (\sqrt{5x+1}+4)}{(3x-1) \cdot (x-3) \cdot (\sqrt{5x+1}+4)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x+1-16}{(3x-1) \cdot (x-3) \cdot (\sqrt{5x+1}+4)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{5 \cdot (x-3)}{(3x-1) \cdot (x-3) \cdot (\sqrt{5x+1}+4)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{5}{(3x-1) \cdot (\sqrt{5x+1}+4)} = \frac{5}{8 \cdot 8} = \frac{5}{64}.
\end{aligned}$$

3.2.7 Вычислить предел функции $f(x) = x^{\frac{5}{2}} \cdot (\sqrt{x^5+4} - \sqrt{x^5-4})$ при значении $x \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned}
\text{Решение. } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^{\frac{5}{2}} \cdot (\sqrt{x^5+4} - \sqrt{x^5-4}) \right) = (\infty - \infty) = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{5}{2}} \cdot (\sqrt{x^5+4} - \sqrt{x^5-4}) \cdot (\sqrt{x^5+4} + \sqrt{x^5-4})}{(\sqrt{x^5+4} + \sqrt{x^5-4})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8 \cdot x^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{x^5+4} + \sqrt{x^5-4}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8}{\sqrt{1+\frac{4}{x^5}} + \sqrt{1-\frac{4}{x^5}}} = \frac{8}{1+1} = 4.
\end{aligned}$$

3.2.8 Вычислить предел функции $f(x) = \frac{\cos 14x - \cos 8x}{x^2}$ в точке $x_0 = 0$.

Решение. При нахождении предела функции воспользуемся первым замечательным пределом $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 14x - \cos 8x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 3x \sin 11x}{x^2} = \\
&= -2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3 \cdot \frac{\sin 11x}{11x} \cdot 11 \right) = -2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 11 = -66.
\end{aligned}$$

3.2.9 Вычислить предел функции $f(x) = (\cos 4x)^{\frac{1}{x^2}}$ в точке $x_0 = 0$.

Решение. Для определения предела функции воспользуемся первым и вторым замечательными пределами.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 4x)^{\frac{1}{x^2}} = (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos 4x - 1)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left((1 + \cos 4x - 1)^{\frac{1}{\cos 4x - 1}} \right)^{\frac{\cos 4x - 1}{x^2}} = \\
&= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - 1}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 2x}{x^2}} = e^{-2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right)^2 \cdot 4} = e^{-2 \cdot 1^2 \cdot 4} = e^{-8} = \frac{1}{e^8}.
\end{aligned}$$

3.2.10 Доказать, что функции $\frac{3x^2}{2x+5}$ и x^2 , бесконечно малые при $x \rightarrow 0$,

являются бесконечно малыми функциями одного порядка.

Решение. Найдём предел отношения двух данных функций:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3x^2}{2x+5} : x^2 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{2x+5} = \frac{3}{2} \neq 0.$$

Данные бесконечно малые функции есть бесконечно малые одного порядка.

3.2.11 Доказать, что порядок функции $\frac{5x^6}{2x^2-7}$ выше, чем порядок функции x^4 при $x \rightarrow 0$.

Решение. Находим предел отношения заданных функций:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5x^6}{2x^2-7} : x^4 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2}{2x^2-7} = \frac{0}{-7} = 0,$$

то есть функция $\frac{5x^6}{2x^2-7}$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем функция x^4 .

3.2.12 Доказать, что функция $1 - \cos x$ будет бесконечно малой второго порядка относительно функции x при $x \rightarrow 0$.

Решение. Найдём предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(x/2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x/2)}{x/2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin(x/2) = 1 \cdot 0 = 0.$$

Найдём теперь $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(x/2)}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x/2)}{x/2} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Следовательно, функция $1 - \cos x$ есть бесконечно малая второго порядка относительно x при $x \rightarrow 0$.

3.2.13 Доказать, что бесконечно малые при $x \rightarrow 0$ функции $\frac{3x}{3+x^2}$ и $\frac{3x}{3+x}$ эквивалентны.

Решение. Найдём предел отношения двух данных функций:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3x}{3+x^2} : \frac{3x}{3+x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3+x}{3+x^2} = 1.$$

Следовательно, $\frac{3x}{3+x^2} \sim \frac{3x}{3+x}$ при $x \rightarrow 0$.

3.2.14 Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{e^{-5x} - 1}$, используя эквивалентные бесконечно малые функции.

Решение. Поскольку $\operatorname{arctg} 2x \sim 2x$ при $x \rightarrow 0$, а $e^{-5x} - 1 \sim (-5x)$, то

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{e^{-5x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{-5x} = -\frac{2}{5}.$$

3.3 Задания для решения на практических занятиях

3.3.1 Пользуясь определением предела функции, доказать, что:

$$3.3.1.1 \quad \lim_{x \rightarrow 3} (4x - 7) = 5. \quad 3.3.1.2 \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 - 36}{x + 3} = -24. \quad 3.3.1.3 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{x + 2} = 2.$$

3.3.2 Вычислить пределы:

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 3x + 4}{x^3 + x + 2}; \quad б) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3x + 1}{2x^2 + 5x - 2}; \quad в) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 7x^2 + 2}{2x^3 - x - 12}.$$

3.3.3 Вычислить пределы:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + x - 2}; \quad б) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 5x + 2}{x^2 - x - 6}; \quad в) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 3x^2 - 4}{8 - x^3}.$$

3.3.4 Вычислить пределы:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{12}{1-x^2} \right); \quad б) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2-x} - \frac{12}{8-x^3} \right); \quad в) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x).$$

3.3.5 Вычислить пределы:

$$a) \lim_{x \rightarrow 10} \frac{\sqrt{x-1} - 3}{x^2 - 100}; \quad б) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+22} - 5}{x^2 + 3x - 18}; \quad в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{64+x} - \sqrt{64-x}}{\sqrt[3]{64+x} - \sqrt[3]{64-x}}.$$

3.3.6 Вычислить пределы:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x}{4x}; \quad б) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\sin 3x}; \quad в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x^2}; \quad г) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos 2x}{3x^2};$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 6x}{5x}; \quad е) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(7x-14)}{2x^2 - 5x + 2}; \quad ж) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x.$$

3.3.7 Вычислить пределы:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(2x-1) - \ln(2x-5)); \quad б) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 3x)^{1/x^2}; \quad в) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x})^{2/x}.$$

3.3.8 Доказать, что функции $\frac{x-1}{x+1}$ и $\sqrt{x}-1$, бесконечно малые при $x \rightarrow 1$,

являются бесконечно малыми функциями одного порядка.

3.3.9 Доказать, что порядок функции $\frac{2x^3}{x-9}$ выше, чем порядок функции

x^2 при $x \rightarrow 0$.

3.3.10 Доказать, что функция $\operatorname{tg} x - \sin x$ будет бесконечно малой третьего порядка относительно функции x при $x \rightarrow 0$.

3.3.11 Доказать, что бесконечно малые при $x \rightarrow 0$ функции x и $\ln(1 + \sqrt{x \cdot \sin x})$ эквивалентны.

3.3.12 Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 8x - \cos 3x}{\arcsin^2 5x}$, используя эквивалентные бесконечно малые функции.

3.3.13 Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x} - e^{2x}}{\sin 6x - \sin 2x}$, используя эквивалентные бесконечно малые функции.

3.3.14 Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}$, используя эквивалентные бесконечно малые функции.

3.3.15 Найти предел $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$, используя эквивалентные бесконечно малые функции.

3.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

3.4.1 Найти указанные пределы (при нахождении последнего предела своего варианта необходимо использовать бесконечно малые функции).

3.4.1.1 а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 4x^2 + 12}{5x^2 + 6x + 9}$; б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4x - 12}{3x^2 - 3x - 18}$; в) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{x+6} - 1}{x^2 - 4x - 45}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{5x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+5} \right)^{4x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{\operatorname{tg} 4x}$.

3.4.1.2 а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 13}{5x^3 + 3x - 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{4x^2 + 2x - 20}$; в) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x^2 - 9} - 4}{x^2 + 2x - 35}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x \cdot \operatorname{tg} 2x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x} \right)^{3x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sin(x-5)}{x^3 - 125}$.

3.4.1.3 а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 3x + 9}{3x^3 - 7x^2 + 2x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x - 2}{2x^2 + 2x - 4}$; в) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x^2 - 5} - 2}{x^2 + 2x - 3}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{6x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+1} \right)^{8x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x^2)}{x^3 + 7x^2}$.

3.4.1.4 а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 10}{2x^2 - 2x - 25}$; б) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + 2x - 35}{2x^2 - 3x - 35}$; в) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 - 7} - 3}{2x^2 - 7x - 4}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{5x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+7}{x+2} \right)^{x+3}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x} - 1}{\operatorname{tg} 9x}$.

3.4.1.5 а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 3}{4x^2 - 3x + 5}$; б) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 7x - 30}{x^2 + x - 6}$; в) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x-2} - 2}{x^2 + 2x - 48}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{5x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{10x+7}{10x-22} \right)^{3x+3}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\ln(1+4x)}$.

- 3.4.1.6** a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 4x + 1}{5x^2 + 2x^2 - 5}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x + 2x^2 - 3}$; в) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x^2 - 5} - 2}{x^2 - 2x - 15}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 10x - \sin x}{5x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-4}{x+1} \right)^x$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+8x)}{\sin 4x}$.
- 3.4.1.7** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 6x^2 - x}{-5x - 4}$; б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 - 3x - 7}{2x^2 + 3x + 1}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{8 \cdot x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x} \right)^{3x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\operatorname{tg} 5x}$.
- 3.4.1.8** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 3x + 1}{3x^3 - 5x^3 + 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{2x^2 - 2x - 4}$; в) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x^2 + 20} - 6}{2x^2 + 2x - 24}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 6x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{2x-1}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x}{\operatorname{tg} 2x}$.
- 3.4.1.9** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3}{3x^3 - 3x - 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - x - 14}{x^2 + 2x - 8}$; в) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{x^2 - 9} - 4}{x^2 - 3x - 40}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{5x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x+1} \right)^x$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 12x}{3x^2}$.
- 3.4.1.10** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 3x^2 + 9}{2x^2 - 4x + 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 27}{-x^2 - x + 12}$; в) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 25}{\sqrt{x^2 + 24} - 7}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 8x}{\operatorname{tg} 3x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+1} \right)^{x-1}$; е) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x^2 + x - 6}$.
- 3.4.1.11** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3x + 10}{2x^2 - 2x + 5}$; б) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{-x^2 - 2x + 35}{2x^2 + 3x - 65}$; в) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x^2 - 7} - 3}{-x^2 + 3x + 28}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^2 x}{3x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+8}{x+2} \right)^{x+6}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{1 - e^{6x}}$.
- 3.4.1.12** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 2x^2 + 13}{3x^3 + 3x - 9}$; б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 + 4x + 3}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{4x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-4}{x} \right)^{3x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 8x}{\operatorname{tg} 7x}$.
- 3.4.1.13** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 6x + 1}{4x^2 - 2x^2 - 5}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x + 3x^2 - 4}$; в) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x^2 + 11} - 6}{x^2 - 2x - 15}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x+3} \right)^{7x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{\sin 2x}$.
- 3.4.1.14** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 3x + 1}{2x^3 + 5x^3 - 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 - 2x + 8}{2x^2 - 5x + 2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 24} - 5}{3x^2 - 2x - 1}$;

3.4.1.15 r) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin 5x}{\sin x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-4} \right)^{x-4}$; e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\ln(2x+1)}$.
 a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 3x^2 - 9}{-x^2 + 4x + 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3x^2 + 27}{x^2 + x - 12}$; в) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x^2 - 7} - 3}$;
 r) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\arcsin 3x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+1} \right)^{x+1}$; e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 4x}{\sin 4x}$.
 3.4.1.16 a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{6x^2 + 2x^2 - 5}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x + x^2 - 3}$; в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 5} - 2}{x^2 - 2x - 3}$;
 r) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 2x}{x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x+3} \right)^x$; e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 8}{\operatorname{tg}(2-x)}$.
 3.4.1.17 a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x^3 + 2x^2 + 3}{x^3 - 3x + 9}$; б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-2x^2 + x + 3}{4x^2 + x - 3}$; в) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{6-x} - \sqrt{x+12}}{-x^2 + x + 12}$;
 r) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x \cdot \operatorname{tg} 2x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x+3} \right)^{5x+1}$; e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 7x}{\ln(1+3x)}$.
 3.4.1.18 a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 3x + 1}{6x^3 + 5x^3 + 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{3x^2 - 3x - 6}$; в) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 + 20} - 6}{x^2 - 2x - 8}$;
 r) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-4} \right)^{3x-4}$; e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(5x-5)}{2 \operatorname{tg}(4x-4)}$.
 3.4.1.19 a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^3 + 3x^2 - 1}{3x^2 - 6x - 9}$; б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{-x^2 - 4x - 4}{2x^2 + 3x - 2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} - 1}{-x^2 + 4x - 4}$;
 r) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x}{\sin 4x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-4}{2x+5} \right)^{x-7}$; e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\ln(1+6x)}$.
 3.4.1.20 a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 9}{3x^2 - 4x + 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 18}{-x^2 + x + 6}$; в) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{\sqrt{x^2 + 24} - 7}$;
 r) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3} \right)^{4x+1}$; e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 3x)}{\ln(1 + \sin 4x)}$.
 3.4.1.21 a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2 + 3x + 9}{-5x^3 + 7x^2 + 2x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-5x^2 + 3x + 2}{-x^2 + 3x - 2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 5} - 2}{-2x^2 + 3x + 9}$;
 r) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-2}{2x+5} \right)^{3x+1}$; e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x^2 - 4x}$.
 3.4.1.22 a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 - 2x^2 + 13}{2x^3 - 3x - 9}$; б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + x - 1}{3x^2 + x - 2}$; в) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{x+6}}{x^2 - x - 6}$;
 r) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{\sin^3 x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+9}{4x+3} \right)^{6x-1}$; e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} 5x}{\operatorname{tg} 3x}$.

- 3.4.1.23** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - x + 3}{x^2 + 3x - 4}$; б) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{-x^2 + 7x + 30}{2x^2 + x - 15}$; в) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{x+9} - 2}{x^2 - x - 30}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 2x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+1}{4x+3} \right)^{3x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} 3x - 1}{x^4 - x^2}$.
- 3.4.1.24** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 4x^2 + 11}{2x^2 - 6x + 9}$; б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - 4x - 16}{x^2 + 3x + 2}$; в) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+4} - 1}{x^2 + 4x + 3}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x-3}{6x+9} \right)^{5x-7}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{5x} - 1}{x^2 - x}$.
- 3.4.1.25** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^3 + 8x^2 - x}{-2x - 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^2 + 4x + 5}{4x^2 - 3x - 7}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sqrt{5+x} - \sqrt{5-x}}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin 3x}{5x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-4}{5x+3} \right)^{x-7}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 2x}{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}$.
- 3.4.1.26** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 3x + 9}{5x^3 + 7x^2 + 2x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 2x - 3}{3x^2 + x - 4}$; в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 5} - 2}{2x^2 - 3x - 9}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{3x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-2}{5x+4} \right)^{4x+1}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x \cdot \operatorname{sh} 4x}$.
- 3.4.1.27** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 3}{2x^3 - 3x + 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2x^2 + 5x - 2}{3x^2 + 2x - 16}$; в) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{4 - \sqrt{x^2 - 9}}{-x^2 - 3x + 40}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{x \cdot \operatorname{tg} 3x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x} \right)^{2x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 10x}{\operatorname{tg} 2x}$.
- 3.4.1.28** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2x + 3}{3x^2 + 3x - 7}$; б) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 7x + 3}{x^2 + x - 6}$; в) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x^2 - 4x - 5}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 2x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x+3} \right)^x$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{sh} 4x}$.
- 3.4.1.29** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - 8}{x^2 - 8x - 5}$; б) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{-x^2 + 3x + 10}{x^2 - x - 20}$; в) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{x^2 - 7}}{-x^2 + 2x + 8}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^2 x}{7x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x+5} \right)^{x+3}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{ch} 2x - 3}{\operatorname{tg} 6x}$.
- 3.4.1.30** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 8x^2 + x}{-2x + 4}$; б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 4x - 6}{x^2 + 3x + 2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{4 \cdot x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-1}{5x+3} \right)^{3x-7}$; е) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin(5x-5)}{\operatorname{tg}(7x-7)}$.

4 НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

Содержание: непрерывность функции в точке и на множестве, точки разрыва, односторонняя непрерывность, классификация точек разрыва, свойства функций, непрерывных на отрезке, равномерная непрерывность.

4.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Определение 4.1.1 Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0 , если выполняется три условия:

- 1) существует значение функции в этой точке $f(x_0)$;
- 2) существует предел функции в этой точке $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение 4.1.2 Точка x_0 называется *точкой разрыва* для функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из условий непрерывности функции в этой точке нарушается.

Определение 4.1.3 Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0 , если малые приращения функции вызывают малые приращения аргумента, то есть $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x) = 0$.

Определение 4.1.4 Функция называется непрерывной на интервале, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Приведём теоремы о непрерывности функций, которые характеризуют функции, полученные в результате арифметических операций над непрерывными функциями.

Теорема 4.1.1 Функция, непрерывная в точке, ограничена в некоторой окрестности этой точки.

Теорема 4.1.2 Если функция непрерывна в точке, то существует окрестность точки, в которой функция сохраняет знак значения функции в точке.

Теорема 4.1.3 Многочлен $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ является непрерывной функцией на множестве действительных чисел.

Теорема 4.1.4 Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны в точке x_0 , то в этой точке будут непрерывны функции $f_1(x) \pm f_2(x)$ и $f_1(x) \cdot f_2(x)$. Если, при этом $f_2(x_0) \neq 0$, то в точке x_0 будет непрерывна функция $f_1(x)/f_2(x)$.

Теорема 4.1.5 Если функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на некотором множестве D , а E – множество её значений, то на множестве E будет монотонна и непрерывна обратная к ней функция $x = f^{-1}(x)$.

Теорема 4.1.6 Элементарные функции непрерывны в своей области определения.

Теорема 4.1.7 (Вейерштрасса). Непрерывная на отрезке функция достигает на нём точной верхней и точной нижней граней.

Теорема 4.1.8 (Больцано – Коши о промежуточном значении). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $f(a) = A$, $f(b) = B$, $A < B$, то для любого значения C , такого, что $A \leq C \leq B$, существует точка $c \in [a; b]$, для которой $f(c) = C$.

Определение 4.1.5 Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$.

Проведём классификацию точек разрыва:

1) если $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$, то x_0 – *точка разрыва первого рода*;

2) если хотя бы один из пределов левосторонний или правосторонний в точке x_0 не существует, то x_0 – *точка разрыва второго рода*;

3) если $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$, а значение функции в этой точке не существует, то точка x_0 – *точка устранимого разрыва*.

В случае устранимого разрыва можно доопределить функцию «по непрерывности», положив значение функции в ней равным пределу функции в точке разрыва.

Определение 4.1.6 Функция $y = f(x)$ называется *кусочно-непрерывной* на отрезке $[a; b]$, если она непрерывна во всех внутренних точках отрезка за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых эта функция имеет разрыв первого рода или устранимый разрыв, и, кроме того, она имеет односторонние пределы на концах отрезка.

Функция называется *кусочно-непрерывной на числовой прямой*, если она кусочно-непрерывна на любом отрезке прямой.

Среди множества непрерывных функций выделяются равномерно непрерывные функции.

Определение 4.1.7 Функция $y = f(x)$ называется *равномерно непрерывной* на множестве $D \subset \mathbf{R}$, если для любого положительного ε найдётся положительное число δ , такое, что для любых $x_1, x_2 \in D$, удовлетворяющих условию $|x_1 - x_2| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Теорема 4.1.9 (Кантора). Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на этом отрезке.

4.2 Примеры решения типовых задач

4.2.1 Пользуясь вторым определением непрерывности функции (определение 4.1.3), доказать, что функция $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$ непрерывна в произвольной точке x .

Решение. По определению $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x) = 0$.

Находим приращение функции $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = 3 \cdot (x + \Delta x)^2 - 4 \cdot (x + \Delta x) + 2 - 3 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 2 = 3 \cdot \Delta x^2 + (6x - 4) \cdot \Delta x$.

Найдём теперь предел $\Delta f(x)$ при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3 \cdot \Delta x^2 + (6x - 4) \cdot \Delta x) = 0,$$

что и доказывает непрерывность заданной функции $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$ при любом значении x .

4.2.2 Пользуясь вторым определением непрерывности функции (определение 4.1.3), доказать, что функция $f(x) = \sin 2x$ непрерывна в произвольной точке x .

Решение. По определению $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x) = 0$.

Находим приращение функции $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = \sin 2(x + \Delta x) - \sin 2x = 2 \cdot \sin \frac{2x + 2\Delta x - 2x}{2} \cdot \cos \frac{2x + 2\Delta x + 2x}{2} = 2 \cdot \sin \Delta x \cdot \cos(2x + \Delta x)$.

Найдём теперь предел $\Delta f(x)$ при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2 \cdot \sin \Delta x \cdot \cos(2x + \Delta x)) = 2 \cdot 0 \cdot \cos 2x = 0,$$

что и доказывает непрерывность заданной функции $f(x) = \sin 2x$ при любом значении x .

4.2.3 Выяснить, является ли непрерывной в каждой точке $x_0 \in \mathbf{R}$ функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}, & x \neq 0, \\ A, & x = 0. \end{cases}$$

Решение. Пусть x_0 – любое действительное число, отличное от нуля. Тогда, так как $\lim_{x \rightarrow x_0} x^2 = x_0^2 \neq 0$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} (1 - \cos 2x) = 1 - \cos 2x_0$, то по утверждению о пределе частного имеем

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \frac{1 - \cos 2x_0}{x_0^2} = f(x_0).$$

Следовательно, данная функция непрерывна в точке $x_0 \in \mathbf{R}$, если $x_0 \neq 0$.

Пусть $x_0 = 0$. Найдём предел функции в этой точке.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin^2 x}{x^2} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = 2 \cdot 1^2 = 2.$$

Поэтому, если $f(0) = A = 2$, данная функция непрерывна в точке $x = 0$, а если $f(0) = A \neq 2$, функция не является непрерывной в точке $x = 0$.

Итак, при $A = 2$ данная функция непрерывна в каждой точке $x \in \mathbf{R}$, а при $A \neq 2$ непрерывна в каждой точке $x \in \mathbf{R}$, кроме $x = 0$.

4.2.4 Исследовать функцию $f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x < 1, \\ x^2, & \text{если } 1 \leq x \leq 4, \\ x + 3, & \text{если } x > 4, \end{cases}$ на непрерывность.

Решение. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервалах $(-\infty; 1)$, $(1; 4)$ и $(4; +\infty)$, так как на этих интервалах она задана элементарными непрерывными функциями. Следовательно, если и существуют точки разрыва, то они могут быть лишь в точках перехода от одной элементарной функции к другой, то есть в точках $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$.

В точке $x = 1$ значение функции равно $f(1) = x^2 \Big|_{x=1} = 1$. Найдём левосторонний и правосторонний пределы функции в данной точке.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1^2 = 1.$$

Так как $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = f(1) = 1$, то функция $f(x)$ в точке $x = 1$ является непрерывной.

В точке $x = 4$ значение функции равно $f(4) = x^2 \Big|_{x=4} = 16$. Найдём левосторонний и правосторонний пределы функции в данной точке.

$$\lim_{x \rightarrow 4-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} x^2 = 16, \quad \lim_{x \rightarrow 4+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} (x + 3) = 4 + 3 = 7.$$

Так как $\lim_{x \rightarrow 4-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 4+0} f(x)$, то функция $f(x)$ в точке $x = 4$ имеет разрыв первого рода.

4.2.5 Исследовать функцию $f(x) = 2^{\frac{1}{1-x}}$ в точках $x = 0$ и $x = 1$.

Решение. В точке $x = 0$ значение функции равно $f(0) = 2^{\frac{1}{1-0}} = 2$. Предел функции в этой точке $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2^{\frac{1}{1-x}} = 2$. Следовательно, справедливо равенство $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 2$. По определению непрерывности функции в точке, в точке $x = 0$ функция является непрерывной.

Исследуем функцию на непрерывность в точке $x = 1$. В этой точке значение функции не определено. Следовательно, данная точка является точкой разрыва. Найдём односторонние пределы функции в этой точке.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} 2^{\frac{1}{1-x}} = \left(2^{\frac{1}{+0}} \right) = \left(2^{+\infty} \right) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} 2^{\frac{1}{1-x}} = \left(2^{\frac{1}{-0}} \right) = \left(2^{-\infty} \right) = 0.$$

Так как левосторонний предел функции в точке $x = 1$ равен бесконечности, то в данной точке функция $f(x) = 2^{\frac{1}{1-x}}$ терпит разрыв второго рода.

4.2.6 Исследовать функцию $f(x) = \frac{\cos 4x - 1}{x^2}$.

Решение. Область определения функции: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. В точке $x = 0$ значение функции не определено. Найдём предел функции в этой точке:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - 1}{x^2} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 2x}{x^2} = -2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right)^2 \cdot 4 = -2 \cdot 1^2 \cdot 4 = -8.$$

Так как предел функции в точке $x = 0$ существует, а значение функции в этой точке не существует, то точка $x = 0$ является точкой устранимого разрыва. Доопределим функцию «по непрерывности»

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos 4x - 1}{x^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ -8, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

4.3 Задания для решения на практическом занятии

4.3.1 Пользуясь вторым определением непрерывности функции (определение 4.1.3), доказать, что функции $f(x) = 5^x$ и $\varphi(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$ непрерывны в произвольной точке x .

4.3.2 Доказать, что при $x = 3$ функция $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ непрерывна.

4.3.3 Выяснить, является ли непрерывной в каждой точке $x_0 \in \mathbf{R}$ функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 6x + \sin 2x}{5x}, & x \neq 0, \\ A, & x = 0. \end{cases}$$

4.3.4 Исследовать функцию $y = f(x)$ на непрерывность (в случае наличия точек устранимого разрыва доопределить функцию «по непрерывности»). Сделать схематический чертёж графика функции, по крайней мере, в окрестности точек разрыва.

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{если } x < 0, \\ x^3, & \text{если } 0 \leq x \leq 2, \\ x+4, & \text{если } x > 2; \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{если } x \leq -2, \\ 1+x, & \text{если } -2 < x < 4, \\ 2x-3, & \text{если } x \geq 4; \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = 5^{\frac{7}{3-4x+x^2}} + 2;$$

$$\text{г) } f(x) = \frac{2+3x}{x^2-4};$$

$$\text{д) } f(x) = \frac{\operatorname{tg}(5x-5)}{x^2-1};$$

$$\text{е) } f(x) = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}.$$

4.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

4.4.1 Исследовать функцию $y = f(x)$ на непрерывность (в случае наличия точек устранимого разрыва доопределить функцию «по непрерывности»). Сделать схематический чертёж графика функции, по крайней мере, в окрестности точек разрыва.

$$4.4.1.1 \quad f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{если } x < -1, \\ x^2, & \text{если } -1 \leq x \leq 1, \\ -x+5, & \text{если } x > 1. \end{cases} \quad 4.4.1.2 \quad f(x) = \begin{cases} -2x^2, & \text{если } x \leq 0, \\ x, & \text{если } 0 < x \leq 2, \\ 2x+1, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

$$4.4.1.3 \quad f(x) = 2^{\frac{1}{x^2-9}} - 4. \quad 4.4.1.4 \quad f(x) = \frac{5x}{x^2-9}.$$

$$4.4.1.5 \quad f(x) = \frac{\sin 3x - \sin 4x}{5x}. \quad 4.4.1.6 \quad f(x) = \frac{1/x}{1/(x-1)}.$$

$$4.4.1.7 \quad f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{если } x < 1, \\ 2x, & \text{если } 1 \leq x < 3, \\ -x+5, & \text{если } x \geq 3. \end{cases} \quad 4.4.1.8 \quad f(x) = \begin{cases} -x, & \text{если } x < 0, \\ x^3, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ x+1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

$$4.4.1.9 \quad f(x) = \frac{1-x}{x^2+2x}. \quad 4.4.1.10 \quad f(x) = 3^{\frac{1}{x^2-x}} + 2.$$

$$4.4.1.11 \quad f(x) = \frac{2/x}{1/(x+1)}. \quad 4.4.1.12 \quad f(x) = \frac{\sin 2x + \sin 3x}{4x}.$$

$$4.4.1.13 \quad f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{если } x \leq 2, \\ 5-x, & \text{если } 2 < x \leq 3, \\ x^2+2, & \text{если } x > 3. \end{cases} \quad 4.4.1.14 \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x < 0, \\ x^3, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ x+1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

$$4.4.1.15 \quad f(x) = 5 - 3^{\frac{2}{x^2-16}}. \quad 4.4.1.16 \quad f(x) = \frac{x^2}{x^2-16}.$$

$$4.4.1.17 \quad f(x) = \frac{\cos 5x - \cos x}{2x^2}. \quad 4.4.1.18 \quad f(x) = \frac{3/(x+1)}{4/(x-3)}.$$

$$4.4.1.19 \quad f(x) = \begin{cases} 2-x, & \text{если } x \leq 1, \\ x, & \text{если } 1 < x \leq 3, \\ x^2, & \text{если } x > 3. \end{cases} \quad 4.4.1.20 \quad f(x) = \begin{cases} 2-x, & \text{если } x < 1, \\ x^4, & \text{если } 1 \leq x \leq 2, \\ 7x+1, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

$$4.4.1.21 \quad f(x) = 1 + \frac{3+2x}{x^2-3x}. \quad 4.4.1.22 \quad f(x) = 9^{\frac{3}{x^2-1}} + 2.$$

$$4.4.1.23 \quad f(x) = \frac{4/x}{7/(x+5)}. \quad 4.4.1.24 \quad f(x) = \frac{\cos 6x - 1}{3x^2}.$$

$$4.4.1.25 \quad f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{если } x \leq -2, \\ -x^2, & \text{если } -2 < x < 2, \\ -x + 5, & \text{если } x \geq 2. \end{cases} \quad 4.4.1.26 \quad f(x) = \begin{cases} 3 + 2x, & \text{если } x < 1, \\ x^2, & \text{если } 1 \leq x \leq 3, \\ 2x, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

$$4.4.1.27 \quad f(x) = 6 - 2^{\frac{3}{25-x^2}}.$$

$$4.4.1.28 \quad f(x) = \frac{x}{x^2 - 36} + 5.$$

$$4.4.1.29 \quad f(x) = \frac{\cos x - 1}{4x^2}.$$

$$4.4.1.30 \quad f(x) = \frac{9/(x-3)}{2/(x+2)}.$$

5 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Содержание: производная функции, основные правила дифференцирования, таблица производных элементарных функции, производная сложной функции, производная обратных функций, производная функции, заданной неявно, логарифмическое дифференцирование.

5.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x . Если фиксированное значение аргумента x получит приращение Δx , то функция также получит приращение $\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Определение 5.1.1 Производной функции $y = f(x)$ в произвольно фиксированной точке x называется предел отношения приращения функции $\Delta f(x)$ к приращению аргумента Δx при стремлении приращения аргумента к нулю, и если этот предел существует и конечен.

$$y' = y'_x = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (5.1.1)$$

Процесс нахождения производной называется дифференцированием. Для нахождения производной от заданной функции $y = f(x)$, согласно определению, необходимо выполнить следующие действия:

1) придав фиксированному аргументу $x \in D(f)$ приращение Δx , вычислить значение функции $f(x + \Delta x) = y + \Delta y$;

2) найти соответствующее значение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$;

3) составить отношение приращения функции к приращению аргумента

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x};$$

4) найти предел данного отношения при значении $\Delta x \rightarrow 0$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Теорема 5.1.1 Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке.

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ являются дифференцируемыми функциями в точке x , то есть существует производная функций в этой точке.

Основные правила дифференцирования

- | | |
|---------------------------------|---|
| 1) $(u \pm v)' = u' \pm v';$ | 2) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v';$ |
| 3) $(C \cdot v)' = C \cdot u',$ | 4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, v \neq 0.$ |

Таблица производных основных элементарных функций

- | | |
|--|--|
| 1) $C' = 0$
$(C = \text{Const});$ | 2) $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
$(n \in \mathbb{R});$ |
| 3) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
$(a > 0, a \neq 1);$ | 4) $(e^x)' = e^x$
$(x \in \mathbb{R});$ |
| 5) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$
$(a > 0, a \neq 1, x > 0);$ | 6) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(x > 0);$ |
| 7) $(\sin x)' = \cos x$
$(x \in \mathbb{R});$ | 8) $(\cos x)' = -\sin x$
$(x \in \mathbb{R});$ |
| 9) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\right);$ | 10) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z});$ |
| 11) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(x < 1);$ | 12) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(x < 1);$ |
| 13) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(x \in \mathbb{R});$ | 14) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
$(x \in \mathbb{R});$ |
| 15) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$
$(x \in \mathbb{R});$ | 16) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
$(x \in \mathbb{R});$ |
| 17) $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$(x \in \mathbb{R});$ | 18) $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
$(x \neq 0).$ |

Геометрический смысл производной: производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 представляет собой тангенс угла наклона касательной к оси абсцисс. Исходя из геометрического смысла производной и уравнения прямой с заданным угловым коэффициентом и проходящей через точку, получаем уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; f(x_0))$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0). \quad (5.1.2)$$

Уравнение нормали (прямой, перпендикулярной касательной, проведённой в точке касания) имеет вид

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0). \quad (5.1.3)$$

Производная сложной функции $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$: $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Производная обратной функции: если для функции $y = f(x)$ существует обратная дифференцируемая функция $x = \eta(y)$, производная которой отлична от нуля, то $y'_x = \frac{1}{x'_y}$.

Говорят, что функция $y = f(x)$ неявно задана уравнением $F(x; y) = 0$, если $F(x; f(x)) = 0$. Для нахождения производной функции $y = f(x)$ необходимо последнее тождество продифференцировать по переменной x , считая левую часть тождества как сложную функцию от переменной x , а затем полученное уравнение разрешить относительно производной $f'(x)$.

Логарифмическое дифференцирование: логарифмическое дифференцирование применяется при нахождении производной показательной-степенной и дробно-рациональной функции; логарифмической производной функции $y = f(x)$ называется производная от логарифма этой функции, то есть

$$(\ln(f(x)))'_x = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Применение предварительного логарифмирования часто упрощает нахождение производной. Например, при нахождении производной показательной-степенной функции $y = u(x)^{v(x)}$ предварительное логарифмирование приводит к формуле

$$y' = u(x)^{v(x)} \cdot \ln u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u(x)^{v(x)-1} \cdot u'(x).$$

5.2 Примеры решения типовых задач

5.2.1 Найти, по определению, производную функции $f(x) = x^2$ в точке $x_0 = 4$.

Решение: находим приращение функции в заданной точке, а затем, воспользовавшись определением 5.1.1, вычисляем производную.

$$\Delta f(4) = f(4 + \Delta x) - f(4) = (4 + \Delta x)^2 - 4^2 = 16 + 8\Delta x + \Delta x^2 - 16 = 8\Delta x + \Delta x^2,$$

$$f'(4) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(4)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{8 \cdot \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (8 + \Delta x) = 8.$$

5.2.2 Доказать, что $(\cos 2x)' = -2 \cdot \sin 2x$.

Решение. Для доказательства равенства воспользуемся определением 5.1.1.

$$\begin{aligned} (\cos 2x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x + 2\Delta x) - \cos 2x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2 \cdot \sin \frac{2x + 2\Delta x + 2x}{2} \cdot \sin \frac{2x + 2\Delta x - 2x}{2}}{\Delta x} = \\ &= -2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x + \Delta x) \cdot \sin \Delta x}{\Delta x} = -2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin(2x + \Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = -2 \sin 2x \cdot 1 = -2 \sin 2x. \end{aligned}$$

5.2.3 Найти производные указанных функций:

а) $y = 7x^5 + 3\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt[3]{x}} + 4\sin x$; б) $y = \operatorname{tg} x \cdot 5^x$; в) $y = \frac{\cos x}{e^x}$.

Решение.

а) $y' = \left(7x^5 + 3\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt[3]{x}} + 4\sin x \right)' = 35x^4 + \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{4}{3\sqrt[3]{x^4}} + 4\cos x$;

б) $y' = (\operatorname{tg} x \cdot 5^x)' = (\operatorname{tg} x)' \cdot 5^x + (5^x)' \cdot \operatorname{tg} x = \frac{5^x}{\cos^2 x} + 5^x \cdot \ln 5 \cdot \operatorname{tg} x$;

в) $y' = \left(\frac{\cos x}{e^x} \right)' = \frac{(\cos x)' \cdot e^x - (e^x)' \cdot \cos x}{(e^x)^2} = \frac{-\sin x \cdot e^x - e^x \cdot \cos x}{e^{2x}} = -\frac{\sin x + \cos x}{e^x}$.

5.2.4 Найти производные указанных функций:

а) $y = e^{\sin^5 7x}$; б) $y = \cos^4 9x \cdot 5^{x^2}$; в) $y = \frac{\sin^3 8x}{(x^2 + 4)^3}$.

Решение.

а) $y' = (e^{\sin^5 7x})' = e^{\sin^5 7x} \cdot (\sin^5 7x)' = e^{\sin^5 7x} \cdot 5 \cdot \sin^4 7x \cdot \cos 7x \cdot (7x)' =$
 $= e^{\sin^5 7x} \cdot 5 \cdot \sin^4 7x \cdot \cos 7x \cdot 7 = 35 \cdot e^{\sin^5 7x} \cdot \sin^4 7x \cdot \cos 7x$;

б) $y' = (\cos^4 9x \cdot 5^{x^2})' = (\cos^4 9x)' \cdot 5^{x^2} + (5^{x^2})' \cdot \cos^4 9x =$
 $= 4\cos^3 9x (\cos 9x)' 5^{x^2} + 5^{x^2} \ln 5 (x^2)' \cos^4 9x = 5^{x^2} \cos^3 9x (-36\sin 9x + 2x \ln 5 \cos 9x)$;

в) $y' = \left(\frac{\sin^3 8x}{(x^2 + 4)^3} \right)' = \frac{(\sin^3 8x)' \cdot (x^2 + 4)^3 - ((x^2 + 4)^3)' \cdot \sin^3 8x}{((x^2 + 4)^3)^2} =$
 $= \frac{24\sin^2 8x \cos 8x (x^2 + 4)^3 - 6x(x^2 + 4)^2 \sin^3 8x}{((x^2 + 4)^3)^2} = \frac{6\sin^2 8x (4\cos 8x (x^2 + 4) - x \sin 8x)}{(x^2 + 4)^4}$.

5.2.5 Найти эластичность спроса s относительно цены p , если $s(p) = 4 + 8p - 2p^2$, при значении $p = 1$ и $p = 3$ у. е.

Решение. Находим производную $s'(p) = (4 + 8p - 2p^2)' = 8 - 4p$. Тогда эластичность спроса относительно цены равна $E_s(p) = \frac{p}{s} \cdot s' = \frac{8p - 4p^2}{4 + 8p - 2p^2}$.

При значении $p = 1$ получаем, что эластичность принимает значение, равное $E_s(p) = 0,4$. Это означает, что если цена товара возрастёт на 1 %, то есть с 1 у. е. до 1,01 у. е., то спрос увеличится на 0,4 %.

При значении $p = 3$ получаем, что эластичность принимает значение, равное $E_s(p) = -1,2$. Это означает, что если цена товара возрастёт на 1 %, то есть с 1 у. е. до 3,01 у. е., то спрос уменьшится на 1,2 %.

5.2.6 Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^2 - x$ в точке $x_0 = 3$.

Решение. Так как $y' = 2x - 1$, то $y'(3) = 5$. Значение функции в заданной точке равно $y(3) = 6$. Для записи уравнения касательной воспользуемся уравнением (5.1.2): $y - 6 = 5 \cdot (x - 3)$ или $5x - y - 9 = 0$. Для записи уравнения нормали воспользуемся уравнением (5.1.3): $y - 6 = -\frac{1}{5}(x - 3)$ или $x + 5y - 33 = 0$.

5.2.7 Найти производную функции y , заданной неявно, следующим уравнением: $3x^2 - 4y^3 + 5x^3y^4 = 6$.

Решение. Дифференцируем обе части заданного выражения, считая y функцией от переменной x :

$$\begin{aligned} (3x^2 - 4y^3 + 5x^3y^4)'_x &= 6'_x \\ 6x - 12y^2y' + 15x^2y^4 + 20x^3y^3y' &= 0 \end{aligned}$$

Из этого равенства выражаем y' :

$$y' = \frac{6x + 15x^2y^4}{12y^2 - 20x^3y^3}.$$

5.2.8 Найти производную функции $y = x^{\sin 2x}$.

Решение. Логарифмируя данную функцию, получаем $\ln y = \sin 2x \ln x$. Дифференцируем обе части последнего равенства по переменной x : $(\ln y)'_x = (\sin 2x)'_x \ln x + \sin 2x (\ln x)'_x$ или $\frac{y'}{y} = 2 \cdot \cos 2x \cdot \ln x + \sin 2x \cdot \frac{1}{x}$.

Окончательно имеем

$$y' = y \cdot \left(2 \cdot \cos 2x \cdot \ln x + \frac{\sin 2x}{x} \right) = x^{\sin 2x} \cdot \left(2 \cdot \cos 2x \cdot \ln x + \frac{\sin 2x}{x} \right).$$

5.3 Задания для решения на практическом занятии

5.3.1 Воспользовавшись определением производной, найти производную функции $f(x) = x^3$ в точке $x_0 = 2$.

5.3.2 Доказать, используя определение производной функции в произвольной точке, что $(\sin 3x)' = 3 \cdot \cos 3x$, а $(2^x)' = 2^x \cdot \ln 2$.

5.3.3 Найти производные указанных функций:

а) $y = 4x^3 + 5\sqrt{x^3} - \frac{3}{\sqrt[3]{x^7}} + 4\ln x - 2^x$; б) $y = 2\cos x - 3\operatorname{ch} x + e$; в) $y = e^x \operatorname{sh} x$;

г) $y = \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{arctg} x$; д) $y = \frac{\operatorname{tg} x}{\arcsin x}$; е) $y = \frac{\sin x}{3^x}$; ж) $y = x^3 \cdot \sin x + \frac{\arccos x}{\sqrt{x}}$.

5.3.4 Найти эластичность спроса s относительно цены p , если $s(p) = 8 + 4p - 2p^2$, при значении $p = 1$ и $p = 12$ у. е. Дать экономическую интерпретацию полученных значений эластичности.

5.3.5 Найти производные указанных функций:

а) $y = \sin^3 5x$; б) $y = 4^{\cos^3 6x}$; в) $y = \ln^2(e^{-3x} + \sqrt{\sin 3x})$; г) $y = (5^{x^3} - \operatorname{ctg}^2 3x)^2$;

д) $y = \operatorname{tg}^2 9x \cdot e^{x^2 + 2x + 3}$; е) $y = \arcsin^3 5x \cdot \cos^2 x$; ж) $y = \frac{\operatorname{ch}^2 x^3}{\sin^4 x}$; з) $y = \frac{\operatorname{ctg}^5 3x}{\cos^2 \sqrt{x}}$.

5.3.6 Найти уравнения касательной и нормали к графику функции $y = \sqrt{x^3 + 1}$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

5.3.7 Найти все точки графика функции $y = (x + 2)/(x + 1)$, в каждой из которых касательная к этому графику образует угол 135° с положительным направлением оси абсцисс.

5.3.8 Найти угол между графиками функций $y = x^3 - x$ и $y = 12/x$ в точках их пересечения.

5.3.9 Найти производные функции y , заданных неявно следующими уравнениями

а) $\sin x^2 + \cos y^3 - e^{2x+3y} = 5$; б) $x^4 y^5 + \arcsin \frac{x^2}{y^3} = \pi$; $\frac{x^2}{y^3} - \cos(e^{4x-2y}) = \ln x^3$.

5.3.10 Найти производные указанных функций:

а) $y = (\cos 2x)^{\sin 3x}$; б) $y = (x^2 + 9)^{\operatorname{tg} 5x}$; в) $y = (\sqrt{x})^{\operatorname{ctg} 2x}$; г) $y = (2x + 1)^{(3x+2)(4x+3)}$.

5.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

5.4.1 Продифференцировать заданные функции.

5.4.1.1 а) $y = \sin 2x \cdot \ln 8x - \frac{5 \operatorname{tg} 7x}{\cos 4x}$; б) $y = (\cos 5x)^{\arcsin 4x}$.

5.4.1.2	a) $y = \sin^2 2x \cdot \cos 8x + \frac{\sqrt{\operatorname{sh} 4x}}{\ln x^2};$	б) $y = (\operatorname{cth} 2x)^{\arcsin 3x}.$
5.4.1.3	a) $y = \sin 3x \cdot \cos^2 3x + \frac{4e^{\operatorname{sh} 5x}}{\operatorname{tg} 2x};$	б) $y = (\cos 2x)^{\ln 3x}.$
5.4.1.4	a) $y = x^2 \cdot \cos^3 4x - \frac{\sin 2x}{\ln 8x};$	б) $y = (\sin 9x)^{\arccos 2x}.$
5.4.1.5	a) $y = 2^{\operatorname{sh} 5x} \cdot \arccos 7x + \frac{e^{3x}}{\sin 2x};$	б) $y = (\operatorname{th} 3x)^{\arcsin 9x}.$
5.4.1.6	a) $y = \ln^2 x \cdot \operatorname{arctg}^4 5x + \frac{(2x+1)^3}{e^{3x}};$	б) $y = (\operatorname{sh} 2x)^{\arcsin 7x}.$
5.4.1.7	a) $y = \cos 2x \cdot \operatorname{tg}^2 x - \frac{\operatorname{ch} 8x}{(3x-1)^2};$	б) $y = (\cos 2x)^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}.$
5.4.1.8	a) $y = \sin^2 2x \cdot (3x-1)^2 + \frac{\cos x^3}{\ln(2-x)};$	б) $y = (\sqrt{x^3-1})^{\operatorname{arctg} 2x}.$
5.4.1.9	a) $y = e^{3x} \cdot \cos 5x - \frac{(2x+4)^3}{\ln^2 x};$	б) $y = (\ln 5x)^{\sin \sqrt{4x-1}}.$
5.4.1.10	a) $y = \operatorname{sh} x^2 \cdot e^{4x^2-1} - \frac{\cos 2x}{\operatorname{tg} 6x};$	б) $y = (\log_2 4x)^{\operatorname{ctg} 6x}.$
5.4.1.11	a) $y = \sin^2 3x \cdot \cos 8x - \frac{\operatorname{ch}^2 4x}{\cos^3 5x};$	б) $y = (\operatorname{sh} 11x)^{\operatorname{arctg} 4x}.$
5.4.1.12	a) $y = \operatorname{th}^2 5x \cdot e^{x^3} - \frac{\ln 8x}{\sin 2x};$	б) $y = (\operatorname{sh} 9x)^{\operatorname{ctg} x^2}.$
5.4.1.13	a) $y = (3x-1)^3 \cdot \sin 2x + \frac{\operatorname{cth}^2 3x}{\log_2 x^2};$	б) $y = (\arcsin 8x)^{\operatorname{tg} \sqrt{x}}.$
5.4.1.14	a) $y = \ln \sin x \cdot \operatorname{tg}^2 4x - \frac{e^{3x}}{\cos^3 4x};$	б) $y = (\arccos 3x)^{\ln(x^2+1)}.$
5.4.1.15	a) $y = e^{4x} \cdot \operatorname{tg} 6x + \frac{\operatorname{ctg} x^3}{\ln(x^2-1)};$	б) $y = (\operatorname{arctg} 3x)^{\sin 3x}.$
5.4.1.16	a) $y = (e^{2x} - x) \sin 3x + \frac{\cos 5x}{\operatorname{arctg} 4x};$	б) $y = (\ln \sqrt{x})^{\operatorname{ctg} 4x}.$
5.4.1.17	a) $y = \operatorname{th} 3x \cdot \sin 7x - \frac{\operatorname{ctg} 3x}{(4-2x)^2};$	б) $y = (\operatorname{ctg} 4x)^{\sqrt[3]{4x-1}}.$
5.4.1.18	a) $y = \operatorname{ctg} x^2 \cdot \operatorname{arctg} 2x + \frac{\sin 5x}{\cos(2-x^2)};$	б) $y = (\operatorname{th} \sqrt{x})^{\operatorname{arctg} 4x}.$
5.4.1.19	a) $y = \sin 2x \cdot e^{5x} - \frac{\cos 3x}{\arcsin 4x};$	б) $y = (\operatorname{cth} 5x)^{\arcsin 10x}.$

5.4.1.20 a) $y = \frac{1}{2} \cos 5x \cdot e^{4x-1} - \frac{(2x-1)^3}{5 \operatorname{tg} 2x};$	б) $y = (\operatorname{sh} 2x)^{\operatorname{arctg} 4x}.$
5.4.1.21 a) $y = \cos 2x \cdot \operatorname{tg}^3 x + \frac{2e^{4x}}{\sin 4x};$	б) $y = (\operatorname{cth} \sqrt{x})^{\sin 2x}.$
5.4.1.22 a) $y = \operatorname{ctg}^3 x \cdot e^{\sqrt{x}} + \frac{\sin^2 3x}{\operatorname{ch} 2x};$	б) $y = (\operatorname{arctg} 5x)^{\operatorname{th} 3x}.$
5.4.1.23 a) $y = \sin^2 5x \cdot \ln 3x + \frac{(2x-3)^4}{\operatorname{ctg} 6x};$	б) $y = (\operatorname{sh} \sqrt{x})^{\operatorname{arctg} 2x}.$
5.4.1.24 a) $y = \cos 4x \cdot \ln^2 \sqrt{x} - \frac{\operatorname{ch} x^2}{\sqrt{6-x}};$	б) $y = (\operatorname{ctg} 9x)^{\operatorname{th} 7x}.$
5.4.1.25 a) $y = \operatorname{tg}^2 2x \cdot \ln 3x + \frac{\sin 4x}{\operatorname{ch}(x^2-1)};$	б) $y = (\arccos 6x)^{\sqrt{2x-3}}.$
5.4.1.26 a) $y = e^{3x} \cdot \operatorname{arctg} 2x + \frac{e^{4x}}{(2x-4)^2};$	б) $y = (\operatorname{th} x^2)^{\sqrt[3]{x^2}}.$
5.4.1.27 a) $y = e^{3x} \cdot \cos 4x - \frac{\sin 6x}{\operatorname{th}(2x-4)};$	б) $y = (\operatorname{ctg} 5x^2)^{\sin \sqrt{x}}.$
5.4.1.28 a) $y = e^{2x} \cdot \sin 2x + \frac{\operatorname{tg}(x^2-4)}{\operatorname{ch}(2-x)};$	б) $y = (\operatorname{tg} 2x^3)^{\ln 4x^2}.$
5.4.1.29 a) $y = e^{5x} \cdot \cos 4x + \frac{(3x-1)^2}{\sin 3x};$	б) $y = (\operatorname{ctg} 12x)^{\sin 4x}.$
5.4.1.30 a) $y = \frac{1}{6} x^3 \cdot e^{\sin 3x} - \frac{e^{5x^2}}{\cos(3x+5x^2)};$	б) $y = (\sin \sqrt[4]{x^3})^{\cos \sqrt{x}}.$

6 ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Содержание: производные высшего порядка, производные функций в случае зависимости переменных от параметра, геометрическое и механическое приложения производных, дифференциалы функции первого и высшего порядков, применение дифференциала к приближённым вычислениям.

6.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Определение 6.1.1 Производной второго порядка или второй производной называется производная от производной первого порядка.

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = (y')' = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right).$$

По индукции определяем производные высшего порядка.

Определение 6.1.2 Производной k -го порядка называется производная от производной $(k-1)$ -го порядка, то есть $y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k} = \left(y^{(k-1)} \right)' = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{k-1} y}{dx^{k-1}} \right)$.

Для вычисления производной любого порядка от произведения двух функций, минуя последовательное применение формулы для вычисления производной от произведения двух функций, удобно применять *формулу Лейбница*.

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + C_n^2 u^{(n-2)}v'' + \dots + uv^{(n)}. \quad (6.1.1)$$

Если зависимость переменных задана в *параметрическом* виде уравнениями $y = y(t)$, $x = x(t)$, то производные первого и второго порядков вычисляются по формулам:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_{xx} = \frac{(y'_x)_t}{x'_t}. \quad (6.1.2)$$

Механический смысл производной: производная пути по времени есть скорость в данный момент времени, то есть

$$v_{\text{мгн}} = \frac{ds}{dt}. \quad (6.1.3)$$

С механической точки зрения вторая производная пути по времени равна ускорению материальной точки в данный момент времени:

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right) = \frac{dv}{dt}. \quad (6.1.4)$$

Определение 6.1.3 Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* x_0 , если её приращение в этой точке $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ может быть представлено в виде

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x), \quad (6.1.5)$$

где A – некоторое действительное число; $o(\Delta x)$ – бесконечно малая функция более высокого порядка малости, чем Δx , при значении $\Delta x \rightarrow 0$.

Теорема 6.1.1 Для того чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируемой в точке x_0 , необходимо и достаточно, чтобы в точке x_0 существовала конечная производная $f'(x_0) = A$.

На основании теоремы 6.1.1 формула (6.1.5) принимает вид

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x). \quad (6.1.6)$$

Определение 6.1.4 Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется главная линейная часть приращения функции в точке x_0 .

$$d(f(x_0)) = f'(x_0) \cdot \Delta x. \quad (6.1.7)$$

В частности, если $f(x) = x$, то $f'(x) = 1$, и, следовательно, $df(x_0) = dx = \Delta x$, то есть дифференциал и приращение независимой переменной равны между собой. Поэтому дифференциал функции $f(x)$ в точке x_0 можно представить в виде $d(f(x_0)) = f'(x_0) dx$.

Геометрический смысл дифференциала. Дифференциал $d(f(x_0))$ равен приращению ординаты касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ при приращении аргумента равном Δx .

Дифференциал функции $y = f(x)$ в произвольной точке x находится по формулам

$$d(f(x)) = f'(x) \cdot dx \text{ или } dy = y' dx. \quad (6.1.8)$$

Для дифференциала функции справедливы следующие правила вычисления дифференциала:

- | | |
|---------------------------------|---|
| 1) $d(u \pm v) = du \pm dv;$ | 2) $d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv;$ |
| 3) $d(C \cdot v) = C \cdot du,$ | 4) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{du \cdot v - u \cdot dv}{v^2}, v \neq 0.$ |

Определение 6.1.5 Дифференциалом k -го порядка называется дифференциал от дифференциала $(k-1)$ -го порядка, то есть $d^k y = d(d^{k-1} y) = y^{(k)} dx$.

Из определения дифференциала и формулы (6.1.7) следует

$$\Delta f(x_0) = d f(x_0) + o(\Delta x),$$

то есть дифференциал функции в точке x_0 отличается от соответствующего приращения функции на бесконечно малую величину более высокого порядка, чем Δx , при значении $\Delta x \rightarrow 0$. На основании этого, дифференциал функции

можно использовать для вычисления приближённых значений функции. Действительно, заменяя приращение функции в точке x_0 её дифференциалом, получаем приближённую формулу

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot dx. \quad (6.1.9)$$

6.2 Примеры решения типовых задач

6.2.1 Найти производные и дифференциалы первого и второго порядка для функции $y = \sin^2 x$.

Решение. Находим первую производную $y' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$. Тогда дифференциал первого порядка равен $dy = y' dx = \sin 2x dx$. Находим производную второго порядка $y'' = (\sin 2x)' = 2 \cos 2x$. Тогда дифференциал второго порядка равен $d^2 y = y'' dx^2 = 2 \cos 2x dx^2$.

6.2.2 Найти скорость и ускорение точки, совершающей простые гармонические колебания по закону $s = A \sin(\omega t + \varphi)$.

Решение. Воспользуемся формулами (6.1.3) и (6.1.4).

$$v = \frac{ds}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi), \quad a = \frac{d^2 s}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 s.$$

6.2.3 Найти производные y'_x и y''_{xx} для функции, заданной уравнениями: $y = e^{10t}$, $x = e^{2t}$.

Решение. Используя формулы (6.1.2) нахождения производных функций, заданных параметрическим образом, имеем:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(e^{10t})'_t}{(e^{2t})'_t} = \frac{10e^{10t}}{2e^{2t}} = 5e^{8t}, \quad y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(5e^{8t})'_t}{(e^{2t})'_t} = \frac{40e^{8t}}{2e^{2t}} = 20e^{6t}.$$

6.2.4 Найти $y^{(5)}$, если $y = e^{4x} \sin 3x$.

Решение. Если $y = uv$, то на основании формулы Лейбница (6.1.1), имеем

$$y^{(5)} = u^{(5)}v + C_5^1 u^{(4)}v' + C_5^2 u'''v'' + C_5^3 u''v''' + C_5^4 u'v^{(4)} + uv^{(5)}.$$

Полагая в заданной функции $u = e^{4x}$, $v = \sin 3x$, для применения последней формулы нам следует найти первые пять последовательных производных функций u и v :

$$u' = 4e^{4x}; u'' = 16e^{4x}; u''' = 64e^{4x}; u^{(4)} = 256e^{4x}; u^{(5)} = 1024e^{4x}; \\ v' = 3\cos 3x; v'' = -9\sin 3x; v''' = -27\cos 3x; v^{(4)} = 81\sin 3x; v^{(5)} = 243\cos 3x.$$

Подставляя эти производные в формулу (6.2.1), получим

$$y^{(5)} = 1024e^{4x} \sin 3x + 5 \cdot 256e^{4x} \cdot 3\cos 3x + 10 \cdot 64e^{4x} \cdot (-9\sin 3x) + 10 \cdot 16e^{4x} \times \\ \times (-27\cos 3x) + 5 \cdot 4e^{4x} \cdot 81\sin 3x + e^{4x} \cdot 243\cos 3x = -e^{4x} (3116\sin 3x + 237\cos 3x).$$

6.2.5 Получить формулу для производной n -го порядка функции $y = \ln x$. Доказать методом математической индукции справедливость формулы для любого натурального числа.

Решение. Найдём производные первых порядков и по их виду предположим формулу нахождения производной функции любого порядка.

$$y' = \frac{1}{x}, y'' = -\frac{1}{x^2}, y''' = \frac{1 \cdot 2}{x^3}, y^{(4)} = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x^4}, \dots, y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}.$$

Методом математической индукции докажем, что формула нахождения производной функции $y = \ln x$ имеет вид: $y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$.

1. Проверим справедливость формулы при $n = 1$: $y' = (-1)^0 \frac{0!}{x^1} = \frac{1}{x}$ — верно.

2. Предположим, что утверждение справедливо для любого натурального числа k , то есть $y^{(k)} = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{x^k}$ — истина.

3. Исходя из предположения, что формула справедлива для $n = k$, докажем истинность утверждения для $n = k + 1$, то есть $y^{(k+1)} = (-1)^k \frac{k!}{x^{k+1}}$ — истина:

$$y^{(k+1)} = (y^{(k)})' = \left((-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{x^k} \right)' = (-1)^{k-1} \cdot \frac{(k-1)! \cdot (-k)}{x^{k+1}} = (-1)^k \frac{k!}{x^{k+1}}.$$

По методу математической индукции утверждение справедливо для любого натурального числа.

6.2.6 С помощью дифференциала приближённо вычислить значение квадратного корня из 8,88 с точностью до двух знаков после запятой.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x}$ и вычислим её значение в точке $x = 8,88$, то есть найдём значение функции $f(8,88) = \sqrt{8,88}$. Воспользуемся формулой $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$, где $x_0 + \Delta x = x$. Положим, что $x_0 = 9$, тогда $\Delta x = x - x_0 = 8,88 - 9 = -0,12$. Значение функции в точке $x_0 = 9$ равно $f(9) = \sqrt{9} = 3$. Значение производной $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ в точке $x_0 = 9$

равно $f'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$. Следовательно, $\sqrt{8,88} \approx 3 + \frac{1}{6} \cdot (-0,12) = 2,98$.

6.2.7 Функция общих затрат предприятия определяется эмпирической функцией $C(v) = 1,77v^2 - 0,59v + 6$, которая зависит от объёма продаж v . Определить приближённое значение изменения затрат предприятия при изменении объёмов продаж от 500 условных единиц товара до 525.

Решение. При достаточно малых изменениях объёмов продаж товара изменение затрат предприятия равно $\Delta C(v_0) \approx dC(v_0) = C'(v_0)dv = C'(v_0)\Delta v$. Изменение объёмов продаж составляет $\Delta v = 525 - 500 = 25$ условных единиц товара.

Так как $C'(v) = 3,54v - 0,59$, то $C'(500) = 1769,41$. Тогда изменение затрат предприятия, при увеличении объёма продаж на 25 единиц, равно $\Delta C \approx 1769,41 \cdot 25 = 44235,25$.

Вывод: при увеличении объёма продукции на 25 условных единиц товара затраты предприятия увеличатся на 44235,25 условные денежные единицы.

6.3 Задания для решения на практическом занятии

6.3.1 Найти производные и дифференциалы первого и второго порядков для указанных функций: а) $y = \operatorname{arctg} 2x$; б) $y = e^{x^2}$; в) $y = \cos^2 5x$.

6.3.2 Найти скорость и ускорение материальной точки, совершающей затухающие колебания по закону $x = Ae^{-\lambda t} \sin \omega t$.

6.3.3 Найти производные первого и второго порядка для указанных функций: а) $\begin{cases} y = \sin^3 2t, \\ x = \cos^3 2t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = \operatorname{arctg} t, \\ x = \ln(1 + t^2). \end{cases}$

6.3.4 Найти $y^{(4)}$, если $y = x^4 e^{2x}$.

6.3.5 Получить формулу для производной n -го порядка указанных функций. Доказать методом математической индукции справедливость формулы для любого натурального числа.

а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = \sin x$; в) $y = xe^x$.

6.3.6 Используя понятие дифференциала функции, вычислить приближённо указанные значения, с точностью до трёх знаков после запятой:

а) $\cos 62^\circ$; б) $\sqrt{\frac{(2,05)^2 + 5}{(2,05)^2 - 3}}$; в) $\arcsin 0,4991$.

6.3.7 Функция общих затрат предприятия определяется эмпирической функцией $C(v) = 3v^2 + v - 15$, которая зависит от объёма продаж v . Определить приближённое значение изменения затрат предприятия при изменении объёмов продаж от 100 условных единиц товара до 105.

6.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

6.4.1 Найти производные первого и второго порядка указанных функций.

6.4.1.1 $\begin{cases} y = \sqrt{t-5}, \\ x = \ln(t-5). \end{cases}$

6.4.1.2 $\begin{cases} y = \sqrt{2t-7}, \\ x = \sqrt[3]{2t-7}. \end{cases}$

6.4.1.3 $\begin{cases} y = 3e^{4t+3}, \\ x = 4e^{3t+4}. \end{cases}$

6.4.1.4 $\begin{cases} y = 10 \sin 2t, \\ x = 5 \cos 2t. \end{cases}$

6.4.1.5 $\begin{cases} y = e^{2t} \sin 2t, \\ x = e^{2t} \cos 2t. \end{cases}$

6.4.1.6 $\begin{cases} y = \operatorname{sh} 3t, \\ x = \operatorname{ch} 3t. \end{cases}$

6.4.1.7	$\begin{cases} y = \ln \sin 3t, \\ x = \sin 3t. \end{cases}$	6.4.1.8	$\begin{cases} y = \arcsin t, \\ x = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$	6.4.1.9	$\begin{cases} y = \operatorname{arctg} t, \\ x = \ln(1+t^2). \end{cases}$
6.4.1.10	$\begin{cases} y = 5 \cos^2 3t, \\ x = 2 \cos 3t. \end{cases}$	6.4.1.11	$\begin{cases} y = t^3 + 2t^2 - 3, \\ x = \ln t. \end{cases}$	6.4.1.12	$\begin{cases} y = \operatorname{th} t, \\ x = \operatorname{cth} t. \end{cases}$
6.4.1.13	$\begin{cases} y = 3 \operatorname{tg} 4t, \\ x = 5 \operatorname{ctg} 4t. \end{cases}$	6.4.1.14	$\begin{cases} y = \sqrt{1-t}, \\ x = 2 \operatorname{tg} \sqrt{1-t}. \end{cases}$	6.4.1.15	$\begin{cases} y = e^{4t^2+2t}, \\ x = 2t^2 + t. \end{cases}$
6.4.1.16	$\begin{cases} y = \sqrt[4]{3t-1}, \\ x = \sqrt[5]{3t-1}. \end{cases}$	6.4.1.17	$\begin{cases} y = 9e^{4t-1}, \\ x = 3e^{5t+2}. \end{cases}$	6.4.1.18	$\begin{cases} y = \sqrt[3]{2t-3}, \\ x = \ln(2t-3). \end{cases}$
6.4.1.19	$\begin{cases} y = e^{3t} \cos 3t, \\ x = e^{3t} \sin 3t. \end{cases}$	6.4.1.20	$\begin{cases} y = \operatorname{ch} 5t, \\ x = \operatorname{sh} 5t. \end{cases}$	6.4.1.21	$\begin{cases} y = 12 \cos 3t, \\ x = 6 \sin 3t. \end{cases}$
6.4.1.22	$\begin{cases} y = \sqrt{1-4t^2}, \\ x = \arcsin 2t. \end{cases}$	6.4.1.23	$\begin{cases} y = \ln(1+9t^4), \\ x = \operatorname{arcctg} 3t^2. \end{cases}$	6.4.1.24	$\begin{cases} y = \cos 2t, \\ x = \ln \cos 2t. \end{cases}$
6.4.1.25	$\begin{cases} y = 2t^3 - t^2 + t, \\ x = \ln 3t. \end{cases}$	6.4.1.26	$\begin{cases} y = \operatorname{cth} 3t, \\ x = \operatorname{th} 3t. \end{cases}$	6.4.1.27	$\begin{cases} y = 4 \sin^2 2t, \\ x = 3 \cos 2t. \end{cases}$
6.4.1.28	$\begin{cases} y = 5 \operatorname{tg} \sqrt{2+3t}, \\ x = 3\sqrt{2+3t}. \end{cases}$	6.4.1.29	$\begin{cases} y = 2t^3 - t^2, \\ x = e^{4t^3-2t^2}. \end{cases}$	6.4.1.30	$\begin{cases} y = 2 \operatorname{ctg} 5t, \\ x = 4 \operatorname{tg} 5t. \end{cases}$

6.4.2 С помощью дифференциала функции приближенно вычислить заданные величины с точностью до четырех знаков после запятой.

6.4.2.1	$\sin 28^\circ.$	6.4.2.2	$\cos 57^\circ.$	6.4.2.3	$\operatorname{tg} 43^\circ.$
6.4.2.4	$\operatorname{ctg} 46^\circ.$	6.4.2.5	$\arcsin 0,43.$	6.4.2.6	$\arccos 0,62.$
6.4.2.7	$\operatorname{arctg} 0,91.$	6.4.2.8	$\operatorname{arcctg} 1,22.$	6.4.2.9	$\ln(e^3 + 0,15).$
6.4.2.10	$\sqrt{15,94}.$	6.4.2.11	$\sqrt[3]{8,15}.$	6.4.2.12	$\sqrt[5]{31,95}.$
6.4.2.13	$5^{2,01}.$	6.4.2.14	$\sqrt[4]{80,78}.$	6.4.2.15	$\lg 100,02.$
6.4.2.16	$\sqrt{\sin 33^\circ}.$	6.4.2.17	$\cos^3 62^\circ.$	6.4.2.18	$\operatorname{tg}^2 48^\circ.$
6.4.2.19	$\sqrt[3]{\operatorname{ctg} 44^\circ}.$	6.4.2.20	$\arcsin^2 0,54.$	6.4.2.21	$\arccos^3 0,57.$
6.4.2.22	$\operatorname{arctg}^2 1,05.$	6.4.2.23	$\operatorname{arcctg}^3 0,93.$	6.4.2.24	$\ln(e^4 - 0,25).$
6.4.2.25	$\sqrt{(8,97)^3}.$	6.4.2.26	$\sqrt[3]{(26,75)^2}.$	6.4.2.27	$\sqrt[10]{(1023,99)^9}.$
6.4.2.28	$e^{3,91}.$	6.4.2.29	$\sqrt[4]{(624,87)^5}.$	6.4.2.30	$\lg^2 999,92.$

7 ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

Содержание: теоремы о среднем, правило Лопиталья – Бернулли.

7.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Изучение производной функции даёт возможность судить о характерных особенностях в поведении этой функции. В основе исследований функций лежат теоремы, которые объединены общим названием – теоремами о среднем.

Теорема 7.1.1 (Ферма) Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и в точке x_0 функция достигает наибольшего или наименьшего значения, то производная функции в этой точке равна нулю.

Теорема 7.1.2 (Ролля) Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема на интервале $(a;b)$, причём $f(a) = f(b)$, то существует, по крайней мере, одна точка $c \in (a;b)$, такая, что $f'(c) = 0$.

Теорема 7.1.3 (Лагранжа) Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема на интервале $(a;b)$, то существует, по крайней мере, одна точка $c \in (a;b)$, такая, что

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a). \quad (7.1.1)$$

Теорема 7.1.4 (Коши) Если функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемы на интервале $(a;b)$, причём $\varphi'(x) \neq 0$ на интервале $(a;b)$, то существует, по крайней мере, одна точка $c \in (a;b)$, такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \quad (7.1.2)$$

При раскрытии неопределённостей $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ используют правило Лопиталья – Бернулли.

Теорема 7.1.5 (Лопиталья – Бернулли) Если функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемы на интервале $(a;b)$, а в точке $x_0 \in (a;b)$ обе функции одновременно стремятся к нулю или к бесконечности и при этом существует предел $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}. \quad (7.1.3)$$

При выполнении условия теоремы правило Лопиталя – Бернулли можно применять неоднократно.

Раскрытие неопределённости типа $(0 \cdot \infty)$.

Для вычисления $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot \varphi(x))$, где $f(x)$ – бесконечно малая, а $\varphi(x)$ – бесконечно большая функция при значении $x \rightarrow x_0$, следует преобразовать произведение $f(x) \cdot \varphi(x)$ к виду $\frac{f(x)}{1/\varphi(x)}$ или $\frac{\varphi(x)}{1/f(x)}$. В первом случае получаем неопределённость $\left(\frac{0}{0}\right)$, а во втором $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Далее можно использовать правило Лопиталя – Бернулли.

Раскрытие неопределённости типа $(\infty - \infty)$.

Для вычисления $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \varphi(x))$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ – бесконечно большие функции при значении $x \rightarrow x_0$, следует преобразовать разность $f(x) - \varphi(x)$ к виду $f(x) \cdot \left(1 - \frac{\varphi(x)}{f(x)}\right)$. Для дальнейшего нахождения предела необходимо раскрыть неопределённость $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ отношения $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x)}{f(x)} \neq 1$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \varphi(x)) = \infty$. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = 1$, то получаем неопределённость типа $(\infty \cdot 0)$, раскрытие которой рассмотрена выше.

Раскрытие неопределённости типа (0^0) , (∞^0) , (1^∞) .

Во всех трёх случаях рассматривается предел $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{\varphi(x)}$, где $f(x)$ есть в первом случае бесконечно малая функция, во втором случае – бесконечно большая функция, а в третьем случае – функция, имеющая предел, равный единице. Функция $\varphi(x)$ в первых двух случаях является бесконечно малой, а в третьем случае – бесконечно большой функцией.

Для раскрытия указанных неопределённостей логарифмируем предварительно функцию $y = (f(x))^{\varphi(x)}$. В результате получаем равенство

$$\ln y = \varphi(x) \cdot \ln f(x).$$

Находим предел $\ln y$, после чего находится предел функции y . Во всех трёх случаях неопределённостей при нахождении предела функции $\ln y$ получаем неопределённость типа $(0 \cdot \infty)$, метод, раскрытия которой приведён выше.

7.2 Примеры решения типовых задач

7.2.1 Доказать, что все корни производной многочлена

$$f(x) = x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-4)$$

действительны и различны.

Решение. Применим теорему Ролля к функции $y = f(x)$ на отрезке $[0; 1]$.

Так как $f(0) = f(1) = 0$ и функция $y = f(x)$ является непрерывной на отрезке $[0; 1]$ и дифференцируемой на интервале $(0; 1)$, то по теореме Ролля существует хотя бы одно число x_1 из интервала $(0; 1)$ такое, что $f'(x_1) = 0$. Аналогично, применяя теорему Ролля к функции $y = f(x)$ на каждом из отрезков $[1; 2]$, $[2; 3]$ и $[3; 4]$, убеждаемся, что внутри каждого из них существует корень уравнения $f'(x) = 0$.

Так как степень многочлена $f'(x)$ равна 4, то он имеет не более четырёх действительных корней. Поэтому все корни x_1, x_2, x_3, x_4 многочлена $f'(x)$ действительны, причём $0 < x_1 < 1 < x_2 < 2 < x_3 < 3 < x_4 < 4$.

7.2.2 Доказать, что для любых положительных чисел a и b , таких, что $b > a$, и любого натурального числа $n \geq 2$ имеет место неравенство

$$n \cdot (b-a) \cdot a^{n-1} < b^n - a^n < n \cdot (b-a) \cdot b^{n-1}.$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x^n$, $x > 0$. Тогда

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{b^n - a^n}{b - a}.$$

Так как функция $f(x) = x^n$ является непрерывной на отрезке $[a; b]$ и дифференцируемой на интервале $(a; b)$, то по теореме Лагранжа существует точка c из интервала $(a; b)$ такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{b^n - a^n}{b - a} = f'(c) = n \cdot c^{n-1}.$$

Учитывая неравенство $a^{n-1} < c^{n-1} < b^{n-1}$, получаем

$$n \cdot a^{n-1} < \frac{b^n - a^n}{b - a} < n \cdot b^{n-1}.$$

Отсюда следует доказываемое неравенство.

7.2.3 Проверить справедливость теоремы Лагранжа для функции $f(x) = \arcsin x$ на отрезке $[-1; 1]$. Найти значение c , при котором выполнено условие (7.1.1)

Решение. Функция определена и непрерывна на отрезке $[-1; 1]$. Найдём производную функции $f'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$. Производная конечна внутри интервала $(-1; 1)$, а в точках $x = \pm 1$ производная не существует, но это не нарушает условий применимости теоремы Лагранжа. Следовательно, точка c , удовлетворяющая условию (7.1.1), должна существовать. Найдём эту точку

$$\frac{\arcsin 1 - \arcsin(-1)}{1 - (-1)} = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}}; \quad \frac{\pi/2 - (-\pi/2)}{2} = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}},$$

откуда

$$\sqrt{1-c^2} = \frac{2}{\pi}, \text{ или } c = \pm \frac{\sqrt{\pi^2 - 4}}{\pi}.$$

Итак, в данном случае условие (7.1.1) выполняется для двух точек.

7.2.4 Пользуясь формулой (7.1.1), оценить значение $\ln(1+e)$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \ln x$. Эта функция дифференцируема всюду при значении $x > 0$ и $f'(x) = 1/x$. Для отрезка $[e; e+1]$ запишем формулу (7.1.1):

$$\ln(1+e) = \ln e + ((e+1) - e) \cdot \frac{1}{c} = 1 + \frac{1}{c},$$

где $e < c < 1+e$.

Оценим выражение $1 + 1/c$ при значении $e < c < 1+e$. Имеем

$$\ln(1+e) = 1 + \frac{1}{c} < 1 + \frac{1}{e}, \text{ так как } c > e \text{ и}$$

$$\ln(1+e) = 1 + \frac{1}{c} > 1 + \frac{1}{1+e}, \text{ так как } c < 1+e.$$

Таким образом,

$$1 + \frac{1}{1+e} < \ln(1+e) < 1 + \frac{1}{e}.$$

Подставляя в эту оценку $e \approx 2,7$, получаем окончательно

$$1,27 < \ln(1+e) < 1,37.$$

7.2.5 Применима ли теорема Коши к функциям $f(x) = \cos x$ и $\varphi(x) = x^3$ на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$?

Решение. Заданные функции непрерывны на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$ и дифференцируемы на интервале $(-\pi/2; \pi/2)$. При этом $f'(x) = -\sin x$, $\varphi'(x) = 3x^2$. В точке $x=0$ значения производных функции равны $f'(0) = \varphi'(0) = 0$. Следовательно, условие теоремы Коши не выполняется.

Покажем, что в этом случае действительно не существует точки c , в которой выполнено равенство (7.1.2). Выпишем выражение, стоящее слева в формуле Коши

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{\cos(\pi/2) - \cos(-\pi/2)}{(\pi/2)^3 - (-\pi/2)^3} = \frac{0}{\pi^3/8} = 0.$$

Рассмотрим выражение, стоящее справа в формуле (7.1.2)

$$\frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = -\frac{\sin c}{3c^2}.$$

Числитель обращается в нуль на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$ только при значении $c = 0$. Но в этой точке

$$\lim_{c \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin c}{3c^2} \right) = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{\sin c}{c} \cdot \lim_{c \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{3c} \right) = \infty.$$

Таким образом, левая часть равенства (7.1.2) равна нулю, а правая часть в точке $c = 0$ стремится к бесконечности. Следовательно, действительно не существует точки на заданном интервале, в которой можно применить теорему Коши для заданных функций.

7.2.6 Найти указанные пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{e^{4x-12} - 1}{\sin(2x-6)}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 x}{x^2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{5x}{\ln x} - \frac{5}{\ln x} \right)$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x$.

Решение.

а) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{e^{4x-12} - 1}{\sin(2x-6)} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(e^{4x-12} - 1)'}{(\sin(2x-6))'} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4e^{4x-12}}{2 \cos(2x-6)} = \frac{4 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 2;$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 x}{x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln^2 x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \ln x}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)'}{(x^2)'} =$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x^2} = \left(\frac{1}{\infty} \right) = 0;$

в) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{5x}{\ln x} - \frac{5}{\ln x} \right) = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x-5}{\ln x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(5x-5)'}{(\ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 1} 5x = 5;$

г) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x = (0)^0 = A$, тогда $\ln A = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(\sin x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(\sin x))'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sin x} \cdot \cos x}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos x}{\sin x} = \left(\frac{0}{0} \right) = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 \cos x)'}{(\sin x)'} =$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos x - x^2 \sin x}{\cos x} = -\frac{0}{1} = 0, \text{ следовательно, } A = \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x = e^0 = 1.$$

7.3 Задания для решения на практическом занятии

7.3.1 Не находя производной функции

$$P(x) = (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-4)$$

выяснить, сколько действительных корней имеет уравнение $P'(x) = 0$, и указать интервалы, в которых они лежат.

7.3.2 Показать, что функция $f(x) = x^2 - 1$ на отрезке $[-1; 1]$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Найти соответствующее значение c .

7.3.3 На дуге кубической параболы $y = x^3$, заключённой между точками $A(2; 8)$ и $B(4; 64)$, найти точку, касательная в которой параллельна хорде AB .

7.3.4 Доказать, что $e^x > 1 + x$, при $x > 0$.

7.3.5 Проверить условие теоремы Лагранжа для функции $f(x) = x + \frac{1}{x}$ на отрезке $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

7.3.6 Пользуясь теоремой Лагранжа, оценить значение $\arctg 1,5$.

7.3.7 Записав формулу Коши для функций $f(x) = 2x^2 + 5x + 1$ и $\varphi(x) = x^2 + 4$ на отрезке $[0; 2]$, найти значение c .

7.3.8 Найти указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\arcsin 5x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \arctg x}{e^{3/x} - 1}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{e^{3x}}; \text{ г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + x^2)}{\ln\left(\frac{\pi}{2} - \arctg x\right)}.$$

7.3.9 Найти указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tg x; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \sin \frac{5}{x}\right); \text{ в) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln^3 x); \text{ г) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right).$$

7.3.10 Найти указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow +0} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^x; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \sin^2 x)^{1/\tg^2 x}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)^{\cos x}; \text{ г) } \lim_{x \rightarrow +0} x^{+x}.$$

7.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

7.4.1 Найти указанные пределы, используя правило Лопиталя.

7.4.1.1 $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\tg 3x)^{\ctg 3x}.$

7.4.1.2 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\cos \frac{\pi x}{2}\right)^{\tg \pi x}.$

7.4.1.3 $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\sin \frac{\pi x}{2}\right)^{x^2 - 4}.$

7.4.1.4 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2 - 1}\right)^{x^2 - 1}.$

7.4.1.5 $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin 2x}.$

7.4.1.6 $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3)^{1/\ln(3-x)}.$

7.4.1.7 $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\tg x)^{1/(4x - \pi)}.$

7.4.1.8 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\sin 7x}.$

7.4.1.9 $\lim_{x \rightarrow 4} (\ln(5 - x))^{\sh(4-x)}.$

7.4.1.10 $\lim_{x \rightarrow 0} (\ch 6x)^{1/\sh 6x}.$

$$7.4.1.11 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{4} \right)^{\cos(\pi x/4)}.$$

$$7.4.1.12 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2 - 1} \right)^{\ln x}.$$

$$7.4.1.13 \quad \lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}.$$

$$7.4.1.14 \quad \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - x)^{x-1}.$$

$$7.4.1.15 \quad \lim_{x \rightarrow \pi} (1 - \sin x)^{\operatorname{ctg} 5x}.$$

$$7.4.1.16 \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{1/\operatorname{ctg} x}.$$

$$7.4.1.17 \quad \lim_{x \rightarrow 1} (3 - 2x)^{\operatorname{tg} \frac{3\pi x}{2}}.$$

$$7.4.1.18 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\lg 7x)^{1/x}.$$

$$7.4.1.19 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{sh} 2x} \right)^{\sin 2x}.$$

$$7.4.1.20 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\operatorname{ctg} 3x}.$$

$$7.4.1.21 \quad \lim_{x \rightarrow \pi/4} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{8x-2\pi}}.$$

$$7.4.1.22 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{th} 3x)^{x^3}.$$

$$7.4.1.23 \quad \lim_{x \rightarrow 9} \left(\frac{1}{x-9} \right)^{2x-18}.$$

$$7.4.1.24 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 1)^{2/\ln x}.$$

$$7.4.1.25 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ch} 3x)^{1/\operatorname{tg} 2x}.$$

$$7.4.1.26 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ch} x)^{\ln x^2}.$$

$$7.4.1.27 \quad \lim_{x \rightarrow 8} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{8} \right)^{\sin \pi x}.$$

$$7.4.1.28 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\ln \sin x)^{x^2}.$$

$$7.4.1.29 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\lg(10 + x))^{1/x}.$$

$$7.4.1.30 \quad \lim_{x \rightarrow 2} (2 - x)^{x^3 - 5x + 2}.$$

8 ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Содержание: формулы Тейлора и Маклорена, остаточные члены в форме Лагранжа и Пеано.

8.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Одной из основных задач математического анализа является задача приближения или *аппроксимации* функции в окрестности заданной точки. Одной из основных формул приближённых вычислений является формула Тейлора. Наиболее простыми функциями в смысле вычисления их значений являются многочлены. Формула Тейлора даёт возможность замены функции $y = f(x)$ в окрестности точки x_0 многочленом некоторой степени.

Если функция $y = f(x)$ является дифференцируемой n раз в точке x_0 , то многочлен вида

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad (8.1.1)$$

называется *многочленом Тейлора* функции $y = f(x)$.

Теорема 8.1.1 Если функция $y = f(x)$ определена и n раз дифференцируема в окрестности точки x_0 , то при $x \rightarrow x_0$ справедлива формула

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n),$$

или в более краткой форме

$$f(x) = \sum_{m=0}^n \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m + o((x-x_0)^n), \quad (8.1.2)$$

где $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$ — *остаточный член в форме Пеано*.

Формула (8.1.2) называется *формулой Тейлора n -го порядка с остаточным членом в форме Пеано*.

Если в формуле Тейлора (8.1.2) положить $x_0 = 0$, получаем частный случай формулы Тейлора, которая называется *формулой Маклорена с остаточным членом в форме Пеано*:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n). \quad (8.1.3)$$

Теорема 8.1.2 Если функция $y = f(x)$ определена и $(n+1)$ раз дифференцируема в окрестности точки x_0 , то при $x \rightarrow x_0$ справедлива формула

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

или в более краткой форме

$$f(x) = \sum_{m=0}^n \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad (8.1.4)$$

где $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ – остаточный член в форме Лагранжа, а $c = x_0 + \Theta(x-x_0)$ и $0 < \Theta < 1$.

Формула (8.1.4) называется *формулой Тейлора n-го порядка с остаточным членом в форме Лагранжа*.

Если в формуле Тейлора (8.1.4) положить $x_0 = 0$, получаем частный случай формулы Тейлора, которая называется *формулой Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа*:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad (8.1.5)$$

где $c = \Theta x$ и $0 < \Theta < 1$.

Основные разложения применяются для представления по формуле Тейлора многих функций. При этом разложение функции $f(x)$ по формуле Тейлора по степеням $x-x_0$ заменой $x-x_0 = z$ сводятся к разложению функции $f(x_0+z) = f_1(z)$ по формуле Маклорена в окрестности точки $z = 0$.

Рассмотрим разложение основных элементарных функций по формуле Тейлора (Маклорена).

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x), \quad (8.1.6)$$

где $R_n(x) = o(x^n)$ или $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\Theta x}$, $0 < \Theta < 1$.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_n(x), \quad (8.1.7)$$

где $R_n(x) = o(x^{2n+1})$ или $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sin\left(\Theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$, $0 < \Theta < 1$.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_n(x), \quad (8.1.8)$$

где $R_n(x) = o(x^{2n})$ или $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cos\left(\Theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$, $0 < \Theta < 1$.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n(x). \quad (8.1.9)$$

где $R_n(x) = o(x^n)$ или $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{(-1)^n}{(1+\Theta x)^{n+1}}$, $0 < \Theta < 1$.

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m \cdot (m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!}x^n + R_n(x), \quad (8.1.10)$$

где $R_n(x) = o(x^n)$ или $R_n(x) = \frac{m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot (m-n)}{(n+1)!} \cdot (1+\Theta x)^{m-n-1} \cdot x^{n+1}$, $0 < \Theta < 1$.

Формула Тейлора находит широкое применение при вычислении значений функции с заданной степенью точности. Пусть известны значения функции $y = f(x)$, а также значения её производных в точке x_0 , и необходимо вычислить приближённое значение функции в точке x_1 из окрестности точки x_0 с абсолютной погрешностью δ . Из формулы Тейлора следует, что

$$f(x_1) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x_1 - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x_1 - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n_0)}(x_0)}{n!}(x_1 - x_0)^{n_0},$$

где n_0 – наименьший из номеров n , для которых $|R_n(x_1)| < \delta$.

Формула Тейлора используется также при нахождении пределов, исследовании функции на экстремум и выпуклость, при вычислении интегралов, решении дифференциальных уравнений и в теории рядов.

8.2 Примеры решения типовых задач

8.2.1 Разложить многочлен $P_4(x) = 2x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 8x + 4$ по степеням двучлена $x - 2$.

Решение. Многочлен имеет производные любого порядка. Поэтому при любом значении переменной можно выразить значение заданной функции по формуле (8.1.1). Находим коэффициенты в разложении. Значение многочлена в точке $x_0 = 2$ равно нулю.

$$\begin{aligned} P_4'(x) &= 8x^3 - 15x^2 - 6x + 8; & P_4'(2) &= 0. \\ P_4''(x) &= 24x^2 - 30x - 6; & P_4''(2) &= 30. \\ P_4'''(x) &= 48x - 30; & P_4'''(2) &= 66. \\ P_4^{(4)}(x) &= 48; & P_4^{(4)}(2) &= 48. \\ P_4^{(5)}(x) &= 0; & P_4^{(5)}(2) &= 0. \end{aligned}$$

Применим формулу (8.1.1):

$$P_4(x) = 0 + \frac{0}{1!}(x-2) + \frac{30}{2!}(x-2)^2 + \frac{66}{3!}(x-2)^3 + \frac{48}{4!}(x-2)^4;$$

$$P_4(x) = 15 \cdot (x-2)^2 + 11 \cdot (x-2)^3 + 2 \cdot (x-2)^4,$$

$$R_5(x) = 0, \text{ так как } P_4^{(v)}(x) = 0.$$

8.2.2 Для многочлена $4x^4 + x^2 - 3x + 2$ написать формулу Тейлора второго порядка в точке $x_0 = -1$. Записать остаточный член в форме Лагранжа и найти значение параметра Θ , которое соответствует следующим значениям аргумента: а) $x = 0$; б) $x = 1$; в) $x = -1$.

Решение. Находим производные первого, второго и третьего порядка многочлена $f(x) = 4x^4 + x^2 - 3x + 2$:

$$f'(x) = 16x^3 + 2x - 3, \quad f''(x) = 48x^2 + 2, \quad f'''(x) = 96x.$$

Вычисляем значения многочлена, первой и второй производных в точке $x_0 = -1$, а значение третьей производной в точке $x_0 + \Theta(x - x_0) = -1 + \Theta(x + 1)$:

$$f(-1) = 10, \quad f'(-1) = -21, \quad f''(-1) = 50, \quad f'''(x) = 96 \cdot (-1 + \Theta(x + 1)).$$

Подставляя полученные значения в формулу (8.1.1), получаем формулу Тейлора второго порядка разложения заданного многочлена в точке $x_0 = -1$.

$$f(x) = 10 - 21 \cdot (x + 1) + 25 \cdot (x + 1)^2 + 16 \cdot (-1 + \Theta \cdot (x + 1)) \cdot (x + 1)^3.$$

Для нахождения параметра Θ , который соответствует заданным значениям x , подставляем эти числа в последнее равенство. Откуда находим параметр Θ . Для значений $x = 0$ или $x = 1$, параметр Θ равен $1/4$, а для значения $x = -1$, параметр Θ может принимать любое действительное число.

8.2.3 Пусть $P(x)$ – многочлен четвёртой степени, $P(-1) = -4$, $P'(-1) = -3$, $P''(-1) = 8$, $P'''(-1) = -18$, $P^{(iv)}(-1) = 24$. Вычислить $P(1)$, $P'(2)$, $P''(0)$, $P'''(-1/4)$, $P^{(4)}(5)$.

Решение. Используя формулу (8.1.1), записываем многочлен четвёртой степени:

$$P(x) = -4 - 3 \cdot (x + 1) + 4 \cdot (x + 1)^2 - 3 \cdot (x + 1)^3 + (x + 1)^4, \text{ или } P(x) = x^4 + x^3 + x^2 - 5.$$

Найдём производные многочлена $P(x)$ до четвёртого порядка включительно и вычислим значения производных и функции в заданных точках.

$$P(1) = -2;$$

$$P'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x, \quad P'(x) = 48;$$

$$P''(x) = 12x^2 + 6x + 2, \quad P''(x) = 2;$$

$$P'''(x) = 24x + 6, \quad P'''(-1/4) = 0;$$

$$P^{(4)}(x) = 24, \quad P^{(4)}(x) = 24.$$

8.2.4 Написать формулу Маклорена n -го порядка функции $f(x) = \sin x$.

Решение. Найдём значение функции $f(x) = \sin x$ и её производных в точке $x_0 = 0$. Значение функции в точке $x_0 = 0$ равно нулю.

$$\begin{aligned}f'(x) &= \cos x = \sin\left(x + \pi/2\right), & f'(0) &= 1; \\f''(x) &= -\sin x = \sin\left(x + 2\pi/2\right), & f''(0) &= 0; \\f'''(x) &= -\cos x = \sin\left(x + 3\pi/2\right), & f'''(0) &= -1;\end{aligned}$$

$$\dots\dots\dots f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad f^{(n)}(0) = \sin \frac{n\pi}{2}.$$

Следовательно, формула Маклорена n -го порядка функции $f(x) = \sin x$ имеет вид

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sin\left(\Theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right),$$

где $0 < \Theta < 1$.

8.2.5 Написать формулу Тейлора третьего порядка для функции $f(x) = \frac{x}{x-1}$ в точке $x_0 = 2$.

Решение. Найдём значение функции $f(x) = \frac{x}{x-1}$ и её производных в точке $x_0 = 2$. Значение функции в заданной точке равно двум.

$$\begin{aligned}f'(x) &= -\frac{1}{(x-1)^2}, & f'(2) &= -1; \\f''(x) &= \frac{2}{(x-1)^3}, & f''(2) &= 2; \\f'''(x) &= -\frac{6}{(x-1)^4}, & f'''(2) &= -6 \\f^{(IV)}(x) &= \frac{24}{(x-1)^5}, & f^{(IV)}(2) &= 24.\end{aligned}$$

Следовательно, формула Тейлора (8.1.1) третьего порядка для функции $f(x) = \frac{x}{x-1}$ в точке $x_0 = 2$ имеет вид

$$\frac{x}{x-1} = 2 - (x-2) + (x-2)^2 - (x-2)^3 + \frac{(x-2)^4}{(1+\Theta(x-2))^5}, \text{ где } 0 < \Theta < 1.$$

8.2.6 Вычислить число e с абсолютной погрешностью, не превосходящей 0,0001.

Решение. Применяя формулу Маклорена (8.1.6) для функции $f(x) = e^x$, получаем

$$e = f(1) = e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + R_n(x).$$

Число слагаемых в разложении определяем из неравенства $|R_n(x)| = \frac{e^\Theta}{(n+1)!} < 0,0001$, где $0 < \Theta < 1$. Полученное неравенство выполняется при значении $n = 7$. Следовательно,

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} = 2,2182.$$

8.2.7 Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{4x^2 + 3x^4}$.

Решение. Так как $4 - 4\cos^3 x = 4(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x) \approx 12(1 - \cos x)$, а $4x^2 + 3x^4 \approx 4x^2$, то

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - 4\cos^3 x}{4x^2 + 3x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12(1 - \cos x)}{4x^2}.$$

Заменяя $\cos x$ его разложением по формуле Маклорена $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$, получаем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - 4\cos^3 x}{4x^2 + 3x^4} = 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

поскольку $\frac{x^2}{2!} + o(x^2) \approx \frac{x^2}{2}$ при значении $x \rightarrow 0$.

8.3 Задания для решения на практическом занятии

8.3.1 Разложить многочлен $P_3(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x + 1$ по степеням двучлена $x + 1$.

8.3.2 Для многочлена $x^4 - 3x^2 + 2x + 5$ написать формулу Тейлора второго порядка в точке $x_0 = 1$. Записать остаточный член в форме Лагранжа и найти значение параметра Θ , которое соответствует следующим значениям аргумента: а) $x = 1$; б) $x = 2$; в) $x = 3$.

8.3.3 Пусть $P(x)$ — многочлен четвёртой степени, $P(1) = 3$, $P'(1) = 8$, $P''(1) = 26$, $P'''(1) = 60$, $P^{(4)}(1) = 72$. Вычислить $P(0)$, $P'(-1)$, $P''(2)$, $P'''(-2) = 0$, $P^{(4)}(3)$.

8.3.4 Написать формулу Маклорена n -го порядка функции $f(x) = e^x$.

8.3.5 Написать формулу Маклорена n -го порядка функции $f(x) = \cos x$.

8.3.6 Написать формулу Тейлора второго порядка для функции $f(x) = \operatorname{tg} x$ в точке $x_0 = 0$.

8.3.7 Написать формулу Маклорена третьего порядка для функции $f(x) = \arcsin x$ в точке $x_0 = 0$.

8.3.8 Написать формулу Тейлора третьего порядка для функции

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ в точке } x_0 = 1.$$

8.3.9 Вычислить с абсолютной погрешностью, не превосходящей 0,001, приближённое значение следующих чисел:

а) $\sqrt[3]{e}$; б) $\ln 1,05$; в) $\cos 1$; г) $\sqrt[6]{65}$.

8.3.10 Используя разложение по формуле Маклорена, вычислить пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x^2 - 3x^3}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{2x^3 + 3x^2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2 - \sin(2x - 4)}{x - 2 + \sin(5x - 10)}$.

8.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

8.4.1 Для многочлена $P_4(x)$ написать формулу Тейлора второго порядка в точке x_0 . Записать остаточный член в форме Лагранжа и найти значение параметра Θ , которое соответствует значениям аргумента: $x = x_1$, $x = x_2$ и $x = x_3$.

8.4.1.1 $P_4(x) = 5x^4 + 4x^2 - 3x - 2$, $x_0 = 2$, $x_1 = 4$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

8.4.1.2 $P_4(x) = 4x^4 + 3x^2 - 2x + 1$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$.

8.4.1.3 $P_4(x) = -3x^4 + 2x^2 + 6x - 2$, $x_0 = 3$, $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$.

8.4.1.4 $P_4(x) = 7x^4 - 2x^2 - 5x + 6$, $x_0 = -1$, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$.

8.4.1.5 $P_4(x) = 6x^4 + 2x^2 - 4x + 9$, $x_0 = 5$, $x_1 = 5$, $x_2 = -2$, $x_3 = -3$.

8.4.1.6 $P_4(x) = x^4 + 2x^2 + 3x + 4$, $x_0 = 0$, $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$.

8.4.1.7 $P_4(x) = 2x^4 - 3x^2 + 4x + 6$, $x_0 = -3$, $x_1 = 1$, $x_2 = -3$, $x_3 = -1$.

8.4.1.8 $P_4(x) = 3x^4 - 4x^2 + 3x - 3$, $x_0 = 4$, $x_1 = -4$, $x_2 = 4$, $x_3 = 2$.

8.4.1.9 $P_4(x) = x^4 + x^2 + x + 1$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$.

8.4.1.10 $P_4(x) = 7x^4 + 3x^2 - 2x - 5$, $x_0 = -3$, $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = -1$.

8.4.1.11 $P_4(x) = -4x^4 + 2x^2 + 3x + 9$, $x_0 = -1$, $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$.

8.4.1.12 $P_4(x) = 3x^4 - 6x^2 + 4x + 12$, $x_0 = 4$, $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = 4$.

8.4.1.13 $P_4(x) = 4x^4 + 2x^2 - 2x + 4$, $x_0 = -3$, $x_1 = 1$, $x_2 = -3$, $x_3 = 2$.

8.4.1.14 $P_4(x) = 2x^4 + 3x^2 - x + 8$, $x_0 = -1$, $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$.

8.4.1.15 $P_4(x) = -6x^4 - x^2 - x - 1$, $x_0 = 2$, $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$.

8.4.1.16 $P_4(x) = -4x^4 - 3x^2 - 3x + 2$, $x_0 = 2$, $x_1 = -2$, $x_2 = -3$, $x_3 = 2$.

8.4.1.17 $P_4(x) = 3x^4 + 4x^2 - 4x + 3$, $x_0 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$.

8.4.1.18 $P_4(x) = 2x^4 + 2x^2 - 3x - 3$, $x_0 = -1$, $x_1 = 4$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

8.4.1.19 $P_4(x) = x^4 + 2x^2 + 3x + 4$, $x_0 = 5$, $x_1 = -4$, $x_2 = -3$, $x_3 = 5$.

8.4.1.20 $P_4(x) = -3x^4 - 5x^2 - 3x - 4$, $x_0 = -1$, $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$.

- 8.4.1.21 $P_4(x) = 4x^4 - x^2 - 3x + 2, x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = -2.$
- 8.4.1.22 $P_4(x) = 5x^4 - 7x^2 + 2x - 3, x_0 = 7, x_1 = 1, x_2 = 7, x_3 = -3.$
- 8.4.1.23 $P_4(x) = 3x^4 - x^2 + 2x + 3, x_0 = -1, x_1 = 3, x_2 = -1, x_3 = 2.$
- 8.4.1.24 $P_4(x) = 2x^4 - 2x^2 + x + 1, x_0 = 0, x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2.$
- 8.4.1.25 $P_4(x) = 4x^4 - 2x^2 - 2x + 4, x_0 = -3, x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -3.$
- 8.4.1.26 $P_4(x) = x^4 + 2x^2 + 3x + 4, x_0 = 1, x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 1.$
- 8.4.1.27 $P_4(x) = -4x^4 + 3x^2 - x + 3, x_0 = 3, x_1 = 3, x_2 = -4, x_3 = -2.$
- 8.4.1.28 $P_4(x) = 2x^4 - 6x^2 + 5x - 2, x_0 = 1, x_1 = 4, x_2 = -4, x_3 = 1.$
- 8.4.1.29 $P_4(x) = -4x^4 + 2x^2 - 5x + 1, x_0 = 3, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -3.$
- 8.4.1.30 $P_4(x) = -4x^4 - 3x^2 - 2x - 1, x_0 = -4, x_1 = -2, x_2 = -3, x_3 = -4.$

9 ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Содержание: монотонность функций, точки экстремума, наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке, выпуклость и вогнутость функций, точки перегиба, асимптоты графика функции, схема полного исследования функций.

9.1 Теоретический материал по теме практических занятий

Определение 9.1.1 Функция называется *возрастающей* (убывающей) на интервале I , если для каждой точки $x_1 > x_2$ из этого интервала выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$ ($f(x_1) < f(x_2)$). Если последние неравенства нестрогие, то функция называется *неубывающей* (невозрастающей).

Теорема 9.1.1 Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ на интервале I возрастает (убывает), то на этом интервале I производная функции $y = f(x)$ является неотрицательной (неположительной), то есть для производной функции $y = f(x)$ выполняются неравенства $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$).

Определение 9.1.2 Интервалы, на которых функция убывает или возрастает, называются *интервалами монотонности функции*. Интервалы, на которых функция не убывает и не возрастает, называются *интервалами строгой монотонности функции*.

Определение 9.1.3 Точки области определения, в которых производная равна нулю или не существует, называются *критическими точками*. Точки области определения, в которых производная равна нулю, называют *стационарными точками*.

Определение 9.1.4 Точка x_0 называется *точкой локального максимума* (минимума), если для любой точки x из проколотой δ -окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$).

Точки локального максимума и локального минимума называются *точками локального экстремума*, а значения функции в них – *локальным экстремумом* функции в данных точках.

Теорема 9.1.2 (необходимый признак локального экстремума дифференцируемой функции). Если в точке $x = x_0$ для функции $y = f(x)$ существует локальный экстремум, то в этой точке значение производной равно нулю или не существует ($f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует).

Теорема 9.1.3 (первый достаточный признак локального экстремума). Если функция $y = f(x)$ непрерывна и дифференцируема в окрестности критической точки x_0 и при переходе через эту точку производная $f'(x)$ меняет свой знак, то точка x_0 является точкой экстремума.

При этом, если производная $f'(x)$ меняет свой знак с плюса на минус, то точка x_0 является точкой локального максимума, если производная меняет знак с минуса на плюс, то точка x_0 является точкой локального минимума.

Теорема 9.1.4 (второй достаточный признак локального экстремума). Если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в стационарной точке x_0 и $f''(x_0) < 0$, то в точке x_0 функция достигает локальный максимум, а если $f''(x_0) > 0$, то в точке x_0 функция достигает локальный минимум.

Теорема 9.1.5 (третий достаточный признак локального экстремума). Пусть функция $y = f(x)$ – n раз непрерывно дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0)$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда:

- 1) если n – чётное и $f^{(n)}(x_0) > 0$, то x_0 – точка локального минимума;
- 2) если n – чётное и $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 – точка локального максимума;
- 3) если n – нечётное, то x_0 – не является точкой локального экстремума.

Одной из основных характеристик функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ являются её глобальные экстремумы, то есть наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

Непрерывная функция $y = f(x)$ достигает на отрезке $[a; b]$ своего наибольшего $\max_{[a; b]} f(x)$ и наименьшего $\min_{[a; b]} f(x)$ значения либо в критических точках, принадлежащих отрезку $[a; b]$, либо на концах этого отрезка $[a; b]$.

Следовательно, для нахождения глобальных экстремумов $\max_{[a; b]} f(x)$ и $\min_{[a; b]} f(x)$ функции $f(x)$ необходимо найти её значения в критических точках, которые принадлежат отрезку, и на концах отрезка. Среди полученных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее значения. Если отрезок не за-

дан, то считаем, что наибольшее и наименьшее значения необходимо найти на всей области определения функции. В этом случае используем достаточные признаки экстремума.

Определение 9.1.5 Дифференцируемая функция $y = f(x)$ называется *выпуклой (вогнутой)* на интервале I , если дуга кривой на этом интервале расположена не выше (не ниже) любой касательной, проведённой к графику функции в любой точке этого интервала.

Определение 9.1.6 Точка $M_0(x_0; f(x_0))$ графика дифференцируемой функции $y = f(x)$, в которой направление выпуклости меняется на вогнутость или наоборот, называется *точкой перегиба*.

Теорема 9.1.6 Если функция $y = f(x)$ на интервале I дважды дифференцируема и $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$), то график функции на этом интервале выпуклый (вогнутый).

Теорема 9.1.7 Если вторая производная функции $y = f(x)$ в некоторой точке x_0 равна нулю или не существует и при переходе через эту точку вторая производная меняет свой знак, то точка $M_0(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба.

Определение 9.1.7 Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности.

Определение 9.1.8 Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной* (если $k = 0$ – *горизонтальной*) асимптотой графика функции $y = f(x)$ на бесконечности, если функцию $f(x)$ можно представить в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0$.

Теорема 9.1.8 Для того чтобы график функции $y = f(x)$ имел наклонную асимптоту $y = kx + b$, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = b. \quad (9.1.1)$$

Общая схема исследования функции:

- 1) находим область определения функции;
- 2) определяем точки разрыва функции, вертикальные и горизонтальные асимптоты;
- 3) исследуем функцию на наличие свойств чётности или нечётности, периодичности;
- 4) определяем интервалы монотонности функции и точки экстремума;
- 5) находим интервалы выпуклости, вогнутости функции, точки перегиба;
- 6) находим точки пересечения графика функции с осями координат;
- 7) строим график функции;
- 8) указываем множество значений функции.

Замечание. Числовая функция $y = f(x)$ называется *чётной* (*нечётной*), если область определения симметрична относительно начала координат и $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$). График чётной функции симметричен относительно оси ординат, а нечётной функции симметричен относительно начала координат. Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, с наименьшим положительным периодом T , если для любого x из области определения функции числа $x - T$ и $x + T$ также принадлежат области определения функции, и справедливо равенство $f(x - T) = f(x + T) = f(x)$.

9.2 Примеры решения типовых задач

9.2.1 Дана функция $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 6x + 8)^2}$. Определить интервалы возрастания и убывания функции. Найти точки экстремума.

Решение. Данная функция определена и непрерывна для всех $x \in \mathbb{R}$.

Находим производную функции: $f'(x) = \frac{2 \cdot (2x - 6)}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2 - 6x + 8}}$. Критическими точками

функции будут $x = 3$, в которой $f'(x) = 0$, и $x = 2$, $x = 4$, в которых $f'(x)$ не существует. Полученные точки разбивают область определения на интервалы, в каждом из которых производная функции сохраняет свой знак.

Результаты исследования приведём в виде таблицы:

x	$(-\infty; 2)$	2	$(2; 3)$	3	$(3; 4)$	4	$(4; +\infty)$
$f'(x)$	–	$\nexists$	+	0	–	$\nexists$	+
$f(x)$	$\square$	0	$\square$	1	$\square$	0	$\square$

Функция возрастает на каждом из интервалов: $[2; 3]$ и $[4; +\infty)$. Функция убывает на каждом из интервалов: $(-\infty; 2]$ и $[3; 4]$. Точки экстремума: $y_{\max} = y(3) = 1$, $y_{\min} = y(2) = y(4) = 0$.

9.2.2 Найти наименьшее и наибольшее значение функции

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x} \text{ на отрезке } [-1; 2].$$

Решение. Функция $y = f(x)$ достигает своего наибольшего и наименьшего значения на отрезке, либо в критических точках, которые принадлежат данному отрезку, либо на концах отрезка. Определим критические точки, для чего находим производную функции и выясняем, где она равна нулю или не существует.

$$f(x) = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x} \right)' = \frac{x^2 - 6x + 5}{3 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x \right)^2}}.$$

$$f'(x) = 0, \quad x^2 - 6x + 5 = 0, \quad x = 1 \in [-1; 2], \quad x = 5 \notin [-1; 2].$$

Производная функции $f'(x)$ не существует, если $\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x = 0$. Решая полученное уравнение, находим значения переменной: $x = 0 \in [-1; 2]$ или $x = \frac{9 \pm \sqrt{21}}{2} \notin [-1; 2]$. Таким образом, вычисляем значения функции в точках: $x = -1, x = 0, x = 1, x = 2$.

$$f(-1) = \sqrt[3]{\frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1)} = -\sqrt[3]{\frac{25}{3}}; \quad f(0) = \sqrt[3]{\frac{1}{3} \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0} = 0;$$

$$f(1) = \sqrt[3]{\frac{1}{3} \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1} = \sqrt[3]{\frac{7}{3}}; \quad f(2) = \sqrt[3]{\frac{1}{3} \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}.$$

Среди полученных значений выбираем наибольшее $\max_{[-1;2]} f(x)$ и наименьшее

$$\min_{[-1;2]} f(x) \text{ значения функции: } \max_{[-1;2]} f(x) = f(1) = \sqrt[3]{\frac{7}{3}}; \quad \min_{[-1;2]} f(x) = f(-1) = -\sqrt[3]{\frac{25}{3}}.$$

9.2.3 Предприятие города A для доставки своей продукции в город B строит автомобильную дорогу AC , которая соединяет его с железной дорогой BD (см. рисунок 9.2.1). К какому пункту C , относительно города B , необходимо подвести автомобильную дорогу,

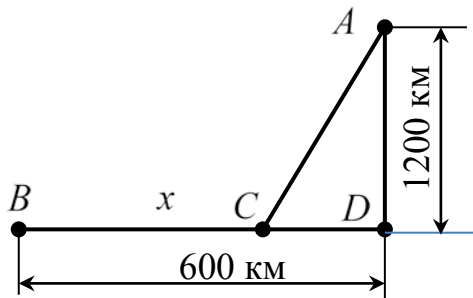


Рисунок 9.2.1 – Схема движения

чтобы при перевозке своей продукции из города A в город B предприятие имело бы наименьшее количество затрат? При этом известно, что стоимость автомобильных перевозок груза на 1 км равна 13 у. е., а стоимость перевозок груза по железной дороге 5 у. е.

Решение. Пусть S – стоимость перевозки продукции из города A в город B . Тогда $S_1 = 5x$ – стоимость перевозки груза по железной дороге на участке BC , длина которого равна x , а стоимость перевозки продукции по автомобильной дороге равна

$$S_2 = 13 \cdot |AC| = 13 \sqrt{|AD|^2 + |DC|^2} = 13 \sqrt{1200^2 + (600 - x)^2}.$$

Следовательно, общая стоимость перевозки продукции из города A в город B будет определяться по формуле:

$$S = S_1 + S_2 = 5x + 13 \sqrt{1200^2 + (600 - x)^2}.$$

Так как стоимость должна быть наименьшей, то исследуем полученную функцию на экстремум, то есть определим точки, в которых производная равна нулю или не существует.

$$\begin{aligned} S' &= (5x + 13\sqrt{1200^2 + (600 - x)^2})' = (5x)' + (13\sqrt{1200^2 + (600 - x)^2})' = \\ &= 5 - \frac{13 \cdot (600 - x)}{\sqrt{1200^2 + (600 - x)^2}} = \frac{5 \cdot \sqrt{1200^2 + (600 - x)^2} - 13 \cdot (600 - x)}{\sqrt{1200^2 + (600 - x)^2}}. \\ S' &= 0; \quad 5 \cdot \sqrt{1200^2 + (600 - x)^2} - 13 \cdot (600 - x) = 0. \\ 5 \cdot \sqrt{1200^2 + (600 - x)^2} &= 13 \cdot (600 - x). \end{aligned}$$

Решаем полученное иррациональное уравнение.

$$\begin{cases} 600 - x \geq 0, \\ 25 \cdot (1200^2 + (600 - x)^2) = 169 \cdot (600 - x)^2. \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 600, \\ 144 \cdot x^2 - 172800 \cdot x + 15840000 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 600, \\ x = 100 \vee x = 1100, \end{cases} \quad x = 100 \text{ км.}$$

Производная стоимости S' не существует, если $\sqrt{1200^2 + (600 - x)^2} = 0$, но такого значения x нет, так как сумма квадратов положительных чисел не может равняться нулю.

Таким образом, при расстоянии $x_0 = 100$ км перевозки продукции из города A в город B достигает своего экстремального значения, но при этом, затраты на перевозку продукции, которую изготавливает предприятие, может быть как наибольшей, так и наименьшей. Воспользуемся достаточным признаком экстремума: если $S''(x_0) < 0$, то при расстоянии $x = x_0$ стоимость является максимальной, а при значении $f''(x_0) > 0$ – минимальной. Найдем вторую производную функции, которая является стоимостью перевозки продукции из города A в город B , и определим её значение при перевозке груза по железной дороге на расстояние $x = 100$ км.

$$\begin{aligned} S'' &= \left(5 - \frac{13 \cdot (600 - x)}{\sqrt{1200^2 + (600 - x)^2}} \right)' = \frac{18720000}{\sqrt{(1200^2 + (600 - x)^2)^3}}. \\ S''(500) &= \left(\frac{18720000}{\sqrt{(1200^2 + (600 - x)^2)^3}} \right) \Bigg|_{x=100} = \frac{18720000}{\sqrt{(1200^2 + (600 - 100)^2)^3}} = 144000 > 0. \end{aligned}$$

Так как вторая производная $S''(100) > 0$, то, используя достаточный признак экстремума, при расстоянии $x = 100$ км. предприятие будет иметь наименьшее количество затрат.

9.2.4 Задана функция $f(x) = x^4 - 12x^3 + 30x^2 + 48$. Определить интервалы выпуклости и вогнутости функции. Определить точки перегиба.

Решение. Данная функция определена и непрерывна для всех $x \in \mathbb{R}$. Находим первую и вторую производную функции: $f'(x) = 4x^3 - 36x^2 + 60x$, $f''(x) = 12x^2 - 72x + 60$. Решая уравнение $f''(x) = 0$, находим $x = 1$ и $x = 5$. Точек, в которых вторая производная $f''(x)$ не существует, нет. Полученные точки разбивают область определения на интервалы, в каждом из которых вторая производная функции сохраняет свой знак.

Результаты исследования приведём в виде таблицы:

x	$(-\infty; 1)$	1	$(1; 5)$	5	$(5; +\infty)$
$f''(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	$\cup$	67	$\cap$	-77	$\cup$

Функция является выпуклой на интервале $(1; 5)$. Функция является вогнутой на каждом из интервалов: $(-\infty; 1)$ и $(5; +\infty)$. Точки перегиба: $M_1(1; 67)$, $M_2(5; -77)$.

9.2.5 Найти асимптоты графика функции $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$.

Решение. Функция определена и непрерывна на множестве действительных чисел, за исключением точки $x = 2$. В точке $x = 2$ односторонние пределы равны бесконечности ($\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^2}{x-2} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^2}{x-2} = +\infty$), то прямая $x = 2$ является вертикальной асимптотой. Найдём наклонные асимптоты

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x-2} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x-2} = 2.$$

Таким образом, у данной кривой существует единственная наклонная асимптота, уравнение которой $y = x + 2$.

9.2.6 Провести полное исследование функции $y = \frac{x^2}{x-1}$ и построить ее график. Определить количество корней уравнения $y(x) = a$ для любого действительного числа a .

Решение. 1. Так как, в точке $x = 1$ значение функции не существует, то областью определения функции является множество $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

2. Определим точки разрыва функции и асимптоты графика. Так как в точке $x = 1$ функция не определена, то данная точка является точкой разрыва. Исследуем функцию в окрестности данной точки:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2}{x-1} = \left(\frac{1}{-0} \right) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2}{x-1} = \left(\frac{1}{+0} \right) = +\infty.$$

Так как односторонние пределы равны $\pm\infty$, то в точке $x=1$ функция терпит разрыв второго рода, а, следовательно, прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой.

Найдем наклонные асимптоты $y = k \cdot x + b$ графика функции.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{x \cdot (x - 1)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y(x) - k \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = 1.$$

Таким образом, наклонной асимптотой графика функции является прямая $y = x + 1$.

3. Область определения функции не является симметричным множеством относительно начала координат, из определения четности и нечетности функции, исходная функция не является четной и не является нечетной. Исследуемая функция является дробно-рациональной, а, следовательно, непериодической.

4. Исследуем функцию на монотонность и экстремум. Найдем производную функции.

$$y' = \frac{(x^2)' \cdot (x-1) - x^2 \cdot (x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{2 \cdot x \cdot (x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x \cdot (x-2)}{(x-1)^2}.$$

Экстремального значения функция может достигать в критических точках, которые принадлежат области определения, то есть в точках, в которых производная равна нулю или не существует. Находим критические точки. Производная функции $y' = 0$, если $x \cdot (x-2) = 0$, то есть $x = 0 \in D(y)$ или $x = 2 \in D(y)$. Производная функции y' не существует, если $x = 1 \notin D(y)$. Знаки

y' найдем, решая методом интервалов неравенство $\frac{x \cdot (x-2)}{(x-1)^2} > 0$ (или < 0). Ре-

зультаты исследования запишем в таблицу:

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; 2)$	2	$(2; +\infty)$
y'	+	0	-	$\nexists$	-	0	+
y	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	4	$\nearrow$

По необходимому и достаточному признаку монотонности функция возрастает, если $y' \geq 0$, и убывает, если $y' \leq 0$. Следовательно, исследуемая функция возрастает на промежутках $(-\infty; 0]$ и $[2; +\infty)$, а убывает на промежутках $[0; 1)$ и $(1; 2]$. По достаточному признаку экстремума, если производная в кри-

тической точке меняет свой знак с отрицательного на положительный, то данная точка является точкой локального минимума, если же знак, в данной точке, меняется с положительного на отрицательный, то в этой точке функция достигает локального максимума.

$$y_{\min} = y(2) = 4, \quad y_{\max} = y(0) = 0.$$

5. Исследуем функцию на выпуклость, вогнутость. Определим точки перегиба, если они существуют. Найдем вторую производную функции.

$$y'' = \frac{(x^2 - 2x)' \cdot (x-1)^2 - (x^2 - 2x) \cdot ((x-1)^2)'}{(x-1)^2} = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

Находим точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует. Не существует значения переменной, при которой вторая производная функции равна нулю. Вторая производная функции y'' не существует, если $x=1 \notin D(y)$. Результаты исследования запишем в таблицу:

x	$(-\infty; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y'	–	$\nexists$	+
y		$\nexists$	

Согласно достаточному признаку выпуклости (вогнутости), функция является выпуклой, если $y'' < 0$, и вогнутой, если $y'' > 0$. Следовательно, исследуемая функция выпуклая на промежутке $(-\infty; 1)$ и вогнутая на промежутке $(1; +\infty)$. По достаточному признаку точек перегиба, если вторая производная в точке равна нулю или не существует и при переходе через эту точку из области определения функции, вторая производная меняет свой знак, то данная точка является точкой перегиба. Исходная функция не имеет точек перегиба.

6. Находим точки пересечения графика функции с осями координат.

Если $x=0$, то $y=0$. Аналогично, значение функции равно нулю, если $x=0$. Таким образом, функция имеет единственную точку пересечения с осями координат: $O(0; 0)$.

7. По результатам проведенных исследований строим график функции (рис. 9.2.2).

8. Множество значений функции $E(y): y \in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$.

Для определения числа корней уравнения $y(x) = a$ строим прямые $y = a$, которые параллельны оси абсцисс. Из

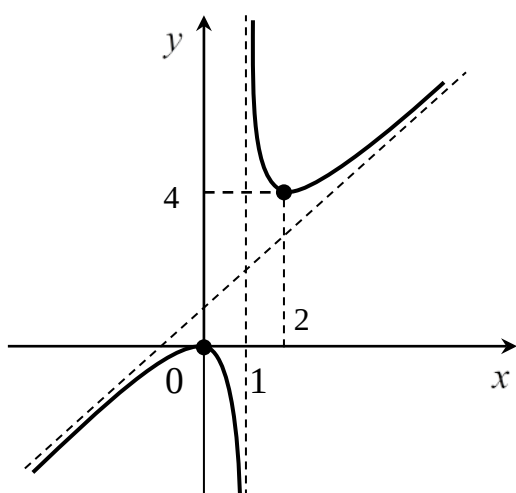


Рисунок 9.2.2 – График функ-

рисунка 9.2.2 видим, что прямая $y = a$ для $y \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$ пересекает линию графика заданной функции в двух точках, а, следовательно, уравнение $\frac{x^2}{x-1} = a$ на этих промежутках имеет ровно два корня. Если $a = 0$ или $a = 4$, то прямые $y = 0$ и $y = 4$ касаются заданной линии в одной точке, а, следовательно, уравнение имеет единственное решение. При значениях $a \in (0; 4)$ прямая не имеет точек пересечения с графиком функции $y = \frac{x^2}{x-1}$, а, следовательно, уравнение $\frac{x^2}{x-1} = a$ не имеет решения.

9.3 Задания для решения на практических занятиях

9.3.1 Для указанных функций найти интервалы возрастания и убывания и точки экстремума:

а) $y = x^3 - 15x^2 + 48x + 6$; б) $y = \frac{x^3}{x^2 - 3}$; в) $y = x^3 e^{-x}$; г) $y = \ln(1 + x^2)$.

9.3.2 Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = x^3 - 3x^2$ на отрезке $[-1; 4]$.

9.3.3 Найти на отрезке $[0; 4]$ наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x - 3}$.

9.3.4 Найти наибольшее значение функции $f(x) = \ln x/x$ на интервале $(0; +\infty)$.

9.3.5 Определить максимальную площадь равнобедренного треугольника, боковая сторона которого равна a .

9.3.6 Чему должны быть равны радиус основания R , высота H и образующая l прямого кругового конуса для того, чтобы при заданном объёме V он имел наименьшую полную поверхность?

9.3.7 Найти радиус основания и высоту прямого конуса, вписанного в шар радиуса шесть метров так, чтобы его объём был наибольшим.

9.3.8 Число 66 представить в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы произведение этих чисел было бы наибольшим.

9.3.9 По двум улицам движутся к перекрёстку два автомобиля с постоянными скоростями $v_1 = 50 \text{ км/ч}$ и $v_2 = 40 \text{ км/ч}$. Считая, что улицы пересекаются под прямым углом, и зная, что в некоторый момент времени автомобили находятся от перекрёстка на расстояниях $l_1 = 4 \text{ км}$ и $l_2 = 3 \text{ км}$, определить, через какое время расстояние между ними станет наименьшим.

9.3.10 Для указанных функций найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба:

а) $y = x^3 - 6x^2 + x + 6$; б) $y = \frac{x}{x^2 - 4}$; в) $y = \frac{\ln x}{x}$; г) $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-3)^2/2}$.

9.3.11 Найти асимптоты графиков указанных функций:

а) $y = \frac{2x}{3x-3}$; б) $y = \frac{x^3}{x^2-9}$; в) $y = xe^{1/x}$; г) $y = \frac{x^2+2x+3}{x+5}$; д) $y = \operatorname{tg} x$.

9.3.12 Провести полное исследование и построить графики указанных функций:

а) $y = x^3 - 18x^2 + 60x + 3$; б) $y = \frac{x^4}{x^3+1}$; в) $y = e^{2x-x^2}$; г) $y = \frac{3\ln x}{\sqrt{x}}$.

9.3.13 Провести полное исследование и построить график функций $y = \frac{x^3}{2(1+x)^2}$. Сколько корней имеет уравнение $\frac{x^3}{2(1+x)^2} = a$, в зависимости от параметра a .

9.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

9.4.1 Найти наибольшее $\max_{[a;b]} f(x)$ и наименьшее $\min_{[a;b]} f(x)$ значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

9.4.1.1 $y = \sqrt[3]{(x^2 + 5x + 4)^2}$, $[-5; -2]$.

9.4.1.2 $y = x^3 - 4x^2 + 4x + 1$, $[1; 3]$.

9.4.1.3 $y = \sin(x + \pi/3)$, $[0; 3\pi/2]$.

9.4.1.4 $y = e^{x^2-6x+2}$, $[0; 4]$.

9.4.1.5 $y = \ln x/x$, $[1; 3]$.

9.4.1.6 $y = \sqrt[5]{(x^2 - 7x + 12)^4}$, $[3; 2; 5]$.

9.4.1.7 $y = x^3 + 4x^2 - 11x + 2$, $[0; 4]$.

9.4.1.8 $y = \cos(x + \pi/6)$, $[-\pi/2; \pi]$.

9.4.1.9 $y = e^{x^2+4x}$, $[-3; -1]$.

9.4.1.10 $y = \ln(4 - x^2)$, $[-1; 3/2]$.

9.4.1.11 $y = \sqrt[4]{(x^2 + 6x + 8)^3}$, $[-8; -4]$.

9.4.1.12 $y = x^3 - 3x^2 + 5$, $[-2; 1]$.

9.4.1.13 $y = \sin(x - \pi/4)$, $[0; 2\pi]$.

9.4.1.14 $y = e^{x^2-2x}$, $[0; 2]$.

9.4.1.15 $y = \ln(9 - x^2)$, $[1; 2]$.

9.4.1.16 $y = \sqrt[4]{(x^2 + 6x + 8)^3}$, $[-8; -4]$.

9.4.1.17 $y = x^3 + 5x^2 + 3x$, $[-5; -1]$.

9.4.1.18 $y = \cos(x - \pi/4)$, $[\pi/2; 2\pi]$.

9.4.1.19 $y = e^{x^2+8x}$, $[-5; 0]$.

9.4.1.20 $y = \ln(16 - x^2)$, $[-\sqrt{15}; \sqrt{15}]$.

9.4.1.21 $y = \sqrt[9]{(x^2 - 12x + 120)^7}$, $[0; 7]$.

9.4.1.22 $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$, $[2; 5]$.

9.4.1.23 $y = \sin(x - \pi/6)$, $[-\pi/2; \pi]$.

9.4.1.24 $y = e^{x^2-10x}$, $[0; 6]$.

9.4.1.25 $y = \ln(1 + x^2)$, $[-2; 3]$.

9.4.1.26 $y = \sqrt[4]{(x^2 + 6x + 8)^3}$, $[-8; -4]$.

9.4.1.27 $y = x^3 + 0,5 \cdot x^2 - 2x$, $[0; 5]$.

9.4.1.28 $y = \cos(x - \pi/3)$, $[-3\pi/2; \pi]$.

9.4.1.29 $y = e^{4x-x^2}$, $[1; 3]$.

9.4.1.30 $y = 2\ln(e + x^2)$, $[-1; 1]$.

9.4.2 Решить следующие задачи.

9.4.2.1 Найти наибольший объём конуса с длиной образующей, равной $3\sqrt{3}$.

9.4.2.2 Найти высоту цилиндра, который можно вписать в шар радиуса $5\sqrt{2}$ и имеющего наибольшую площадь боковой поверхности.

9.4.2.3 Найти радиус основания конуса с боковой поверхностью, равной $(\sqrt{2} + 1) \cdot \pi$, если шар, вписанный в этот конус, имеет наибольший объём.

9.4.2.4 Найти наибольшую площадь боковой поверхности конуса, который вписан в шар радиуса $R = 3$ м.

9.4.2.5 Найти высоту конуса наименьшего объёма, описанного около полушара радиуса $\sqrt{27}$, при этом центр шара совпадает с центром основания конуса.

9.4.2.6 Найти наибольший объём цилиндра, вписанный в шар радиуса $3\sqrt{3}$.

9.4.2.7 Найти отношение радиуса шара, описанного около цилиндра, с наибольшей площадью боковой поверхности, к радиусу основания цилиндра.

9.4.2.8 Во сколько раз объём шара, описанного около цилиндра наибольшего объёма, больше объёма этого цилиндра?

9.4.2.9 Найти отношение радиуса шара, который описан около конуса наибольшего объёма, к высоте этого конуса.

9.4.2.10 Найти радиус основания конуса наименьшего объёма, в который вписан цилиндр, радиус основания которого равен 4. Плоскости оснований конуса и цилиндра совпадают.

9.4.2.11 В конус, образующая которого составляет с плоскостью основания угол величиной 2φ , вписана сфера радиуса $R = 4$ м. При каких значениях угла φ площадь боковой поверхности конуса будет наименьшей? Найти эту наименьшую площадь.

9.4.2.12 Найти наибольшее значение объёма правильной четырёхугольной пирамиды, вершины которой принадлежат описанной сфере радиуса $R = 9$ м.

9.4.2.13 Найти наибольшее значение объёма правильной треугольной призмы, если расстояние от центра основания до одной из вершин другого основания равно $4\sqrt{3}$ м.

9.4.2.14 Найти отношение высоты конуса, описанного около цилиндра с наибольшей боковой поверхностью, к высоте этого цилиндра. Плоскости оснований конуса и цилиндра совпадают.

9.4.2.15 Найти отношение радиуса основания конуса, описанного около цилиндра наибольшего объёма, к радиусу основания этого цилиндра. Плоскости оснований конуса и цилиндра совпадают.

9.4.2.16 В правильной шестиугольной пирамиде боковое ребро равно $l = 2$ м. При какой длине стороны основания объём пирамиды будет наибольшим? Найти наибольший объём пирамиды.

9.4.2.17 Найти наибольший объём цилиндра, если площадь его полной поверхности равна $S = 12\pi$ м².

9.4.2.18 Найти наименьшую площадь полной поверхности прямой правильной треугольной призмы объёмом $V = 36 \text{ м}^3$.

9.4.2.19 Найти наибольший объём правильной четырёхугольной пирамиды с боковым ребром $l = \sqrt{2} \text{ м}$.

9.4.2.20 Из всех правильных треугольных призм с заданным объёмом $V = 16\sqrt{3} \text{ м}^3$ найти призму с наименьшей суммой длин всех её рёбер. Чему равна длина стороны основания этой призмы?

9.4.2.21 Найти площадь прямоугольника наибольшей площади, который вписан в окружность радиуса $R = 4\sqrt{2} \text{ м}$.

9.4.2.22 В конус радиуса 4 см и высотой 6 см вписан цилиндр наибольшего объёма. Определить высоту цилиндра.

9.4.2.23 Найти наибольшую площадь прямоугольника, основание которого лежит на гипотенузе длиной 13 см описанного прямоугольного треугольника, острый угол которого равен 30° .

9.4.2.24 Найти наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в прямоугольную трапецию с длинами оснований 24 см и 8 см и длиной высоты 12 см.

9.4.2.25 Найти наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в прямоугольный треугольник со сторонами длиной 18 см, 24 см 30 см и имеющего с ними общий острый угол.

9.4.2.26 Первый член арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \dots$ равен десяти. Найти наименьшее значение суммы $S = a_1 \cdot a_4 + a_2 \cdot a_6$.

9.4.2.27 Пятый член арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \dots$ равен двенадцати. Найти наименьшее значение произведения $S = a_1 \cdot a_3 \cdot a_5$.

9.4.2.28 Четвёртый член арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \dots$ равен четырём. Найти наименьшее значение суммы $S = a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_3 + a_1 \cdot a_3$.

9.4.2.29 Определить размеры открытого бассейна объёмом 64 м^2 с квадратным дном таким образом, чтобы на облицовку дна и стен плиткой пошло наименьшее количество материала.

9.4.2.30 Через какую точку на кривой $y = -x^2 + 2x$ должна проходить касательная к этой кривой, чтобы трапеция, образованная касательной, осями координат и прямой $x = 1$, имела наименьшую площадь?

9.4.3 Определить число корней уравнения $f(x) = a$, где параметр $a \in \mathbb{R}$, проведя полное исследование графика функции $y = f(x)$.

9.4.3.1 а) $f(x) = \frac{x^3 - 4}{(x-1)^3}$; б) $f(x) = (3-x) \cdot e^{x-2}$.

9.4.3.2 а) $f(x) = \frac{x^3 + 4}{(x+1)^3}$; б) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

9.4.3.3 а) $f(x) = \frac{8x^3 + 8x}{(2x-1)^3}$; б) $f(x) = (4-x) \cdot e^{x-3}$.

$$9.4.3.4 \text{ a) } f(x) = \frac{8x^3 + 8x}{(2x+1)^3};$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

$$9.4.3.5 \text{ a) } f(x) = \frac{x^4 - 8}{(x+1)^4};$$

$$\text{б) } f(x) = (-1-x) \cdot e^{x+2}.$$

$$9.4.3.6 \text{ a) } f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 1};$$

$$\text{б) } f(x) = x^2 \ln x.$$

$$9.4.3.7 \text{ a) } f(x) = \frac{x^4}{x^3 + 1};$$

$$\text{б) } f(x) = (4+x) \cdot e^{-x-3}.$$

$$9.4.3.8 \text{ a) } f(x) = \frac{x^2}{x^3 - 1};$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{1}{x \ln x}.$$

$$9.4.3.9 \text{ a) } f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3};$$

$$\text{б) } f(x) = (3+2x) \cdot e^{-2x-2}.$$

$$9.4.3.10 \text{ a) } f(x) = \frac{x}{2-x^3};$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{\ln x}{x^2}.$$

$$9.4.3.11 \text{ a) } f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1};$$

$$\text{б) } f(x) = (x-2) \cdot e^{3-x}.$$

$$9.4.3.12 \text{ a) } f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 1};$$

$$\text{б) } f(x) = x^2 \cdot \ln^2 x.$$

$$9.4.3.13 \text{ a) } f(x) = \frac{x^2}{x-2};$$

$$\text{б) } f(x) = (5+2x) \cdot e^{-2x-4}.$$

$$9.4.3.14 \text{ a) } f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4};$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{x^2}{\ln x}.$$

$$9.4.3.15 \text{ a) } f(x) = \frac{x^4}{x^2 - 4};$$

$$\text{б) } f(x) = (2x-1) \cdot e^{\frac{2}{x}}.$$

$$9.4.3.16 \text{ a) } f(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^2};$$

$$\text{б) } f(x) = x \cdot \ln^2 x.$$

$$9.4.3.17 \text{ a) } f(x) = \frac{x^3}{3-x^2};$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{e^{2x+2}}{2x+2}.$$

$$9.4.3.18 \text{ a) } f(x) = \frac{x^3}{2x^2 + 4x + 2};$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{\ln^2 x}{x^2}.$$

$$9.4.3.19 \text{ a) } f(x) = \frac{x}{x^2 + 1};$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}.$$

$$9.4.3.20 \text{ a) } f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 7x - 3}{2x^2}; \quad \text{б) } f(x) = \ln \frac{x}{x+2} + 2.$$

$$9.4.3.21 \text{ a) } f(x) = \frac{3x^4 + 1}{x^3};$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{e^{5x-5}}{5x-5}.$$

$$9.4.3.22 \text{ а) } f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2};$$

$$\text{б) } f(x) = \ln \frac{x}{x-3} - 3.$$

$$9.4.3.23 \text{ а) } f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x-1};$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{e^{7-x}}{7-x}.$$

$$9.4.3.24 \text{ а) } f(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{x-4};$$

$$\text{б) } f(x) = 2 \ln \frac{x+3}{x} - 3.$$

$$9.4.3.25 \text{ а) } f(x) = \frac{2x^3 + 1}{x^2};$$

$$\text{б) } f(x) = -\frac{e^{-3-x}}{3+x}.$$

$$9.4.3.26 \text{ а) } f(x) = \frac{8x-8}{x^2 + 2x + 1};$$

$$\text{б) } f(x) = 3 \cdot \ln \frac{x}{x+3} - 7.$$

$$9.4.3.27 \text{ а) } f(x) = \frac{x^3 - 32}{x^2};$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{e^{9+x}}{9+x}.$$

$$9.4.3.28 \text{ а) } f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x+1};$$

$$\text{б) } f(x) = e^{2x-x^2}.$$

$$9.4.3.29 \text{ а) } f(x) = \frac{x^5}{x^4 - 1};$$

$$\text{б) } f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6).$$

$$9.4.3.30 \text{ а) } f(x) = \frac{1 - 2x^3}{x^2};$$

$$\text{б) } f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}.$$

10 ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Содержание: арифметическое точечное пространство R^n , понятие функции нескольких переменных, предел и непрерывность функции нескольких переменных, дифференцирование функций нескольких переменных, предельная производительность факторов производства, предельная норма замещения двух факторов производства, частный коэффициент эластичности выпуска продукции.

10.1 Теоретический материал по теме практического занятия

В дифференциальном и интегральном исчислении функции нескольких переменных используется понятие n -мерного арифметического пространства.

Определение 10.1.1 Множество всех упорядоченных наборов $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ действительных чисел $x_1; x_2; \dots; x_n$ называется n -мерным арифметическим точечным пространством R^n , а его элементы – точками пространства R^n . Числа $x_1; x_2; \dots; x_n$ называются координатами точки $P(x_1; x_2; \dots; x_n)$.

Определение 10.1.2 Расстоянием ρ между точками $P(x_1; x_2; \dots; x_n)$ и $P'(x'_1; x'_2; \dots; x'_n)$ n -мерного пространства называется число

$$\rho(P, P') = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + \dots + (x_n - x'_n)^2}. \quad (10.1.1)$$

Пусть $D \subset \mathbf{R}^n$ – произвольное множество точек n -мерного арифметического пространства. Если каждой точке $P(x_1; x_2; \dots; x_n) \in D$ поставлено в соответствие некоторое, вполне определённое действительное число $f(P) = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$, то говорят, что на множестве D задана числовая функция $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ от n переменных $x_1; x_2; \dots; x_n$. Множество D называется областью определения, а множество $E = \{u \in \mathbf{R} \mid u = f(P), P \in D\}$ – областью значений функции $u = f(P)$.

В частном случае $n = 2$ функция двух переменных $z = f(x, y)$ может рассматриваться как функция точек плоскости трёхмерного геометрического пространства с фиксированной системой координат $Oxyz$. Графиком этой функции называется множество точек $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^n \mid z = f(x, y)\}$.

Определение 10.1.3 Число A называется *пределом функции* $u = f(P)$ при стремлении точки $P(x_1; x_2; \dots; x_n)$ к точке $P_0(a_1; a_2; \dots; a_n)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из условия

$$0 < \rho(P, P_0) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2} < \delta$$

следует

$$|f(x_1; x_2; \dots; x_n) - A| < \varepsilon.$$

При этом записывают

$$A = \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ x_2 \rightarrow a_2 \\ \dots \\ x_n \rightarrow a_n}} f(x_1; x_2; \dots; x_n).$$

Определение 10.1.4 Функция $u = f(P)$ называется *непрерывной* в точке P_0 , если выполняются следующие три условия:

- 1) функция $f(P)$ определена в точке P_0 ;
- 2) существует $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$;
- 3) $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$.

Функция называется *непрерывной в области*, если она непрерывна в каждой точке этой области. Если в точке P_0 хотя бы одно из условий 1) – 3) нарушено, то точка P_0 называется точкой разрыва функции $u = f(P)$. Точки разрыва могут быть изолированными, образовывать линии разрыва, поверхности разрыва и так далее.

Рассмотрим произвольную фиксированную точку $P(x_1; \dots; x_i; \dots; x_n)$ из области определения функции $u = f(x_1; \dots; x_n)$. Если придать переменной x_i приращение Δx_i , то функция также получит приращение $\Delta_{x_i} u = f(x_1; \dots; x_i + \Delta x_i; \dots; x_n) - f(x_1; \dots; x_i; \dots; x_n)$.

Определение 10.1.5 Частной производной функции $u = f(x_1; \dots; x_n)$ в произвольно фиксированной точке $P(x_1; \dots; x_i; \dots; x_n)$ по переменной x_i называется предел отношения частного приращения функции $\Delta_{x_i} u$ к соответствующему приращению аргумента Δx_i , при стремлении последнего к нулю, то есть

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1; \dots; x_i + \Delta x_i; \dots; x_n) - f(x_1; \dots; x_i; \dots; x_n)}{\Delta x_i}.$$

Обозначение: $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ или $f'_{x_i}(x_1; \dots; x_n)$.

Частные производные вычисляются по обычным правилам и формулам дифференцирования, при этом все переменные, кроме переменной x_i , считаются постоянными величинами.

Частными производными второго порядка функции $u = f(x_1; \dots; x_n)$ называются частные производные от её частных производных первого порядка. Частные производные второго порядка обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f''_{x_i x_i}(x_1; \dots; x_i; \dots; x_n),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f''_{x_i x_j}(x_1; \dots; x_i; \dots; x_n).$$

Аналогично определяются частные производные более высоких порядков.

Результат многократного дифференцирования по различным переменным не зависит от очерёдности дифференцирования при условии, что возникающие при этом «смешанные» частные производные непрерывны.

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x; y)$. Частные производные первого и второго порядка от этой функции имеют вид

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

10.2 Примеры решения типовых задач

10.2.1 Найти область определения функции $y = \arcsin(y/x)$.

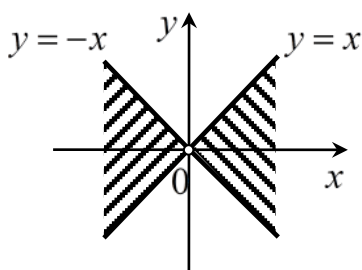


Рисунок 10.2.1.1 – Область определения функции

Решение: Функция $y = \arcsin(y/x)$

определена при $-1 \leq \frac{y}{x} \leq 1$, $x \neq 0$. Следовательно, $-x \leq y \leq x$ при $x > 0$, и $x \leq y \leq -x$ при $x < 0$.

Область определения функции изображена на рисунке 10.2.1.1 и содержит границы области, за исключением начала координат.

10.2.2 Найти предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} (1 + xy)^{\frac{3}{x^2 + xy}}$

Решение. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} (1 + xy)^{\frac{3}{x^2 + xy}} = (1^\infty) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} (1 + xy)^{\frac{1}{xy} \cdot \frac{3xy}{x^2 + xy}} = e^{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{3y}{x+y}} = e^3.$

10.2.3 Найти точки разрыва функции $u = \frac{x + y + z}{3x + 2y - z - 4}$.

Решение. Функция не определена в точках, в которых знаменатель обращается в нуль. Поэтому она имеет поверхность разрыва – плоскость $3x + 2y - z - 4 = 0$.

10.2.4 Найти частные производные первого и второго порядков от функции $z = x^5 + y^5 - x^3 y^3$.

Решение. Находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^5 + y^5 - x^3 y^3)'_x = 5x^4 - 3x^2 y^3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = (x^5 + y^5 - x^3 y^3)'_y = 5y^4 - 3x^3 y^2.$$

Находим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (5x^4 - 3x^2 y^3)'_x = 20x^3 - 6xy^3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (5x^4 - 3x^2 y^3)'_y = -9x^2 y^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (5y^4 - 3x^3 y^2)'_y = 20y^3 - 6x^3 y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (5y^4 - 3x^3 y^2)'_x = -9x^2 y^2.$$

10.2.5 Имеется производственная функция $z = 6x^3 - x^2y^2 + 5y^3$, где x – затраты живого труда, а y – затраты овеществлённого труда. Найти частные коэффициенты эластичности выпуска продукции по заданным факторам при значениях $x=1$, $y=2$.

Решение. Находим частные производные от производственной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 18x^2 - 2xy^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 15y^2 - 2x^2y. \text{ Тогда частные коэффициенты эластичности}$$

$$\text{выпуска продукции по заданным факторам равны: } \varepsilon_x = \frac{x}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{18x^3 - 2x^2y^2}{6x^3 - x^2y^2 + 5y^3},$$

$$\varepsilon_y = \frac{y}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{15y^3 - 2x^2y^2}{6x^3 - x^2y^2 + 5y^3}. \text{ Найдём значения коэффициентов при } x=1, y=2:$$

$\varepsilon_x(1;2) \approx 0,24$, $\varepsilon_y(1;2) \approx 2,67$. Таким образом, с увеличением затрат живого труда на 1 % объём производства возрастет на 0,24 %, а с увеличением затрат овеществлённого труда на 1 % объём производства увеличится на 2,67 %.

10.3 Задания для решения на практическом занятии

10.3.1 Найти области определения функций двух переменных.

$$10.3.1.1 \quad z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}. \quad 10.3.1.2 \quad \arccos \frac{x}{y}. \quad 10.3.1.3 \quad z = \ln(x - y).$$

10.3.2 Вычислить пределы

$$10.3.2.1 \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(1 + y^2\right)^{\frac{4x^2 + x}{xy^2}}. \quad 10.3.2.2 \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{y}. \quad 10.3.2.3 \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{xy^2 - 4x}{x}.$$

10.3.3 Найти частные производные первого и второго порядков функций, заданных в задачах 10.3.3.1–10.3.3.6. В задаче 10.3.3.1 найти значения частных производных в точке $M_0(4;3)$.

$$10.3.3.1 \quad z = x + y^4 - x^5y^5. \quad 10.3.3.2 \quad z = xy - \frac{y}{x}. \quad 10.3.3.3 \quad z = e^{2x} \cos 5y.$$

$$10.3.3.4 \quad z = \ln(x^2 + y^2). \quad 10.3.3.5 \quad z = \cos(x^2y^2) \quad 10.3.3.6 \quad z = x^y.$$

$$10.3.4 \text{ Показать, что } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \text{ если } z = x \sin(ax + by).$$

$$10.3.5 \text{ Показать, что } y \frac{\partial z}{\partial x} = x \frac{\partial z}{\partial y}, \text{ если } z = \ln(x^2 + y^2).$$

10.3.6 Имеется производственная функция $z = 3x^4 - x^3y^2 + 5y^2$, где x – затраты живого труда, а y – затраты овеществлённого труда. Найдите частные

коэффициенты эластичности выпуска продукции по заданным факторам при значениях $x=3$, $y=2$.

10.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

10.4.1 Найти частные производные первого и второго порядков для функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(3; 2)$.

10.4.1.1 $z = x^5 - x^3 y^4 + y^6$.

10.4.1.3 $z = x^5 - xy^4$.

10.4.1.5 $z = x^5 + x^2 y^3 - y$.

10.4.1.7 $z = x^4 - x^3 y^2 + y^3$.

10.4.1.9 $z = x^6 + x^3 y$.

10.4.1.11 $z = x - xy^5 + y^4$.

10.4.1.13 $z = x^3 - x^2 y^3 + y^4$.

10.4.1.15 $z = x^5 - x^3 y$.

10.4.1.17 $z = x - x^2 y^3 + y^5$.

10.4.1.19 $z = x^2 - x^2 y^3 + y^4$.

10.4.1.21 $z = xy^5 - y^3$.

10.4.1.23 $z = x - x^3 y^4 + y^5$.

10.4.1.25 $z = x^4 - x^5 y^5 + y^4$.

10.4.1.27 $z = 4x^4 + y^5$.

10.4.1.29 $z = x + x^5 y^6 + y^4$.

10.4.1.2 $z = x - x^3 y^4 + y^6$.

10.4.1.4 $z = x^6 + x^7 y^5 - y^4$.

10.4.1.6 $z = x^9 - x^3 y$.

10.4.1.8 $z = x + x^4 y^3 + y^7$.

10.4.1.10 $z = x^4 + x^6 y^5 - y^2$.

10.4.1.12 $z = xy^3 + y^4$.

10.4.1.14 $z = x^7 - x^3 y^2 - y$.

10.4.1.16 $z = x^6 + x^5 y^2 + y^5$.

10.4.1.18 $z = x^2 y + y^3$.

10.4.1.20 $z = x^4 + x^5 y^2 + y$.

10.4.1.22 $z = x^4 + x^6 y^3 - y^4$.

10.4.1.24 $z = x^2 + xy^7$.

10.4.1.26 $z = x^4 + x^5 y^2 - y$.

10.4.1.28 $z = x^6 + x^5 y^5 + y^2$.

10.4.1.30 $z = xy^3 + y^2$.

11 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ. ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Содержание: производные функции, заданной неявно, уравнения касательной и нормали к поверхности, полный дифференциал функции и его применение.

11.1 Теоретический материал по теме практического занятия

11.1.1 Неявные функции одной и нескольких независимых переменных. Геометрические приложения частных производных

Пусть уравнение $f(x; y) = 0$, где f – дифференцируемая функция переменных x и y , определяет y как функцию от переменной x . Тогда первая

производная этой неявной функции $y = y(x)$ в точке x определяется по формуле

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x; y)}{f'_y(x; y)} \quad (11.1.1.1)$$

при условии $f'_y(x; y) \neq 0$. Производные высших порядков находятся последовательным дифференцированием формулы (11.1.1.1).

Пусть уравнение $F(x_1; \dots; x_n; u) = 0$, где F – дифференцируемая функция переменных $x_1, \dots, x_n, u$, определяет u как функцию от переменных $x_1, \dots, x_n$. Частные производные этой неявной функции $u = u(x_1; \dots; x_n)$ в точке $P(x_1; x_2; \dots; x_n)$ определяются по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{F'_{x_i}(x_1; \dots; x_n; u)}{F'_u(x_1; \dots; x_n; u)} \quad (i = \overline{1; n}) \quad (11.1.1.2)$$

при условии $f'_u(x_1; \dots; x_n; u) \neq 0$. Частные производные высших порядков находятся последовательным дифференцированием формулы (11.1.1.2).

Определение 11.1.1.1 *Касательной плоскостью* к поверхности в её точке P_0 (точка касания) называется плоскость, содержащая все касательные к кривым, проведённым на поверхности через эту точку.

Определение 11.1.1.2 *Нормалью* к поверхности в её точке P_0 называется прямая, перпендикулярная к касательной плоскости и проходящая через точку касания.

Если уравнение поверхности $F(x, y, z) = 0$, то уравнение касательной плоскости в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$F'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot (y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot (z - z_0) = 0. \quad (11.1.1.3)$$

Уравнение нормали

$$F'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot (y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot (z - z_0) = 0. \quad (11.1.1.4)$$

В случае задания поверхности в явной форме $z = f(x; y)$, уравнение касательной плоскости в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0), \quad (11.1.1.5)$$

а уравнение нормали –

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \quad (11.1.1.6)$$

11.1.2 Полный дифференциал функции и его применение

Полным приращением функции $u = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ в точке $P(x_1; x_2; \dots; x_n)$ соответствующим приращениям аргументов $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ называется разность $\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1; x_2 + \Delta x_2; \dots; x_n + \Delta x_n) - f(x_1; x_2; \dots; x_n)$.

Определение 11.1.2.1 Функция $u = f(P)$ называется дифференцируемой в точке $P(x_1; x_2; \dots; x_n)$, если всюду в некоторой окрестности этой точки полное приращение функции может быть представлено в виде

$$\Delta u = A_1 \cdot \Delta x_1 + A_2 \cdot \Delta x_2 + \dots + A_n \cdot \Delta x_n + o(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_n^2}$, $A_1, A_2, \dots, A_n$ – некоторые действительные числа, не зависящие от приращений аргументов $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$.

Определение 11.1.2.2 Полным дифференциалом функции $u = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ в точке $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется главная линейная часть полного приращения функции в рассматриваемой точке, которая линейна относительно приращений аргументов $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$, то есть выражение вида

$$du = A_1 \cdot \Delta x_1 + A_2 \cdot \Delta x_2 + \dots + A_n \cdot \Delta x_n.$$

Дифференциалы независимых переменных по определению принимаются равными их приращению ($dx_i = \Delta x_i$, $i = \overline{1; n}$), а значения действительных чисел A_i равны значению частных производных в рассматриваемой точке ($A_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$).

Тогда для полного дифференциала функции $u = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ справедлива формула

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot dx_n. \quad (11.1.2.1)$$

Функции u и v подчиняются обычным правилам дифференцирования:
 $d(u + v) = du + dv$, $d(uv) = vdu + u dv$, $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}$.

Полный дифференциал находит широкое применение в приближённых вычислениях. При достаточно малом значении $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_n^2}$ для дифференцируемой функции $u = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ имеет место приближённое равенство $\Delta u \approx du$. Следовательно, справедлива приближённая формула

$$f(x_1 + \Delta x_1; x_2 + \Delta x_2; \dots; x_n + \Delta x_n) \approx f(x_1; x_2; \dots; x_n) + df(x_1; x_2; \dots; x_n). \quad (11.1.2.2)$$

Определение 11.1.2.3 Дифференциалом второго порядка d^2u функции $u = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ называется дифференциал от её дифференциала первого порядка, рассматриваемого как функция переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ при фиксированных значениях $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$: $d^2u = d(du)$.

Аналогично определяются дифференциалы более высокого порядка: $d^3u = d(d^2u)$, $d^4u = d(d^3u)$, ..., $d^k u = d(d^{k-1}u)$.

Дифференциал k -го порядка функции $u = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$, где $x_1, x_2, \dots, x_n$ – независимые переменные, выражается символической формулой

$$d^k u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^k u. \quad (11.1.2.3)$$

Записанная формула формально раскрывается по биномиальному закону.

Например, в случае функции $z = f(x, y)$ двух независимых переменных x и y для дифференциалов второго и третьего порядков справедливы формулы

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2, \quad (11.1.2.4)$$

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3. \quad (11.1.2.5)$$

11.2 Примеры решения типовых задач

11.2.1 Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2 y}{dx^2}$, если $xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$.

Решение. Обозначим левую часть уравнения через функцию $f(x, y)$. То-

гда $f'_x(x, y) = y - \frac{ye^{xy} - ye^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}} = \frac{2ye^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}}$, $f'_y(x, y) = x - \frac{xe^{xy} - xe^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}} = \frac{2xe^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}}$.

По формуле (11.1.1.1) получаем $\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x; y)}{f'_y(x; y)} = -\frac{2ye^{-xy}}{2xe^{-xy}} = -\frac{y}{x}$. Дифференцируем вторично, учитывая, что y есть функция от переменной x :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(-\frac{y}{x} \right) = -\frac{x \frac{dy}{dx} - y}{x^2} = -\frac{y - x \left(-\frac{y}{x} \right)}{x^2} = \frac{2y}{x^2}.$$

11.2.2 Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $x^3 + 2y^3 + 3z^3 - 4xyz - 3 = 0$.

Решение. Обозначим левую часть уравнения через функцию $F(x, y, z)$. Тогда $F'_x(x, y, z) = 3x^2 - 4yz$, $F'_y(x, y, z) = 6y^2 - 4xz$, $F'_z(x, y, z) = 9z^2 - 4xy$.

По формуле (11.1.1.2) получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = \frac{4yz - 3x^2}{9z^2 - 4xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = \frac{4xz - 6y^2}{9z^2 - 4xy}.$$

11.2.3 Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 + y^2$ в точке $M_0(1, 2, 5)$.

Решение. Находим частные функции в заданной точке $M_0(1, 2, 5)$: $z'_x(1, 2) = 2x|_{x=1} = 2$, $z'_y(1, 2) = 2y|_{y=2} = 4$. По формуле (11.1.1.5) уравнение касательной плоскости имеет вид $z - 5 = 2 \cdot (x - 1) + 4 \cdot (y - 2)$ или $2x + 4y - z - 5 = 0$. По формуле (11.1.1.6) находим уравнение нормали: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-5}{-1}$.

11.2.4 Найти уравнения касательной плоскости и нормали к сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ в точке $M_0(2, 3, 6)$.

Решение. Обозначим через $F(x, y, z)$ левую часть уравнения сферы. Находим значения частных производных функции $F(x, y, z)$ в точке $M_0(2, 3, 6)$: $F'_x(M_0) = 2x|_{x=2, y=3, z=6} = 4$, $F'_y(M_0) = 2y|_{x=2, y=3, z=6} = 6$, $F'_z(M_0) = 2z|_{x=2, y=3, z=6} = 12$.

По формуле (11.1.1.3) уравнение касательной плоскости имеет вид $4 \cdot (x - 2) + 6 \cdot (y - 3) + 12 \cdot (z - 6) = 0$ или $2x + 3y + 6z - 49 = 0$. По формуле (11.1.1.4) находим уравнение нормали: $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-6}{6}$.

11.2.5 Найти дифференциалы первого и второго порядков функции $z = y^3 e^{2x}$.

Решение. Найдём частные производные первого и второго порядков:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2y^3 e^{2x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 e^{2x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4y^3 e^{2x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y^2 e^{2x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6ye^{2x}.$$

По формулам (11.1.2.1) и (11.1.2.4) имеем

$$dz = 2y^3 e^{2x} dx + 3y^2 e^{2x} dy, \quad d^2z = 4y^3 e^{2x} dx^2 + 12y^2 e^{2x} dx dy + 6ye^{2x} dy^2.$$

11.2.6 Вычислить приближённо $\sqrt{(3,97)^2 + (3,02)^2}$.

Решение. Заданное число будем рассматривать как значение функции $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, при значениях $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, если $x_0 = 4$, $y_0 = 3$, $\Delta x = -0,03$, $\Delta y = 0,02$. Имеем

$$f(4,3) = 5, \Delta f(x, y) \approx df(x, y) = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \Delta f(x_0, y_0) = \frac{-4 \cdot 0,03 + 3 \cdot 0,02}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = -0,012$$

Следовательно, $\sqrt{(3,97)^2 + (3,02)^2} \approx 5 - 0,012 = 4,988$.

11.3 Задания для решения на практическом занятии

11.3.1 Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $x + y - e^{y-x} = 0$.

11.3.2 Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $x^4 - 3y^2 + 2z^3 - 5xyz + 7 = 0$.

11.3.3 Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = \sin x \cos y$ в точке $M_0(\pi/4, \pi/4, 1/2)$.

11.3.4 Найти уравнения касательной плоскости и нормали к эллипсоиду $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 = 144$ в точке $M_0(3, 2, 3\sqrt{2}/2)$.

11.3.5 Найти дифференциалы первого и второго порядков для заданных функций: а) $z = y^3 - 2x^2y^4 + x^4$; б) $z = x/y - y/x$; в) $z = x \ln(y/x)$.

11.3.6 Используя понятие полного дифференциала, вычислить приближённо значения числовых выражений: а) $\sqrt{(1,05)^3 + (1,96)^3}$; б) $\sin 32^\circ \cos 59^\circ$.

11.3.7 Период T колебания маятника вычисляется по формуле $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, где l – длина маятника, g – ускорение силы тяжести. Найти ошибку в определении T , которая получается в результате небольших ошибок $\Delta l = \alpha$ и $\Delta g = \beta$ при измерениях длины маятника и ускорения силы тяжести.

11.3.8 Одна сторона прямоугольника равна шести метрам, а другая равна восьми метрам. Как изменится диагональ прямоугольника, если первую сторону увеличить на четыре сантиметра, а другую сторону – на два сантиметра?

11.3.9 К эллипсоиду $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ провести касательные плоскости, которые были бы параллельны плоскости $x + 4y + 6z = 0$.

11.3.10 На сфере $(x-1)^2 + y^2 - z^2 = 1$ найти точки, в которых касательная плоскость параллельна плоскости Oxz .

11.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

11.4.1 Используя понятие полного дифференциала вычислить приближённое значение заданного числового выражения. Найти дифференциалы пер-

вого и второго порядка для функции $z = f(x, y)$, которую надо составить для вычисления значения данного числового выражения. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = f(x, y)$, которая была выбрана для вычисления значения функции, в точке $P_0(x_0, y_0)$.

$$11.4.1.1 \quad \sqrt{(2,9)^2 + (4,1)^2}.$$

$$11.4.1.3 \quad 3,01^{4,98}.$$

$$11.4.1.5 \quad \cos 58^0 \sin 29^0.$$

$$11.4.1.7 \quad (3,05)^3 + (6,98)^2.$$

$$11.4.1.9 \quad \operatorname{arctg}(0,96 \cdot 1,02).$$

$$11.4.1.11 \quad \sqrt{(6,1)^2 + (7,9)^2}.$$

$$11.4.1.13 \quad 1,96^{5,04}.$$

$$11.4.1.15 \quad \cos 56^0 \sin 31^0.$$

$$11.4.1.17 \quad (4,03)^3 + (2,95)^2.$$

$$11.4.1.19 \quad \operatorname{arctg}(0,98 \cdot 1,01).$$

$$11.4.1.21 \quad \sin 28^0 \cos 59^0.$$

$$11.4.1.23 \quad \ln(1,02 \cdot 0,98).$$

$$11.4.1.25 \quad \operatorname{tg} 44^0 \operatorname{ctg} 47^0.$$

$$11.4.1.27 \quad \sqrt[3]{(0,9)^3 + (2,2)^3}.$$

$$11.4.1.29 \quad 4,99^{-3,02}.$$

$$11.4.1.2 \quad \sin 32^0 \cos 55^0.$$

$$11.4.1.4 \quad \ln(1,03 \cdot 0,97).$$

$$11.4.1.6 \quad \operatorname{tg} 43^0 \operatorname{ctg} 46^0.$$

$$11.4.1.8 \quad \sqrt[3]{(0,8)^3 + (2,1)^3}.$$

$$11.4.1.10 \quad 3,95^{-3,03}.$$

$$11.4.1.12 \quad \sqrt{(1,1)^3 + (1,9)^3}.$$

$$11.4.1.14 \quad e^{1,03^2 + 2,99^2}.$$

$$11.4.1.16 \quad (2,03)^3 (3,98)^2.$$

$$11.4.1.18 \quad (5,05)^3 - (1,9)^4.$$

$$11.4.1.20 \quad \operatorname{ch} 0,1 \cdot \operatorname{sh} 0,2.$$

$$11.4.1.22 \quad \sqrt{(0,8)^3 + (1,8)^3}.$$

$$11.4.1.24 \quad e^{1,04^2 + 2,96^2}.$$

$$11.4.1.26 \quad (3,04)^3 (5,97)^2.$$

$$11.4.1.28 \quad (6,2)^4 - (2,9)^4.$$

$$11.4.1.30 \quad \operatorname{ch} 0,2 \cdot \operatorname{sh} 0,1.$$

12 ЛОКАЛЬНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Содержание: локальный экстремум функции двух переменных.

12.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Рассмотрим понятие локального экстремума функции двух переменных, как частного случая функции нескольких переменных.

Определение 12.1.1 Функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $P_0(x_0, y_0)$ *локальный максимум (локальный минимум)*, если существует такая окрестность точки P_0 , что для всех точек $P(x, y)$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(P_0) \geq f(P)$ ($f(P_0) \leq f(P)$).

Точки локального максимума и локального минимума называются *точками локального экстремума*.

Теорема 12.1.1 Если дифференцируемая функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $P_0(x_0, y_0)$ локальный экстремум, то в этой точке частные производные равны нулю, то есть $\frac{\partial z(P_0)}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial z(P_0)}{\partial y} = 0$.

Точки, в которых частные производные равны нулю, называются *стационарными*.

Пусть $P_0(x_0, y_0)$ – стационарная точка функции $z = f(x, y)$, причём эта функция дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки P_0 и все вторые частные производные непрерывны в точке P_0 . Введём обозначения:

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), B = f''_{xy}(x_0, y_0), C = f''_{yy}(x_0, y_0).$$

Вычисляем определитель $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$. Тогда:

- 1) если $\Delta > 0$, то в точке $P_0(x_0, y_0)$ экстремум, а именно – максимум при значении $A < 0$ ($C < 0$) и минимум при значении $A > 0$ ($C > 0$);
- 2) если $\Delta < 0$, то в точке $P_0(x_0, y_0)$ экстремума нет;
- 3) если $\Delta = 0$, то требуются дополнительные исследования.

12.2 Примеры решения типовых задач

12.2.1 Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Решение. Находим частные производные первого порядка и составляем систему $z'_x = 3x^2 - 3y = 0$, $z'_y = 3y^2 - 3x = 0$. Решая полученную систему, найдём две стационарные точки $M_0(0, 0)$ и $M_1(1, 1)$. Найдём частные производные второго порядка: $z''_{xx} = 6x$, $z''_{xy} = -3$, $z''_{yy} = 6y$. Составляем определитель $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$ для каждой стационарной точки.

Для точки $M_0(0, 0)$ определитель равен $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0$, следовательно, в этой точке экстремума нет. Для точки $M_1(1, 1)$ определитель равен $\Delta = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 27 > 0$, следовательно, в этой точке экстремум есть. Так как $A = 6 > 0$, то в точке M_1 функция достигает минимума, причём $z_{\min} = z(1, 1) = -1$.

12.2.2 Некоторое предприятие производит два вида товаров, цены на которые равны 6 и 9 условных единиц, соответственно. Затраты на производство этих товаров описываются функцией $C(x, y) = x^2 + xy + y^2$, где x – объём выпуска товаров первого вида, y – объём выпуска товаров второго вида. При ка-

ких объёмах выпуска товаров прибыль будет наибольшей. Найти максимальную прибыль предприятия.

Решение. Пусть x и y – количество товаров двух видов, их цены – соответственно p_1 и p_2 . Затраты на производство этих товаров являются дифференцируемой функцией издержек $C = C(x, y)$. Тогда функция прибыли имеет вид:

$$\Pi = \Pi(x, y) = p_1x + p_2y - C(x, y).$$

В условиях данной задачи прибыль предприятия будет выражаться функцией $\Pi(x, y) = 6x + 9y - x^2 - xy - y^2$. Так как в данном случае частные производные от функции прибыли всегда существуют, то для нахождения стационарных точек получаем систему уравнений: $\Pi'_x = 6 - 2x - y = 0$, $\Pi'_y = 9 - x - 2y = 0$. Решением этой системы является точка $P_0(1; 4)$.

Находим частные производные второго порядка от функции прибыли в стационарной точке: $A = \Pi''_{xx}(1, 4) = -2$, $B = \Pi''_{xy}(1, 4) = -1$, $C = \Pi''_{yy}(1, 4) = -2$.

Так как $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 > 0$ и $A = -2 < 0$, то найденная точка $P_0(1; 4)$ является точкой максимума функции прибыли $\Pi(x, y)$, а максимальная прибыль предприятия равна $\Pi_{\max} = \Pi(1, 4) = 6 \cdot 1 + 9 \cdot 4 - 1^2 - 1 \cdot 4 - 4^2 = 21$ у. е.

12.3 Задания для решения на практическом занятии

12.3.1 Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + 3xy^2 - 111x - 36y$.

12.3.2 Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 - x\sqrt{y} - 9x + y + 5$.

12.3.3 Исследовать на экстремум функцию $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

12.3.4 Исследовать на экстремум функцию $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$.

12.3.5 Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, при $x > 0, y > 0$.

12.3.6 Некоторое предприятие производит два вида товаров, цены на которые равны 140 и 200 условных единиц, соответственно. Затраты на производство этих товаров описывается функцией $C(x, y) = 3x^2 + 4xy + 4y^2$, где x – объём выпуска товаров первого вида, y – объём выпуска товаров второго вида. При каких объёмах выпуска товаров прибыль будет наибольшей. Найти максимальную прибыль предприятия.

12.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

12.4.1 Исследовать на экстремум функцию двух переменных $z = f(x, y)$.

- | | | | |
|------------------|--|------------------|--|
| 12.4.1.1 | $z = x^3 + y^2x - 3xy.$ | 12.4.1.2 | $z = y^3 + x^2y - 3yx.$ |
| 12.4.1.3 | $z = 12y^3 + 18x^3 - 2yx.$ | 12.4.1.4 | $z = 18y^3 + 12x^3 - 2yx.$ |
| 12.4.1.5 | $z = 8y^3 + x^3 - 6yx - 9.$ | 12.4.1.6 | $z = 2y^3 + 2x^3 - 6yx - 4.$ |
| 12.4.1.7 | $z = 3y^3 + 3x^3 - 9yx + 9.$ | 12.4.1.8 | $z = y^3 + 3x^2y - 15y - 12x.$ |
| 12.4.1.9 | $z = y^2 + x^2 + yx + x - y + 2.$ | 12.4.1.10 | $z = -2y^2 - 3x^2 + 2yx - 5.$ |
| 12.4.1.11 | $z = 8x - 8y - y^2 - x^2 - 7.$ | 12.4.1.12 | $z = 2xy - \frac{2}{3}x^3 - y^2 - 12.$ |
| 12.4.1.13 | $z = -y^4 - x^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4yx + 2.$ | 12.4.1.14 | $z = y^3 + x^3 - 6yx + 1.$ |
| 12.4.1.15 | $z = y^2 + x^2 - 2x + 4y + 3.$ | 12.4.1.16 | $z = x^2y + xy^2 - yx + 4.$ |
| 12.4.1.17 | $z = y^2 + x^2 + yx - 13x - 11y + 5.$ | 12.4.1.18 | $z = y^3 + x^3 + 6yx - 2.$ |
| 12.4.1.19 | $z = x^3 - y^2 - 7x^2 + yx + 9x + 3y - 9.$ | 12.4.1.20 | $z = 2x^3 + 2y^3 - 14xy + 5.$ |
| 12.4.1.21 | $z = y^3 - x^2 - 7y^2 + xy + 9y + 3x + 5.$ | 12.4.1.22 | $z = 7 - 6y^2 - 10x^2 + 4yx.$ |
| 12.4.1.23 | $z = 5 - 2x\sqrt{y} + 2x^2 + 2y - 12x.$ | 12.4.1.24 | $z = 9xy - 3y^3 - 3x^2y.$ |
| 12.4.1.25 | $z = 3 + 2x^2y + 2y^2x - 24xy.$ | 12.4.1.26 | $z = 3y^3 + 3x^3 + 18yx - 7.$ |
| 12.4.1.27 | $z = 3y^2 + 3x^2 - 6x + 12y - 1.$ | 12.4.1.28 | $z = 2xy - x^3 - y^2x.$ |
| 12.4.1.29 | $z = 4 - 3y\sqrt{x} + 3y^2 + 3x - 18y.$ | 12.4.1.30 | $z = y^3 + x^3 + 9yx$ |

13 УСЛОВНЫЙ И ГЛОБАЛЬНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Содержание: условный экстремум функции нескольких переменных, наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области.

13.1 Теоретический материал по теме практического занятия

13.1.1 Условный экстремум функции нескольких переменных

Рассмотрим понятие условного экстремума функции двух переменных, как частного случая функции нескольких переменных.

Функция $z = f(x; y)$ имеет *условный максимум (условный минимум)* в точке $P_0(x_0, y_0)$, если существует такая окрестность точки P_0 , что для всех точек P из окрестности точки P_0 , удовлетворяющих уравнению связи $\varphi(x; y) = 0$, выполняется неравенство

$$f(P) \leq f(P_0) \text{ (соответственно } f(P) \geq f(P_0)).$$

Задача нахождения условного экстремума сводится к исследованию на обычный экстремум функции Лагранжа:

$$L(x; y; \lambda) = f(x; y) + \lambda \cdot \varphi(x; y). \quad (13.1.1.1)$$

Необходимые условия условного экстремума выражаются системой трёх уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad \varphi(x; y) = 0. \quad (13.1.1.2)$$

Пусть $P_0(x_0, y_0)$ и λ_0 являются решением системы (13.1.1.2)

Достаточное условие экстремума связано с изучением знака определителя

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(x_0; y_0) & \varphi'_y(x_0; y_0) \\ \varphi'_x(x_0; y_0) & L''_{xx}(x_0; y_0; \lambda_0) & L''_{xy}(x_0; y_0; \lambda_0) \\ \varphi'_y(x_0; y_0) & L''_{xy}(x_0; y_0; \lambda_0) & L''_{yy}(x_0; y_0; \lambda_0) \end{vmatrix}. \quad (13.1.1.3)$$

1) Если $\Delta > 0$, то в точке $P_0(x_0, y_0)$ функция $z = f(x; y)$ имеет условный минимум;

2) если $\Delta < 0$, то в точке $P_0(x_0, y_0)$ функция $z = f(x; y)$ имеет условный максимум;

3) если $\Delta = 0$, то требуются дополнительные исследования.

13.1.2 Глобальный экстремум функции нескольких переменных

Если функция $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ дифференцируема и ограничена в замкнутой области G , то она достигает глобального экстремума (наибольшего $\max_G f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и наименьшего $\min_G f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ значения) либо в стационарных точках, принадлежащих области, либо на границе области.

13.2 Примеры решения типовых задач

13.2.1 Найти условный экстремум функции $z = xy^2$ при выполнении уравнения связи $x + 2y = 1$.

Решение. Составим функцию Лагранжа:

$$L(x; y; \lambda) = xy^2 + \lambda \cdot (x + 2y - 1).$$

Находим частные производные функции Лагранжа.

$$\frac{\partial L}{\partial x} = (xy^2 + \lambda \cdot (x + 2y - 1))'_x = y^2 + \lambda, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = (xy^2 + \lambda \cdot (x + 2y - 1))'_y = 2xy + 2\lambda.$$

Система уравнений (13.1.1.2) принимает вид:
$$\begin{cases} y^2 + \lambda = 0, \\ 2xy + 2\lambda = 0, \\ x + 2y = 1. \end{cases}$$

Система имеет два решения: $x_1 = 1, y_1 = 0, \lambda_1 = 0$; $x_2 = \frac{1}{3}, y_2 = \frac{1}{3}, \lambda_2 = -\frac{1}{9}$.

Найдём частные производные второго порядка функции Лагранжа и частные производные первого порядка уравнения связи.

$$\varphi'_x = (x + 2y - 1)'_x = 1, \quad \varphi'_y = (x + 2y - 1)'_y = 2,$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = (y^2 + \lambda)'_x = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = (y^2 + \lambda)'_y = 2y, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = (2xy + 2\lambda)'_y = 2x.$$

Рассмотрим точку $P_1(1; 0)$, при значении $\lambda_1 = 0$.

$$\varphi'_x(1; 0) = 1, \quad \varphi'_y(1; 0) = 2,$$

$$\frac{\partial^2 L(1; 0; 0)}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 L(1; 0; 0)}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 L(1; 0; 0)}{\partial y^2} = 2.$$

Вычислим определитель (13.1.1.3) для точки P_1 и параметра λ_1 .

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 > 0$$

Следовательно, в точке $P_1(1; 0)$ функция $z = xy^2$ имеет условный минимум, а значение функции в этой точке равно $z_{\min} = z(1; 0) = 1 \cdot 0^2 = 0$.

Рассмотрим точку $P_2\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ при значении $\lambda_2 = -\frac{1}{9}$.

$$\varphi'_x\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) = 1, \quad \varphi'_y\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) = 2,$$

$$\frac{\partial^2 L\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{9}\right)}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 L\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{9}\right)}{\partial x \partial y} = \frac{2}{3}, \quad \frac{\partial^2 L\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{9}\right)}{\partial y^2} = \frac{2}{3}.$$

Вычислим определитель (13.1.1.3) для точки P_2 и параметра λ_2 .

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 2 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = -2 < 0$$

Следовательно, в точке $P_2\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ функция $z = xy^2$ имеет условный мини-

мум, а значение функции в этой точке равно $z_{\max} = z\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{27}$.

13.2.2 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ в замкнутой области G , ограниченной прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

Решение. Находим стационарные точки, которые принадлежат области G , из системы: $z'_x = 2x + 2y - 4 = 0$, $z'_y = 2x + 8 = 0$. Стационарная точка $P_0(6, -4) \notin G$. Исследуем функцию на границе области.

На границе области G , заданной прямой $x = 0$, функция z принимает вид $z = 8y$, причём $y \in [0, 6]$. $z' = 8 \neq 0$, $z(0, 6) = 8 \cdot 6 = 48$, $z(0, 0) = 8 \cdot 0 = 0$.

На границе области G , заданной прямой $y = 0$, функция z принимает вид $z = x^2 - 4x$, причём $x \in [0, 6]$. $z' = 2x - 4 = 0$, $x = 2 \in [0, 6]$, $z(2, 0) = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4$, $z(0, 0) = 0^2 - 4 \cdot 0 = 0$, $z(6, 0) = 6^2 - 4 \cdot 6 = 12$.

На границе области G , заданной прямой $y = 6 - x$, функция z принимает вид $z = -x^2 + 48$, причём $x \in [0, 6]$. $z' = -2x = 0$, $x = 0 \in [0, 6]$, $z(0, 6) = -0^2 + 48 = 48$, $z(6, 0) = -6^2 + 48 = 12$.

Среди полученных значений функции z выбираем наибольшее и наименьшее значения: $\max_G z = z(0, 6) = 48$, $\min_G z = z(2, 0) = -4$.

13.3 Задания для решения на практическом занятии

13.3.1 Найти условные экстремумы функции $z = x^2 + y^2 - xy + x + y + 5$, удовлетворяющей уравнению связи $x + y + 3 = 0$.

13.3.2 Найти условные экстремумы функции $z = \frac{x+y}{xy}$ удовлетворяющей уравнению связи $x + y = 2$.

13.3.3 Найти условные экстремумы функции $z = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y - 2\sqrt{2}$, удовлетворяющей уравнению связи $x^2 + y^2 - 2 = 0$.

13.3.4 Найти условные экстремумы функции $z = 2x + y + 3$, удовлетворяющей уравнению связи $x^2 + y^2 = 4$.

13.3.5 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ в замкнутой области G , ограниченной прямыми $x = 3$, $y = 0$, $y - x = 1$.

13.3.6 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ в замкнутой области G , ограниченной прямой $y = 2$ и параболой $2y = x^2$.

13.3.7 В полушар радиуса R вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объёма.

13.3.8 В прямой круговой конус с радиусом основания R и высотой H вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объёма.

13.3.9 Внутри четырёхугольника найти точку, сумма расстояний которой от вершин была бы наименьшей.

13.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

13.4.1 Найти условные экстремумы функции $z = f(x; y)$, удовлетворяющей уравнению связи $\varphi(x; y) = 0$.

13.4.1.1 $f(x; y) = 2/x + 2/y$, $\varphi(x; y) = 2x + 2y - 4$.

13.4.1.2 $f(x; y) = 2xy^2$, $\varphi(x; y) = 2x + 4y - 2$.

13.4.1.3 $f(x; y) = x + y$, $\varphi(x; y) = x^2 + y^2 - 1$.

13.4.1.4 $f(x; y) = (x - y) / \sqrt{2}$, $\varphi(x; y) = x^2 + y^2 - 1$.

13.4.1.5 $f(x; y) = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$, $\varphi(x; y) = x + y - 7$.

13.4.1.6 $f(x; y) = x^2 + y^2 + xy - 5x - 4y + 10$, $\varphi(x; y) = x + y - 4$.

13.4.1.7 $f(x; y) = x^2 - y^2$, $\varphi(x; y) = x + 2y - 6$.

13.4.1.8 $f(x; y) = x^2 y$, $\varphi(x; y) = 2x + y - 1$.

13.4.1.9 $f(x; y) = x^2 + y^2$, $\varphi(x; y) = x + y - 2$.

13.4.1.10 $f(x; y) = xy$, $\varphi(x; y) = x^2 + y^2 - 2$.

13.4.1.11 $f(x; y) = 1/x + 1/y$, $\varphi(x; y) = 1/x^2 + 1/y^2 - 1/9$.

13.4.1.12 $f(x; y) = 1/x + 1/y$, $\varphi(x; y) = x + y - 2$.

13.4.1.13 $f(x; y) = xy^2$, $\varphi(x; y) = x + 2y - 5$.

13.4.1.14 $f(x; y) = \cos^2 x + \cos^2 y$, $\varphi(x; y) = x - y + \pi / 4$.

13.4.1.15 $f(x; y) = 2x + 2y$, $\varphi(x; y) = x^2 + y^2 - 8$.

13.4.1.16 $f(x; y) = 2x - 2y$, $\varphi(x; y) = x^2 + y^2 - 18$.

13.4.1.17 $f(x; y) = 3/x + 3/y$, $\varphi(x; y) = 3/x^2 + 3/y^2 - 6$.

13.4.1.18 $f(x; y) = 1/x - 1/y$, $\varphi(x; y) = 1/x^2 + 1/y^2 - 0,5$.

13.4.1.19 $f(x; y) = x^2 - 2\sqrt{y}$, $\varphi(x; y) = x - y + 0,5$.

13.4.1.20 $f(x; y) = y^2 - 2\sqrt{x}$, $\varphi(x; y) = y - x - 0,75$.

13.4.1.21 $f(x; y) = \sin^2 x + \sin^2 y$, $\varphi(x; y) = x + y + 3\pi / 4$.

13.4.1.22 $f(x; y) = 3x^2 + 4y^2$, $\varphi(x; y) = 12x + 16y + 56$.

- 13.4.1.23 $f(x; y) = 2x + 4y, \varphi(x; y) = x^2 + y^2 - 20.$
- 13.4.1.24 $f(x; y) = \sin^2 x + \cos^2 y, \varphi(x; y) = x - y - 5\pi / 4.$
- 13.4.1.25 $f(x; y) = 2x^2 - 3y^2, \varphi(x; y) = 12(x - y) + 120.$
- 13.4.1.26 $f(x; y) = 3x + 5y, \varphi(x; y) = 9x^2 - 10y^2 + 54.$
- 13.4.1.27 $f(x; y) = \sin^2 x - \sin^2 y, \varphi(x; y) = x - y + 7\pi / 4.$
- 13.4.1.28 $f(x; y) = x^2 + 6y^2, \varphi(x; y) = 6x + 24y - 60.$
- 13.4.1.29 $f(x; y) = 2x + y, \varphi(x; y) = 4x^2 + y^2 - 8.$
- 13.4.1.30 $f(x; y) = \cos^2 x - \cos^2 y, \varphi(x; y) = x + y - \pi / 4.$

13.4.2 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x; y)$ в замкнутой области G , заданной системой неравенств. Сделать чертёж.

- 13.4.2.1 $f(x; y) = x^2 + xy + x,$
 $G : x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq -2.$
- 13.4.2.2 $f(x; y) = 2x^2 + 3xy - 7x - 3y,$
 $G : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3.$
- 13.4.2.3 $f(x; y) = 3x^2 + 4xy + 4y - 2x,$
 $G : x \leq 0, y \geq 0, y - x \leq 3.$
- 13.4.2.4 $f(x; y) = 4x^2 + 2xy - 16x - 6y,$
 $G : x \geq 0, y \leq 0, x - y \leq 8.$
- 13.4.2.5 $f(x; y) = x^2 + y^2 - 9xy + 27,$
 $G : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3.$
- 13.4.2.6 $f(x; y) = x^2 + 2y^2 + 1,$
 $G : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3.$
- 13.4.2.7 $f(x; y) = 3 - 2x^2 - xy - y^2,$
 $G : x \leq 1, y \geq 0, x - y \geq 0.$
- 13.4.2.8 $f(x; y) = x^2 + 3y^2 + x - y,$
 $G : x \geq 1, y \geq -1, x + y \leq 1.$
- 13.4.2.9 $f(x; y) = 5x^2 + y^2 - 3xy + 4,$
 $G : x \geq -1, y \geq -1, x + y \leq 1.$
- 13.4.2.10 $f(x; y) = x^2 - y^2 + 2xy + 4x,$
 $G : x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq -2.$
- 13.4.2.11 $f(x; y) = x^2 + xy - 2,$
 $G : 4x^2 - 4 \leq y \leq 0.$

- 13.4.2.12** $f(x; y) = 10 + 4xy - x^2$,
 $G: 0 \leq y \leq 4 - x^2$.
- 13.4.2.13** $f(x; y) = x^2 - y^2$,
 $G: x^2 + y^2 \leq 9$.
- 13.4.2.14** $f(x; y) = x^2 + 2xy - 4x + 8y$,
 $G: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$.
- 13.4.2.15** $f(x; y) = 4x^2y - x^3y - x^2y^2$,
 $G: x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6$.
- 13.4.2.16** $f(x; y) = 2x^2 - 2y^2$,
 $G: x^2 + y^2 \leq 16$.
- 13.4.2.17** $f(x; y) = x^3 + y^3 + 6xy$,
 $G: -3 \leq x \leq 1, -3 \leq y \leq 2$.
- 13.4.2.18** $f(x; y) = 2x^2y - x^3y - x^2y^2$,
 $G: x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6$.
- 13.4.2.19** $f(x; y) = 5x^2 - 3xy + y^2$,
 $G: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.
- 13.4.2.20** $f(x; y) = x^2 - y^2 + 2xy - 4x$,
 $G: x \leq 3, y \geq 0, x - y \geq -1$.
- 13.4.2.21** $f(x; y) = 4 - 2x^2 - y^2$,
 $G: y \geq 0, y \leq \sqrt{1 - x^2}$.
- 13.4.2.22** $f(x; y) = 1 + 2x^2 + 3y^2$,
 $G: y \geq 0, y \leq \sqrt{9 - \frac{9}{4}x^2}$.
- 13.4.2.23** $f(x; y) = \frac{1}{2}x^2 - xy$,
 $G: 2x^2 \leq y \leq 8$.
- 13.4.2.24** $f(x; y) = xy$,
 $G: x^2 + y^2 \leq 1$.
- 13.4.2.25** $f(x; y) = xy - 3x - 2y$,
 $G: 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4$.
- 13.4.2.26** $f(x; y) = xy^2$,
 $G: x^2 + y^2 \leq 1$.
- 13.4.2.27** $f(x; y) = x^3 + y^3 - 3xy$,
 $G: 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 2$.

$$\mathbf{13.4.2.28} \quad f(x; y) = (2x^2 + 3y^2) \cdot e^{-(x^2+y^2)},$$

$$G: x^2 + y^2 \leq 9.$$

$$\mathbf{13.4.2.29} \quad f(x; y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y),$$

$$G: 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$\mathbf{13.4.2.30} \quad f(x; y) = \cos x + \cos y + \cos(x + y),$$

$$G: 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Альсевич, Л. А. Математический анализ. Последовательности, функции, интегралы. Практикум : учебное пособие / Л. А. Альсевич, С. Г. Красовский. – Минск : Вышэйшая школа, 2021. – 471 с.
2. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Введение в анализ и дифференциальное исчисление функции одной переменной : пособие / В. В. Цегельник, Е. А. [и др.]. – Минск : УО «БГУИР», 2017. – 197 с.
3. Жевняк, Р. М., Карпук А. А. Высшая математика : в 5 ч. / Р. М. Жевняк, А.А. Карпук. – Минск : Вышэйшая школа, 1984. – Ч. 1. – 254 с.
4. Жевняк, Р. М., Карпук А. А. Высшая математика : в 5 ч. / Р. М. Жевняк, А.А. Карпук. – Минск : Вышэйшая школа, 1985. – Ч. 2. – 221 с.
5. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа : учебник для вузов : в 2 т. / Л. Д. Кудрявцев. – Москва : Высшая школа, 1981. – Т. 1. – 687 с.
6. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа : учебник для вузов : в 2 т. / Л. Д. Кудрявцев. – Москва : Высшая школа, 1981. – Т. 2. – 584 с.
7. Ровба, Е. А Математика для инженеров: примеры и задачи : учебное пособие : в 4 ч. / Н. С. Берёзкина [и др.] ; УО «ГрГУ им Я. Купалы» : под ред. Е. А. Ровбы. – Минск : РИВШ. 2019. – Ч. 1 – 411 с.
8. Математика. Интегральное исчисление функции одной переменной. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных : практикум / сост. А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2019. – 98 с.
9. Математика. Линейные операторы векторных пространств. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной : практикум / сост. А. В. Коваленко [и др.]. – 2-е изд., стер. – Витебск : УО «ВГТУ», 2019. – 120 с.
10. Ровба, Е. А. Математика для инженеров: примеры и задачи : учебное пособие : в 4 ч. / Е. А. Ровба, Н. С. Березкина ; УО «ГрГУ им. Я. Купалы : под ред. Е. А. Ровбы. – Минск : РИВШ, 2019. – Ч. 2. – 386 с.

Приложение А

Таблица А.1 – Таблица производных основных элементарных функций

1)	$C' = 0$, где $C = Const$;	2)	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
3)	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, где $a > 0, a \neq 1$;	4)	$(e^x)' = e^x$
5)	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$, $a > 0, a \neq 1, x > 0$;	6)	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$, где $x > 0$;
7)	$(\sin x)' = \cos x$;	8)	$(\cos x)' = -\sin x$;
9)	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$;	10)	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$;
11)	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, где $ x < 1$;	12)	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, где $ x < 1$;
13)	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$;	14)	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$;
15)	$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$;	16)	$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;
17)	$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;	18)	$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$, где $x \neq 0$.

Таблица А.2 – Таблица основных неопределённых интегралов

1)	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$;	2)	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$;
3)	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1, x > 0$;	4)	$\int e^x dx = e^x + C$;
5)	$\int \sin x dx = -\cos x + C$;	6)	$\int \cos x dx = \sin x + C$;
7)	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;	8)	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;
9)	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + C$;	10)	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$;
11)	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, a \neq 0$;	12)	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, x < a $;
13)	$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x+a}{x-a} \right + C$;	14)	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + C$;
15)	$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$;	16)	$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$;
17)	$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$;	18)	$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$, где $x \neq 0$.

Учебное издание

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.
ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ.
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ И
НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ**

Практикум

Составители:

Коваленко Александр Вильямович
Дмитриев Александр Петрович

Редактор *Р.А. Никифорова*
Корректор *А.В. Пухальская*
Компьютерная верстка *А.В. Коваленко*

Подписано к печати 07.12.2023. Формат $60 \times 90 \frac{1}{16}$. Усл. печ. листов 6,6.
Уч.-изд. листов 8,6. Тираж 70 экз. Заказ № 302.

Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет»
210038, г. Витебск, Московский пр., 72.

Отпечатано на ризографе учреждения образования

«Витебский государственный технологический университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/172 от 12 февраля 2014 г.

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 3/1497 от 30 мая 2017 г.