

А.А. Калинин, Е.С. Посканная

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Курс лекций

Витебский государственный технологический университет

Витебск
2015

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«Витебский государственный технологический университет»

А.А. Калинин, Е.С. Посканная

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Курс лекций

для студентов специальности 1-36 08 01 «Машины
и аппараты легкой, текстильной промышленности и
бытового обслуживания

Витебск
2015

УДК 539.31.6 (075.8)
ББК 30.121
К 17

Рецензент:

Сункуев Б.С., доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Машины и аппараты легкой промышленности»

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом УО «ВГТУ», протокол №6 от 29.06.2015.

К 17 Калинин А.А. Сопротивление материалов : курс лекций / А. А. Калинин, Е. С. Посканная. – Витебск : УО «ВГТУ», 2015. – 136 с.

ISBN 978-985-481-381-3

В курсе лекций, подготовленном в соответствии с типовой учебной программой, приводятся основные теоретические положения и формулы механики материалов, рассматриваются примеры расчета стержней на прочность и жесткость. Дается пример выполнения расчетно-графической работы по исследованию свободных и вынужденных колебаний стержневой системы

**УДК 539.31.6 (075.8)
ББК 30.121**

ISBN 978-985-481-381-3

© УО «ВГТУ», 2015

Содержание

1 Введение в сопротивление материалов	5
1.1 Основные понятия.....	5
1.2 Внутренние силовые факторы.....	6
1.3 Напряжение.....	8
1.4 Простейшие напряженные состояния.....	9
1.5 Закон Гука.....	10
2 Растяжение и сжатие.....	11
2.1 Расчет на прочность.....	11
2.2 Деформация упругого стержня.....	12
2.3 Статически неопределимые шарнирно-стержневые системы...	13
3 Геометрические характеристики плоских фигур.....	16
3.1 Статический момент площади.....	16
3.2 Моменты инерции площади.....	17
4 Кручение.....	20
4.1 Деформации и напряжения.....	20
4.2 Статически неопределимый брус.....	22
5 Изгиб.....	25
5.1 Внутренние силовые факторы при плоском изгибе.....	25
5.2 Опоры и их реакции.....	26
5.3 Эпюры внутренних силовых факторов при изгибе балки.....	30
5.4 Дифференциальные зависимости при изгибе.....	34
5.5 Случаи сосредоточенной силы и момента.....	35
5.6 Построение эпюр поперечной силы и изгибающего момента...	36
5.7 Эпюры внутренних силовых факторов в сечении рамы.....	40
5.8 Нормальные напряжения при изгибе.....	44
6 Расчет пространственной рамы.....	49
6.1 Построение эпюр внутренних силовых факторов в сечениях пространственной рамы.....	49
6.2 Напряженное состояние.....	54
6.3 Гипотезы прочности.....	56
6.4 Расчет элементов пространственной рамы.....	60
7 Статически неопределимые рамы. Эпюры внутренних силовых факторов.....	64
7.1 Принцип возможных перемещений. Теорема Бетти.....	64
7.2 Интеграл Мора.....	67
7.3 Способ Верещагина вычисления интеграла Мора.....	68
7.4 Метод сил.....	70
8 Колебания упругой системы с одной степенью свободы.....	79
8.1 Свободные колебания.....	79
8.2 Затухающие колебания.....	82
8.3 Вынужденные колебания.....	83
8.4 Учет массы упругих элементов.....	89

9 Колебания стержневой системы с конечным числом степеней свободы.....	94
9.1 Свободные колебания.....	94
9.2 Уравнения Лагранжа.....	103
9.3 Учет массы гибких элементов стержневой системы.....	112
10 Пример расчетно-графической работы.....	115
10.1 Задание.....	115
10.2 Геометрические характеристики сечений.....	117
10.3 Характеристики инертности стержней.....	119
10.4 Построение упрощенной модели.....	119
10.5 Уравнения упругой линии стержней AB и CD	120
10.6 Потенциальная энергия упругой деформации.....	122
10.7 Кинетическая энергия системы.....	123
10.8 Уравнения Лагранжа.....	124
10.9 Частотное уравнение.....	124
10.10 Учет массы гибких стержней AB и CD	126
11 Вынужденные колебания стержневой системы.....	128
Рекомендуемая литература.....	134

1 Введение в сопротивление материалов

1.1 Основные понятия

Сопротивление материалов является одним из разделов механики твердого тела, способного менять свои размеры и форму, то есть *деформироваться*, под действием приложенных к нему внешних сил, то есть *нагрузки*.

Основные задачи курса – расчет элементов машин и конструкций на *прочность, жесткость и устойчивость*.

Прочность – это способность выдерживать заданную нагрузку (совокупность приложенных внешних сил) не разрушаясь.

Жесткость – это способность противодействовать внешним воздействиям без значительных деформаций.

Устойчивость – это способность сохранять под действием нагрузки начальную форму равновесия.

При решении этих задач в курсе сопротивления материалов вводятся некоторые упрощения системы сил и определенные гипотезы, на основе которых строятся модели тела и нагрузки, позволяющие решать поставленные задачи с помощью сравнительно простого математического аппарата.

Элементы конструкций по их геометрической форме и по соотношению размеров делятся на *стержни (брусья), пластины, оболочки и массивы*. Основным объектом изучения в сопротивлении материалов является *брус*.

Материал тела полагается *сплошным*, то есть непрерывно заполняющим весь объем тела, *однородным*, то есть обладающим одинаковыми механическими свойствами во всех точках, и *изотропным*, то есть обладающим одинаковыми механическими свойствами во всех направлениях.

Для понимания курса «Сопротивление материалов» необходимо усвоить следующие понятия и термины:

Сила – мера механического действия одного тела на другое.

Внутренняя сила – мера механического действия одной части тела на другую.

Брус – тело, один из размеров которого значительно больше двух других.

Напряжение – интенсивность внутренней силы, то есть внутренняя сила, действующая на единичную площадку сечения тела.

Нормальное напряжение (σ) – составляющая вектора напряжения, перпендикулярная плоскости сечения.

Касательное напряжение (τ) – составляющая вектора напряжения, параллельная плоскости сечения.

Деформация – изменение размеров и формы тела.

Упругость – свойство тела восстанавливать первоначальные размеры и форму после удаления нагрузки.

Пластичность – свойство тела сохранять деформированное состояние после удаления нагрузки.

Удлинение (Δl) – мера продольной деформации бруса.

Относительное удлинение (ε) – отношение абсолютного удлинения Δl к первоначальной длине: $\varepsilon = \Delta l / l$.

Допускаемая нагрузка – нагрузка, при которой наибольшее напряжение равно допускаемому.

1.2 Внутренние силовые факторы

Силы как меры механического взаимодействия тел можно разделить на *внешние* и *внутренние*.

Внешняя сила выражает действие одного тела на другое. Она приложена к тому телу, на которое оказывается действие. Но это тело, в свою очередь, оказывает такое же действие, но противоположного направления, на первое тело. Отвлекаясь от физической природы силы, порой говорят, что на тело действует сила. Но следует помнить, что в действительности действует тело, а изображенная стрелкой сила является лишь мерой этого действия.

Существование твердого тела с неизменными объемом и формой при отсутствии нагрузки обусловлено силами взаимодействия между отдельными его частями. Внешние силы вызывают изменение взаимного расположения частей тела, что приводит к появлению дополнительных сил взаимодействия. Именно эти дополнительные силы называются в механике *внутренними*.

Для определения внутренних сил применяется *метод сечений* (рисунок 1.1). Тело мысленно рассекается плоскостью и одна часть тела отделяется от другой. Отсеченная часть тела находится в состоянии равновесия под действием приложенной к ней части внешних сил и распределенных по сечению внутренних сил, выражающих действие на нее остальной части тела. Отсеченная часть тела действует на оставшуюся такими же силами, но противоположно направленными.

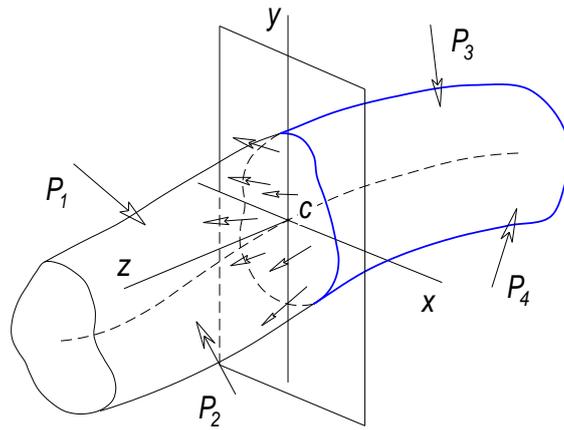


Рисунок 1.1 – Сечение бруса плоскостью

На рисунке 1.1 изображен брус, нагруженный уравновешенной системой сил, и показана плоскость, перпендикулярная продольной оси бруса, которая мысленно отсекает левую часть его от правой. Здесь же введена скользящая система координат. Начало ее совмещено с центром тяжести сечения, ось Z направлена по касательной к продольной оси бруса, а оси X и Y перпендикулярны оси Z и расположены в плоскости сечения. Действие отсеченной части бруса на оставшуюся зависит от нагрузки, приложенной к *отсеченной* части (рисунок 1.2).

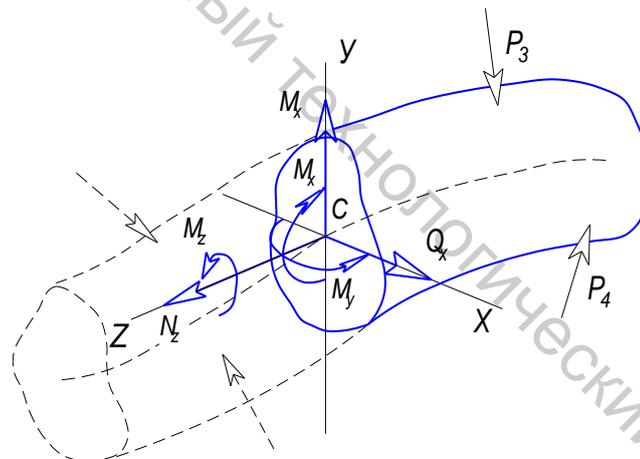


Рисунок 1.2 – Внутренние силовые факторы

На рисунке 1.2 внутренние силы, выражающие это действие, представлены шестью *внутренними силовыми факторами*:

N_z – *продольная сила*,

Q_x и Q_y – *поперечные силы*,

M_z – *крутящий момент* (также используется обозначение M_k и T),

M_x и M_y – *изгибающие моменты*.

Действие правой части бруса на левую выражается такими же внутренними силовыми факторами, только силы и моменты при тех же модулях имеют направления, противоположные направлениям сил и моментов, изображенных на рисунке 1.2.

Правила определения внутренних силовых факторов:

1 Продольная сила N_z равна алгебраической сумме проекций на продольную ось z всех внешних сил, приложенных к брусу с одной стороны от сечения.

2 Поперечная сила Q_x (Q_y) равна алгебраической сумме проекций на поперечную ось x (y) всех внешних сил, приложенных к брусу с одной стороны от сечения.

3 Крутящий момент M_z равен алгебраической сумме моментов относительно продольной оси z всех внешних сил, приложенных к брусу с одной стороны от сечения.

4 Изгибающий момент M_x (M_y) равен алгебраической сумме моментов относительно поперечной оси x (y) всех внешних сил, приложенных к брусу с одной стороны от сечения.

Выделяя отдельные внутренние силовые факторы, получим простейшие напряженно-деформированные состояния бруса (рисунок 1.3).

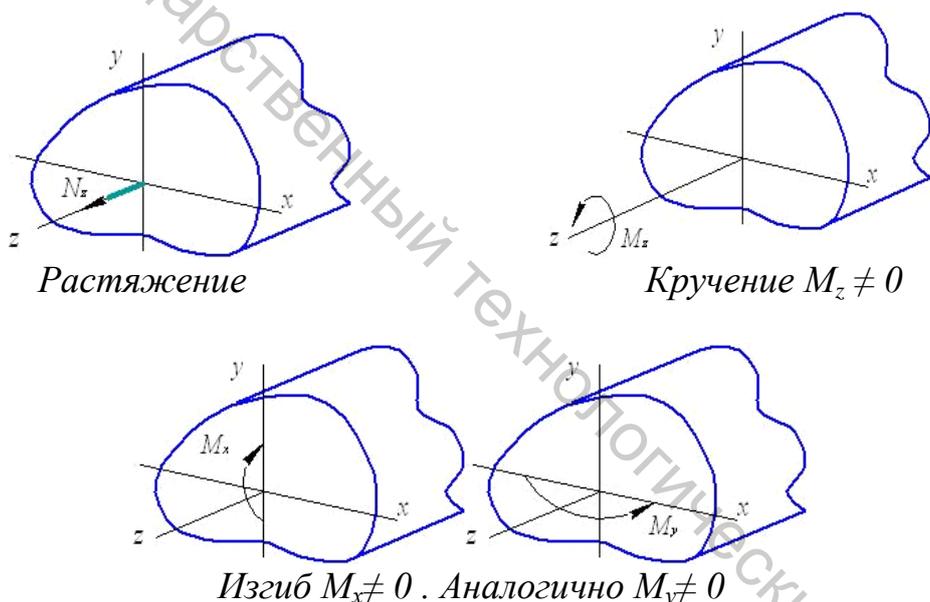


Рисунок 1.3 – Простейшие напряженно-деформированные состояния бруса

При $Q_y \neq 0$ изгиб называется поперечным.

При $Q_y = 0$ изгиб чистый.

1.3 Напряжение

Распределение внутренних сил по сечению бруса зависит от внутренних силовых факторов и от формы сечения. Интенсивность этих сил в разных точках сечения характеризуется *напряжением*.

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta A}, \quad (1.1)$$

где ΔA – элемент площади сечения;

ΔP – внутренняя сила, действующая на элемент ΔA .

В естественной системе координат напряжение представляется тремя составляющими:

σ – нормальное напряжение

τ_{xz} и τ_{yz} – касательные напряжения.

Напряжение имеет размерность $F/(l \cdot l)$. Основная единица измерения напряжения – паскаль ($1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$).

1.4 Простейшие напряженные состояния

Изменение размеров и формы тела, вызванное нагрузкой, называется *деформацией*.

На рисунке 1.4 изображен бесконечно малый элемент бруса в виде параллелепипеда. На заштрихованной грани его, которая совмещена с плоскостью поперечного сечения бруса, действует только нормальное напряжение σ . Такое напряженное состояние элемента называется *растяжением*. Мерой деформации этого элемента является *удлинение* Δdz . Безразмерная величина $\varepsilon = \frac{\Delta dz}{dz}$ называется *относительным удлинением*.

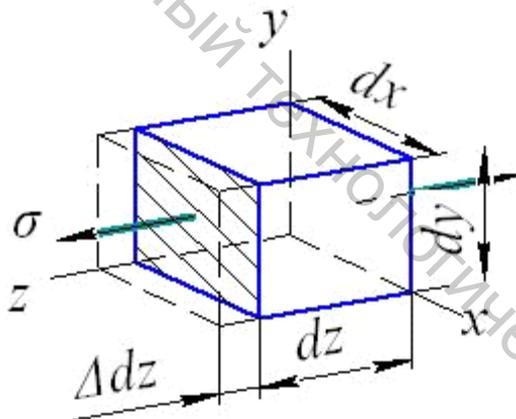


Рисунок 1.4 – Растяжение бесконечно малого элемента бруса

На рисунке 1.5 а изображено напряженно-деформационное состояние элемента, по грани которого действует касательное напряжение τ . Это состояние называется *сдвигом*. Мерой деформации этого элемента является *угол сдвига* γ . Заметим, что правильнее было бы изобразить это состояние так, как показано на рисунке 1.5 б.

Напряжение τ_{yz} , действующее в поперечном сечении, вызывает равное ему напряжение τ_{zy} . Эта закономерность называется *принципом парности касательных напряжений*.

Касательные напряжения на двух взаимно перпендикулярных площадках, перпендикулярные общему ребру, численно равны и направлены оба к общему ребру или от него.

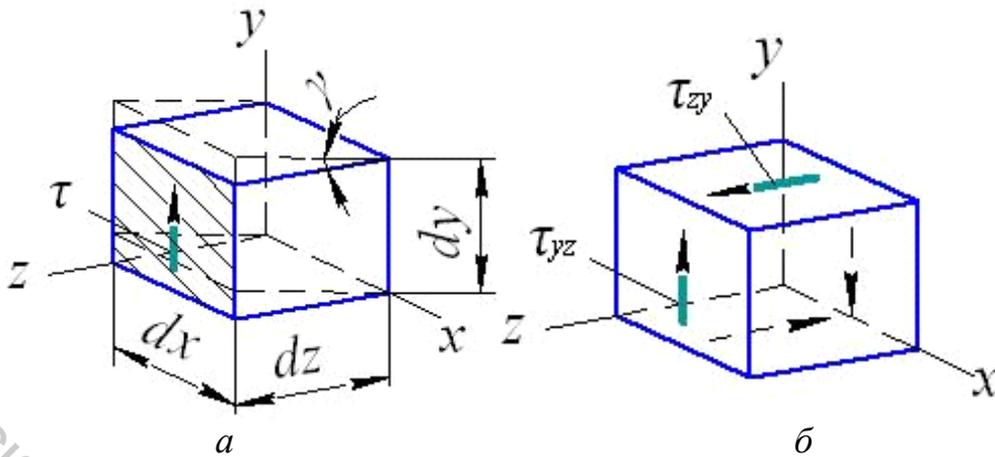


Рисунок 1.5 – Напряженно-деформационное состояние элемента при сдвиге

1.5 Закон Гука

До определенного предела перемещения точек тела пропорциональны приложенным к нему силам.

Для простейших напряженно-деформированных состояний, изображенных на рисунке 1.5, закон Гука определяет линейную зависимость, связывающую напряжения и деформации. Эта зависимость имеет следующее математическое выражение:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad \gamma = \frac{\tau}{G}, \quad (1.2)$$

где E и G – коэффициенты пропорциональности:

E – модуль упругости первого рода,
модуль продольной упругости,
модуль Юнга.

G – модуль упругости второго рода,
модуль сдвига.

Оба модуля упругости имеют размерность напряжения, зависят от материала и являются *физической характеристикой жесткости материала при растяжении и сдвиге*.

То наибольшее напряжение, которое ограничивает область действия закона Гука, называется *пределом пропорциональности*. Значение его для различных материалов устанавливается экспериментом.

Условие пропорциональности между деформациями и напряжениями позволяет использовать *принцип независимости действия сил* (принцип суперпозиции), в соответствии с которым деформации, перемещения и напряжения в упругой системе не зависят от порядка приложения нагрузки.

2 Растяжение и сжатие

Растяжение или сжатие прямого стержня вызывается нагрузкой, при которой в поперечном сечении стержня действует лишь один внутренний силовой фактор – *продольная сила* N . При положительной продольной силе стержень растянут, при отрицательной – сжат. Продольная сила является равнодействующей распределенных по сечению сил, параллельных продольной оси.

На основании экспериментов Д. Бернулли введена *гипотеза плоских сечений*, в соответствии с которой *сечения плоские, перпендикулярные продольной оси бруса до нагружения, остаются таковыми и после приложения нагрузки*. Значит, все продольные волокна стержня получают одинаковые деформации, что возможно лишь при одинаковых напряжениях во всех точках сечения однородного стержня. Следовательно, напряжение в поперечном сечении

$$\sigma = \frac{N_z}{A}, \quad (2.1)$$

где A – площадь поперечного сечения.

Знак напряжения совпадает со знаком продольной силы. Значит, положительное значение напряжения соответствует растяжению стержня, отрицательное – сжатию.

Равномерное распределение по сечению продольной силы нарушается вблизи точки приложения сосредоточенной силы и вблизи места резкого изменения размеров или формы поперечного сечения. Однако эта неравномерность быстро затухает. Эта закономерность известна под названием *принципа Сен-Венана*. *Особенности приложения внешних сил проявляются, как правило, на расстояниях, не превышающих характерных размеров поперечного сечения стержня*.

2.1 Расчет на прочность

Увеличение нагрузки сопровождается увеличением напряжения и при некотором его значении происходит разрушение стержня или появляются пластические деформации. Для нормальной работы элемента конструкции напряжение не должно превышать этого предельного значения, которое определяется экспериментально. Для надежности и безопасности работы детали максимальное напряжение ограничивается *допускаемым напряжением*.

При известном значении допускаемого напряжения *условие прочности* записывается в виде

$$\max \sigma = \frac{N_z}{A} \leq \sigma, \quad (2.2)$$

где σ – допускаемое напряжение, равное:

$$\sigma = \frac{\sigma_{np}}{n}, \quad (2.3)$$

где σ_{np} – предельное напряжение, то есть напряжение, при котором происходит разрушение бруса, или появляются пластические деформации; n – коэффициент запаса.

По формуле (2.2) производится проверка прочности при известной нагрузке и известных размерах сечения стержня. Эта же формула позволяет найти допускаемую нагрузку, связав ее с продольной силой. По этой же формуле определяются размеры сечения, необходимые для удовлетворения условия прочности. В этой формуле присутствуют две *характеристики прочности* стержня при растяжении: физическая – допускаемое напряжение и геометрическая – площадь поперечного сечения стержня.

2.2 Деформация упругого стержня

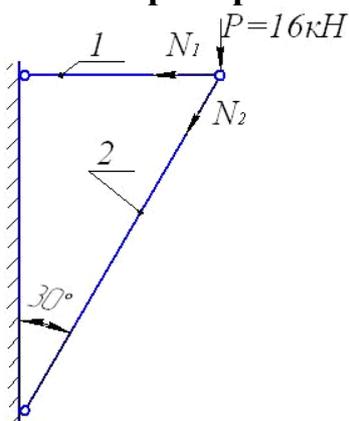
Мерой деформации стержня при растяжении (сжатии) является его удлинение (укорочение). В соответствии с законом Гука

$$\Delta l = \frac{N_z l}{EA} \quad (2.4)$$

Знак удлинения совпадает со знаком продольной силы.

Конструкции, несущими элементами которых являются стержни, соединенные друг с другом с помощью шарниров, называются шарнирно-стержневыми. Если к стержням системы не приложена поперечная нагрузка, то они испытывают лишь растяжение или сжатие. Для расчета на прочность и определения деформаций стержней таких систем используются формулы (2.2) и (2.3).

Пример № 1



Шарнирно-стержневой кронштейн изготовлен из двух стержней (рисунок 2.1). Один из них стальной с допускаемым напряжением $[\sigma] = 16 \text{ кН/см}^2$, другой чугунный с допускаемым напряжением при растяжении $[\sigma_p] = 4 \text{ кН/см}^2$ и при сжатии – $[\sigma_c] = 8 \text{ кН/см}^2$. Требуется подобрать сечения стержней из условия их прочности, сделав растянутый стержень стальным, а сжатый – чугунным.

Рисунок 2.1 – Кронштейн

Решение:

Полагая стержни растянутыми, изобразим силы, приложенные к узлу B.

Уравнения равновесия системы сходящихся сил:

$$\sum X_i = 0, N_1 + N_2 \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum Y_i = 0, -N_2 \sin 60^\circ - P = 0.$$

Решение уравнений:

$$N_2 = \frac{P}{\sin 60^\circ} = \frac{16}{\sin 60^\circ} = -18,5 \text{ кН},$$

$$N_1 = -N_2 \cos 60^\circ = 18,5 \cos 60^\circ = 9,23 \text{ кН}.$$

Отрицательное значение силы N_2 говорит о том, что стержень 2 сжат и его следует по условию задачи сделать чугуном с допустимым напряжением $[\sigma_c] = 8 \text{ кН/см}^2$.

По условию прочности (2.2) требуемая площадь поперечного сечения первого стержня, изготовленного из стали:

$$A_1 = \frac{N_1}{\sigma} = \frac{9,23}{16} = 0,577 \text{ см}^2.$$

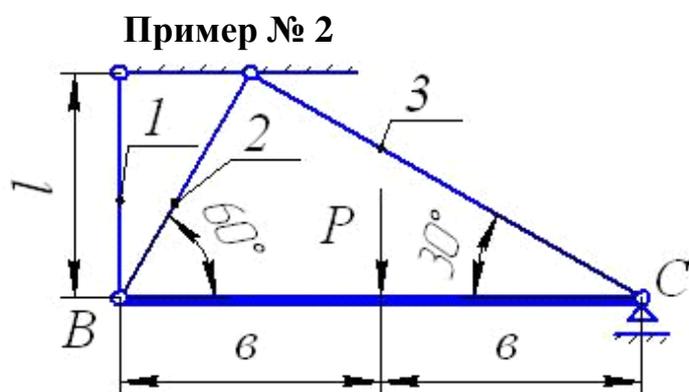
Площадь сечения второго стержня:

$$A_2 = \frac{|N_2|}{\sigma_c} = \frac{18,5}{8} = 2,31 \text{ см}^2.$$

2.3 Статически неопределимые шарнирно-стержневые системы

Если наложенных связей стержневой системы оказывается больше, чем это необходимо для обеспечения ее равновесия, то определить продольные силы в стержнях с помощью одних уравнений статики оказывается невозможно. Такие системы называются статически неопределимыми, так как число неизвестных продольных сил превышает число независимых уравнений равновесия.

Для определения усилий в стержнях таких систем уравнения статики следует дополнить уравнениями совместности деформаций, которые составляются при учете геометрической связи деформаций стержневой системы.



На рисунке 2.2 изображена абсолютно жесткая балка BC , нагруженная посередине силой P . Балка удерживается в горизонтальном положении шарнирно-подвижной опорой C и тремя стальными стержнями.

Рисунок 2.2 – Статически неопределимая система

Заданы площади сечений стержней $A_1 = 4 \text{ см}^2$; $A_2 = 3 \text{ см}^2$; $A_3 = 2 \text{ см}^2$. Определить допустимое значение силы P , если допустимое напряжение для материала стержней, равное $[\sigma] = 16 \text{ кН/см}^2$, одинаково при растяжении и сжатии.

Решение:

Допускаемая нагрузка (сила P) определяется по условию прочности наиболее напряженного стержня. Для этого найдем напряжение в сечениях стержней системы, выразив их через силу P .

Мысленно рассекаем стержни и, полагая стержни растянутыми, изображаем силы, приложенные к отсеченной части (рисунок 2.3).

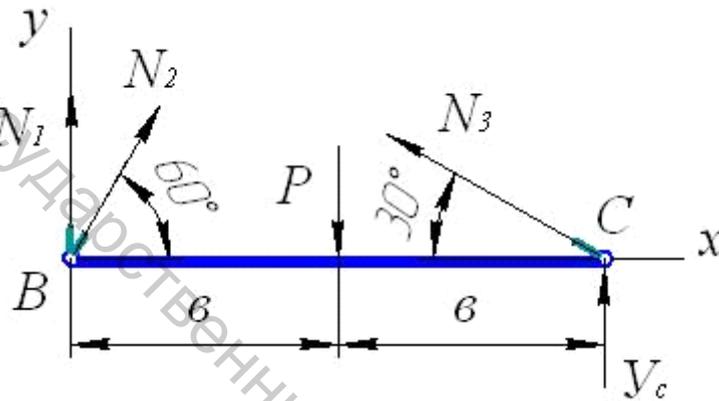


Рисунок 2.3 – Уравновешенная система сил

Уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0, & N_2 \cos 60^\circ - N_3 \cos 30^\circ &= 0; \\ \sum Y_i &= 0, & N_1 + N_2 \sin 60^\circ + N_3 \sin 30^\circ + Y_c - P &= 0; \\ \sum m_c &= 0, & N_1 \cdot 2b + N_2 \cdot 2b \sin 60^\circ - P \cdot 3b &= 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Данная система содержит 4 неизвестных величины: N_1 , N_2 , N_3 и Y_c . Лишь второе уравнение содержит реакцию опоры C , величина которой не влияет на значение допускаемой нагрузки, а потому ограничимся первым и третьим уравнениями.

Двух уравнений системы недостаточно для определения трех продольных сил. Необходимо дополнить их уравнением совместности деформаций.

По условию задачи брус BC является абсолютно жестким. Значит, перемещение системы осуществляется лишь за счет деформации стержней. Опора C допускает только горизонтальное смещение узла C . Такое же горизонтальное смещение получает и узел B . Эти перемещения изображены на рисунке 2.4.

Следует учесть, что истинные перемещения точек B и C в сотни раз меньше размеров бруса BC . Поэтому перемещения точек стержней

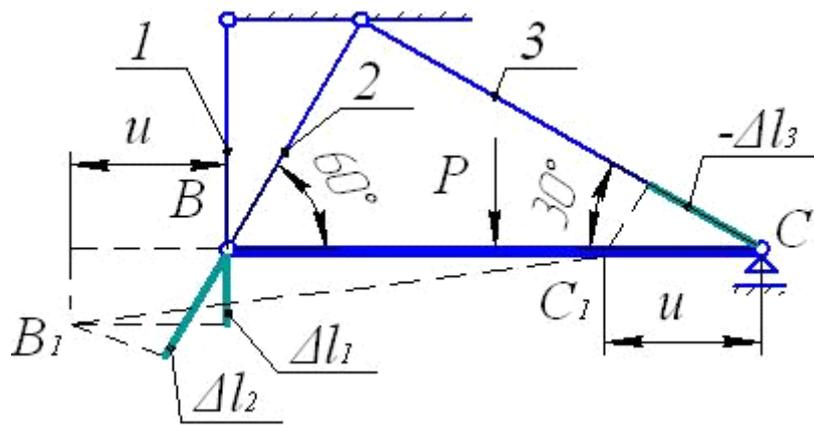


Рисунок 2.4 – Деформации и перемещения

при их поворотах изображены не дугами окружностей, а прямыми отрезками, перпендикулярными стержням. Заметим, что стержень 3 по предположению растянут, но на рисунке изображено его укорочение, значит изображенная деформация его не Δl_3 , а $-\Delta l_3$.

По рисунку 2.4:

$$\Delta l_2 = \Delta l_1 \cos 30^\circ + u \cos 60^\circ.$$

При $u = -\Delta l_3 / \cos 30^\circ$ получаем геометрическую связь деформаций:

$$\Delta l_2 = \Delta l_1 \cos 30^\circ - \Delta l_3 \operatorname{tg} 30^\circ. \quad (2.6)$$

В соответствии с законом Гука:

$$\begin{aligned} \Delta l_1 &= \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{N_1 l}{EA_1}, \\ \Delta l_2 &= \frac{N_2 l_2}{EA_2} = \frac{N_2 l}{EA_2 \sin 60^\circ}, \\ \Delta l_3 &= \frac{N_3 l_3}{EA_3} = \frac{N_3 l}{EA_3 \sin 30^\circ}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Подстановкой выражений (2.7) в равенство (2.6) получим уравнение, дополняющее систему (2.5):

$$\frac{N_2 l}{EA_2 \sin 60^\circ} = \frac{N_1 l}{EA_1} \cos 30^\circ - \frac{N_3 l}{EA_3 \sin 30^\circ} \operatorname{tg} 30^\circ. \quad (2.8)$$

После подстановки значений A_1 , A_2 , A_3 и упрощения уравнений (2.5) и (2.8) получим систему:

$$\begin{aligned} N_2 - 1,732N_3 &= 0; \\ N_1 + 0,866N_2 &= 0,5P; \\ 9N_1 - 16N_2 - 24N_3 &= 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Решение уравнений (2.9):

$$N_1 = 0,396P, \quad N_2 = 0,119P, \quad N_3 = 0,069P.$$

При заданных сечениях стержней:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{0,396P}{4} = 0,0991P,$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{0,119P}{3} = 0,0398P,$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{0,069}{2} = 0,0395P.$$

Наибольшее напряжение $\sigma_{\max} = \sigma_1 = 0,0991P$.

По условию прочности $\sigma_{\max} \leq \sigma$ допускаемая нагрузка:

$$P = \frac{\sigma}{0,0991} = \frac{16}{0,0991} = 161 \text{ кН.}$$

$$P = 161 \text{ кН.}$$

3 Геометрические характеристики плоских фигур

При кручении и изгибе бруса его прочность и жесткость зависят не только от размеров его сечения, но и от его формы. Эта зависимость учитывается с помощью геометрических характеристик плоской фигуры, которая изображает поперечное сечение бруса. К ним относятся

- статический момент площади,
- полярный момент инерции относительно начала координат,
- центробежный момент инерции.

3.1 Статический момент площади (рис. 3.1)

$$S_x = \int_A y dA; \quad S_y = \int_A x dA.$$

При известном положении центра тяжести $C(x_c; y_c)$ фигуры:

$$S_x = Ay_c; \quad S_y = Ax_c.$$

Оси, проходящие через центр тяжести фигуры, называются *центральными*.

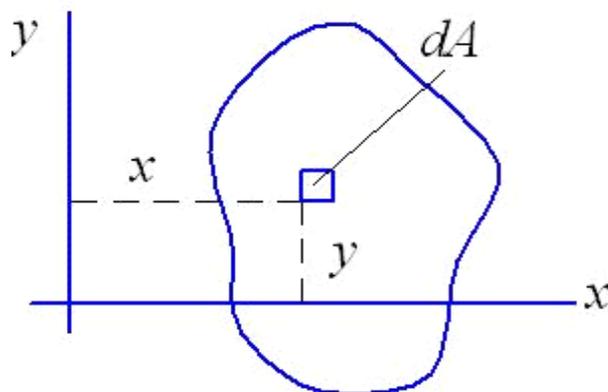


Рисунок 3.1 – Сечение бруса

3.2 Моменты инерции площади

$$I_x = \int_A y^2 dA; \quad I_y = \int_A x^2 dA \text{ – осевые моменты инерции.}$$

$$I_{xy} = \int_A xy dA \text{ – центробежный момент инерции.}$$

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA \text{ – полярный момент инерции.}$$

Осевые моменты и полярный момент инерции всегда больше нуля.

Центробежный момент инерции может принимать любое значение.

Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называются *главными*.

Ось симметрии фигуры всегда является *главной центральной осью*.

Любая ось, ей перпендикулярная, также является *главной*.

При повороте осей координат вокруг начала сумма осевых моментов инерции и полярный момент инерции остаются неизменными.

При удалении оси от центра тяжести фигуры осевые моменты инерции и центробежный момент инерции меняются согласно формулам

$$\begin{aligned} I_x &= I_{xc} + Aa^2; \\ I_y &= I_{yc} + Ab^2; \\ I_{xy} &= I_{xyc} + Aab, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где a и b – удаление оси x или y от центральной оси x_c или y_c .

Формулы моментов инерции простейших фигур (рисунок 3.2):

$$I_x = \frac{bh^3}{12}; \quad I_y = \frac{hb^3}{12} \text{ – для прямоугольника,}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{36} \text{ – для треугольника,}$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{64}, \quad I_p = \frac{\pi d^4}{32} \text{ – для круга.}$$

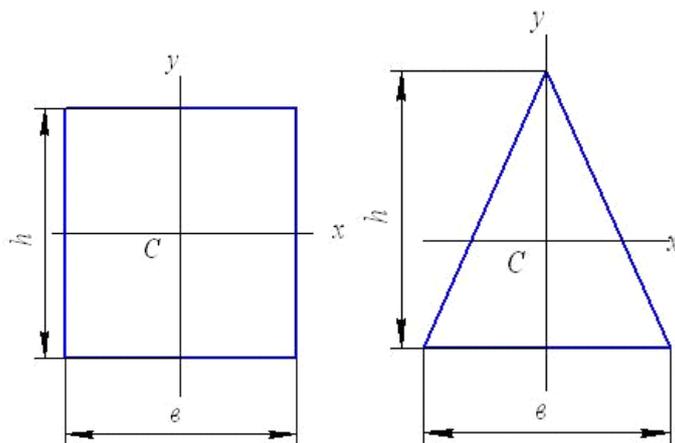


Рисунок 3.2 – Основные сечения

Пример 3

Плоская симметричная фигура (рисунок 3.3) представлена трапецией с основаниями 12 см и 4 см и высотой 9 см. С центром на расстоянии 5 см от нижнего основания вырезан круг диаметром 6 см. Требуется:

- 1 Найти центр тяжести фигуры.
- 2 Определить моменты инерции составной фигуры относительно центральных осей x_c и y_c .

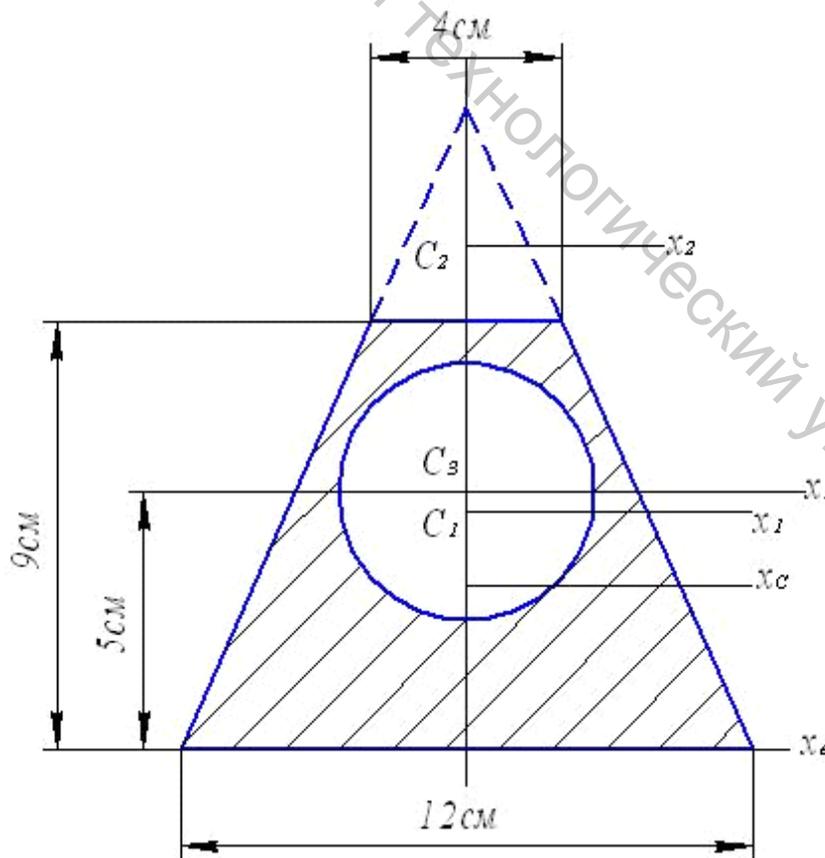


Рисунок 3.3 – Плоская симметричная фигура

Решение:

Вводим вспомогательную ось x_B . Ординату y_c центра тяжести сечения найдем по формуле

$$y_c = \frac{\sum A_i \cdot y_i}{A}$$

Дополним трапецию треугольником с основанием 4 см, высота которого определяется пропорцией:

$$\frac{9+h}{12} = \frac{h}{4}, \quad h = 4,5 \text{ см.}$$

Заданная фигура представляется совокупностью треугольника с основанием 12 см и высотой 13,5 см; круга и построенного треугольника с основанием 4 см и высотой $h = 4,5$ см.

Их площади и ординаты центров тяжести

$$A_1 = \frac{1}{2} 13,5 \cdot 12 = 81 \text{ см}^2; \quad y_1 = 4,5 \text{ см.}$$

$$A_2 = \frac{1}{2} 4,5 \cdot 4 = 9 \text{ см}^2; \quad y_2 = 10,5 \text{ см.}$$

$$A_3 = \frac{\pi \cdot 6^2}{4} = 28,3 \text{ см}^2; \quad y_3 = 5 \text{ см.}$$

Общая площадь фигуры

$$A = A_1 - A_2 - A_3 = 81 - 9 - 28,3 = 43,7 \text{ см}^2.$$

Ордината центра тяжести составной фигуры:

$$y_c = \frac{1}{A} A_1 y_1 - A_2 y_2 - A_3 y_3 = \frac{1}{43,7} 81 \cdot 4,5 - 9 \cdot 10,5 - 28,3 \cdot 5 = 2,94 \text{ см.}$$

Оси x_1 , x_2 и x_3 удалены от оси x_c на расстояния:

$$a_i = y_i - y_c.$$

Момент инерции составной фигуры относительно оси x_c в соответствии с формулами (3.1)

$$I_{x_c} = \frac{12 \cdot 13,5^3}{36} + 81 \cdot 4,5 - 2,94^2 - \frac{4 \cdot 4,5^3}{36} - 9 \cdot 10,5 - 2,94^2 - \frac{\pi \cdot 6^4}{64} - 28,3 \cdot 5 - 2,94^2 = 309 \text{ см}^4$$

Ось симметрии y является главной центральной осью инерции. Момент инерции относительно оси y находится без использования формулы параллельного переноса оси.

$$I_{y_c} = \frac{13,5 \cdot 12^3}{48} - \frac{4,5 \cdot 4^3}{48} - \frac{\pi \cdot 6^4}{64} = 416,4 \text{ см}^4.$$

4 Кручение

Кручение – такой вид нагружения бруса, при котором в его поперечном сечении возникает лишь один внутренний силовой фактор – крутящий момент M_z . В простейшем случае он вызывается двумя противоположно направленными парами сил, плоскости действия которых перпендикулярны продольной оси бруса. При сложной нагрузке крутящий момент определяется по следующему правилу

Крутящий момент M_z равен сумме моментов относительно продольной оси z всех внешних сил, приложенных к отсеченной части бруса.

Такому нагружению подвергаются детали машин, передающие энергию с помощью вращательного движения. Вращающийся брус, испытывающий деформацию кручения, называется валом.

При передаваемой мощности N и частоте вращения n в поперечном сечении вала действует крутящий момент, равный:

$$M_z = \frac{N}{\omega} = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{N}{n}$$

4.1 Деформации и напряжения

При кручении бруса произвольного сечения его плоские до нагружения поперечные сечения искривляются. Эти искривления называются *депланациями*. Лишь при кручении бруса круглого или кольцевого сечения депланации отсутствуют и сечения поворачиваются вокруг продольной оси как жесткие диски.

Продольные линии, нанесенные предварительно на поверхность круглого бруса, и контуры сечений образуют сетку с прямоугольными ячейками. Под нагрузкой:

- контуры сечений не искривляются,
- диаметр бруса и расстояния между сечениями не изменяются,
- ячейки сетки принимают форму параллелограммов.

Значит, элементы бруса испытывают деформацию сдвига, при которой касательные напряжения в поперечном сечении перпендикулярны радиусам сечений и меняются вдоль него по линейному закону.

При кручении круглого бруса справедлива гипотеза *плоских сечений*, то есть сечения плоские, перпендикулярные продольной оси бруса до деформации, остаются такими и после приложения нагрузки. Форма сечения и его диаметр не меняются.

Напряженно-деформированное состояние в точках бруса – сдвиг (рис. 1.5).

Касательные напряжения в поперечном сечении бруса при кручении распределяются подобно распределению скоростей в жидкости, циркулирующей в сосуде, имеющем в плане форму поперечного сече-

ния бруса. При этом следует положить, что трение жидкости о стенки сосуда отсутствует. Значит, при кручении круглого бруса касательные напряжения перпендикулярны радиусу сечения и распределяются вдоль радиуса по линейному закону:

$$\tau = \beta r.$$

Выразив крутящий момент через напряжение τ , получим:

$$M_z = \int_A \tau r dA = \int_A \beta r^2 dA = \beta I_\rho.$$

Отсюда:

$$\beta = \frac{M_z}{I_\rho} \text{ и } \tau = \frac{M_z}{I_\rho} r \quad (4.1)$$

В формулах (4.1) I_ρ – полярный момент инерции круга, равный:

$$I_\rho = \frac{\pi d^4}{32}.$$

В случае кольцевого сечения при отношении внутреннего диаметра d к внешнему D : $d / D = \alpha$.

$$I_\rho = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4).$$

Наибольшее значение напряжения принимает в точках, наиболее удаленных от центра круга, то есть в точках контура сечения.

$$\max|\tau| = \frac{M_z}{I_\rho} r_{\max} = \frac{M_z}{W_\rho}. \quad (4.2)$$

$W_\rho = \frac{I_\rho}{\rho_{\max}}$ – полярный момент сопротивления, равный для сплошного

круглого сечения $W_\rho = \frac{\pi d^3}{16}$ и для кольцевого сечения $W_\rho = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4)$.

Условие прочности:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_\rho} = \tau.$$

Геометрической характеристикой прочности круглого сечения бруса при кручении является полярный момент сопротивления.

При кручении бруса прямоугольного сечения, в соответствии с гидродинамической аналогией, в точках, наиболее удаленных от центра прямоугольника (в угловых точках), касательные напряжения равны нулю. Наибольшие напряжения действуют посередине больших сторон прямоугольника:

$$\max \tau = \frac{M_z}{W_k}. \quad (4.3)$$

Момент сопротивления кручению прямоугольного сечения находится по формуле

$$W_k = \alpha h v^2. \quad (4.4)$$

В формуле (4.4) h – больший размер сечения (а не высота), v – меньший.

Напряжение, действующее посередине меньшей стороны сечения, вычисляется по формуле

$$\tau' = \gamma \tau_{\max}.$$

Коэффициенты α и γ зависят от отношения h / v и задаются таблицей.

Таблица 4.1 – Таблица коэффициентов

h / v	1	1,5	2	2,5	3	4	6
α	0,208	0,231	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299
γ	1	0,859	0,795	0,766	0,753	0,745	0,743
β	0,141	0,196	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299

Мерой деформации бруса при кручении является угол закручивания. Он определяется в случае круглого сечения по формуле

$$\varphi = \frac{M_z l}{GI_p}. \quad (4.5)$$

Геометрической характеристикой жесткости круглого сечения бруса при кручении является полярный момент инерции.

Для прямоугольного сечения полярный момент инерции заменяется крутильной характеристикой, равной

$$I_k = \beta h v^3. \quad (4.6)$$

Коэффициент β приводится в таблице 4.1

При отношении $\xi = \frac{h}{v} \leq 2,5$ коэффициенты формул (4.4) и (4.6) можно найти по следующим приближенным формулам:

$$\alpha = \frac{\xi}{3,1 + 0,6\xi}, \quad \beta = \frac{\xi^2}{3,5 + \xi^2}.$$

4.2 Статически неопределимый брус

Пример № 4

Брус, состоящий из четырех участков с заданными поперечными сечениями, нагружен парой сил (рисунок 4.1). Требуется:

1. Построить эпюру крутящего момента, выразив крутящие моменты на участках через момент m приложенной пары.
2. Найти наибольшее касательное напряжение.
3. По условию прочности при $\tau = 80$ МПа определить допускаемое значение момента m .

Исходные данные:

$$d = 2 \text{ см}; g = 1,5 \text{ см}; D = 2,5 \text{ см}; k = 0,8; \delta = 1 \text{ см}; h = 4 \text{ см}.$$

Изображенный брус является статически неопределимым. Для определения крутящего момента в любом сечении необходимо найти реакцию одной из опор.

Удалив, например, левую опору, получим статически определимый брус, который будет деформироваться так же, как и заданный, если к сечению A приложить пару сил, момент которой X равен реактивному моменту удаленной опоры. В этом случае угол поворота сечения A равен нулю. Но он складывается из углов закручивания участков бруса.

$$\varphi_A = \varphi_{AB} + \varphi_{BC} + \varphi_{CD} + \varphi_{DE},$$

или

$$\varphi_A = \frac{M_{k1} \cdot 2l}{GJ_{k1}} + \frac{M_{k2} \cdot l}{GJ_{k2}} + \frac{M_{k3} \cdot l}{GJ_{k3}} + \frac{M_{k4} \cdot l}{GJ_{k4}}. \quad (4.7)$$

Крутящие моменты в равенстве (4.7) (рисунок 4.1).

$$M_{k1} = M_{k2} = X, \quad M_{k3} = M_{k4} = X + m. \quad (4.8)$$

Геометрические характеристики жесткости сечений

$$\begin{aligned} J_{k1} &= \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \cdot 2^4 \cdot 10^{-8}}{32} = 1,57 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4, \\ J_{k2} &= \beta g^4 = 0,141 \cdot 1,5^4 \cdot 10^{-8} = 0,714 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4, \\ J_{k3} &= \frac{\pi D^4}{32} (1 - k^4) = \frac{\pi \cdot 2,5^4 \cdot 10^{-8}}{32} (1 - 0,8^4) = 2,26 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4, \\ J_{k4} &= \beta h \delta^3 = 0,281 \cdot 4 \cdot 1^3 \cdot 10^{-8} = 1,12 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4. \end{aligned} \quad (4.9)$$

В этих выражениях значение коэффициента β для прямоугольного сечения находятся по таблице (см. выше) в зависимости от отношения большей стороны к меньшей. Так, для квадрата это отношение равно $g / g = 1$, а для сечения четвертого участка $h / \delta = 4 / 1 = 4$.

После сокращения на l и G и подстановки выражений (4.8) и значений (4.9) равенство (4.7) при условии $\varphi_A = 0$ принимает вид

$$X \left(\frac{2}{1,57} + \frac{1}{0,714} \right) + X + m \left(\frac{1}{2,26} + \frac{1}{1,12} \right) = 0. \quad (4.10)$$

Решение уравнения (4.10): $X = -0,396m$.

По найденному значению момента X строим эпюру крутящего момента (рисунок 4.1).

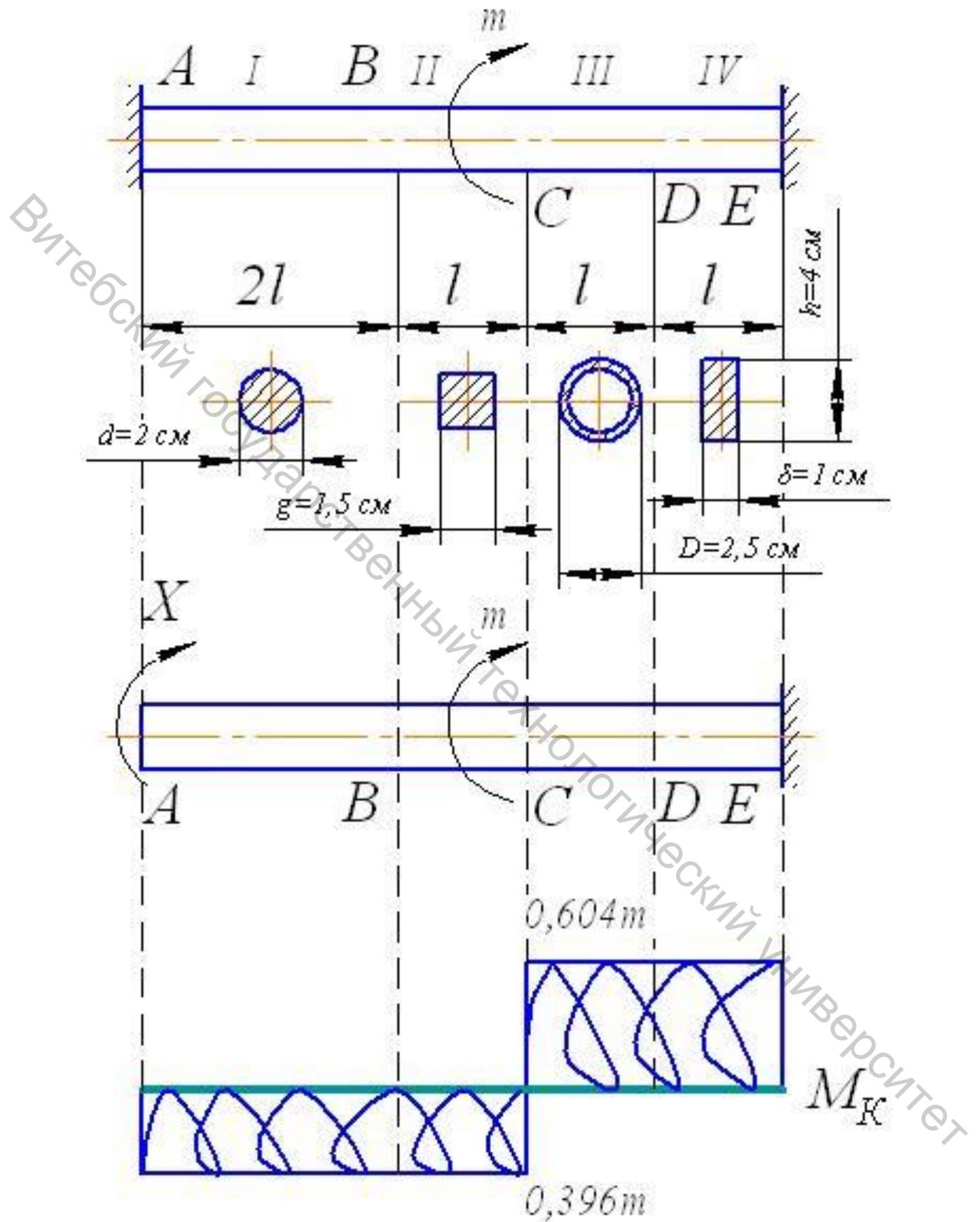


Рисунок 4.1 – Схема бруса и эпюра M_K

Для определения касательных напряжений в сечениях участков найдем моменты сопротивления сечений.

$$W_{k1} = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi \cdot 2^3 \cdot 10^{-6}}{16} = 1,57 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,$$

$$W_{k2} = dg^3 = 0,208 \cdot 1,5^3 \cdot 10^{-6} = 0,702 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,$$

$$W_{k3} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - k^4) = \frac{\pi \cdot 2,5^3 \cdot 10^{-6}}{16} (1 - 0,8^4) = 1,81 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,$$

$$W_{k4} = \alpha h d^2 = 0,282 \cdot 4 \cdot 1^2 \cdot 10^{-6} = 1,13 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Значение коэффициента α для моментов сопротивления прямоугольных сечений так же, как коэффициента γ , находятся по таблице (см. выше).

Наибольшие касательные напряжения в сечениях участков бруса:

$$\tau_{1\max} = \frac{M_{k1}}{W_{k1}} = \frac{0,396 \text{ м}}{1,51 \cdot 10^{-6}} = 0,262 \cdot 10^6 \text{ м},$$

$$\tau_{2\max} = \frac{M_{k2}}{W_{k2}} = \frac{0,396 \text{ м}}{0,702 \cdot 10^{-6}} = 0,564 \cdot 10^6 \text{ м},$$

$$\tau_{3\max} = \frac{M_{k3}}{W_{k3}} = \frac{0,604 \text{ м}}{1,81 \cdot 10^{-6}} = 0,334 \cdot 10^6 \text{ м},$$

$$\tau_{4\max} = \frac{M_{k4}}{W_{k4}} = \frac{0,604 \text{ м}}{1,13 \cdot 10^{-6}} = 0,534 \cdot 10^6 \text{ м}.$$

Наибольшее напряжение $\tau_{\max} = 0,564 \cdot 10^6 \text{ м}$.

Допускаемой называется нагрузка, при которой наибольшее напряжение равно допускаемому.

$$0,564 \cdot 10^6 \text{ м} = \tau.$$

$$m = \frac{\tau}{0,564 \cdot 10^6} = \frac{80 \cdot 10^6}{0,564 \cdot 10^6} = 141 \text{ Ё} = 0,141 \text{ кНм}.$$

5 Изгиб

5.1 Внутренние силовые факторы при плоском изгибе

Поперечная нагрузка, действующая в одной плоскости, которая называется *силовой*, вызывает искривление продольной оси бруса. Если искривленная ось является плоской кривой, то изгиб называется *плоским*. При этом плоскость искривленной оси бруса может совпадать с силовой плоскостью (или быть ей параллельной) или может быть расположена под некоторым углом φ к ней. В первом случае изгиб называется *прямым*, во втором – *косым*.

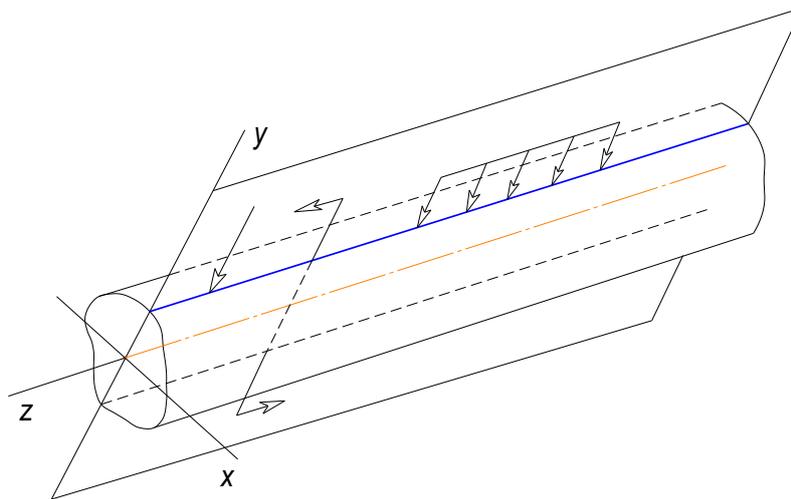


Рисунок 5.1 – Плоский изгиб

Введем систему координат так, чтобы одна из поперечных осей, например ось y , принадлежала силовой плоскости. Тогда поперечная ось x будет перпендикулярна силовой плоскости (рисунок 5.1). В этой системе поперечная сила Q_x равна нулю. Так же равны нулю крутящий момент M_z и изгибающий момент M_y . Если сосредоточенные и распределенные внешние силы перпендикулярны продольной оси, то и продольная сила N_z в любом сечении бруса также отсутствует.

Остаются не равными нулю лишь поперечная сила Q_y и изгибающий момент M_x . Такой брус называется балкой.

При определении внутренних силовых факторов следует учитывать все силы, приложенные к балке, в том числе и опорные реакции.

5.2 Опоры и их реакции

Схематизируя опоры, можно разделить их на три вида.

На рисунке 5.2 изображена шарнирно-подвижная опора, не допускающая вертикального перемещения. Она налагает одну связь. Реакция ее представляется силой, линия действия которой известна. Иногда такая опора изображается в виде короткого стерженька (рисунок 5.2, б), положение которого определяет линию действия реакции опоры.

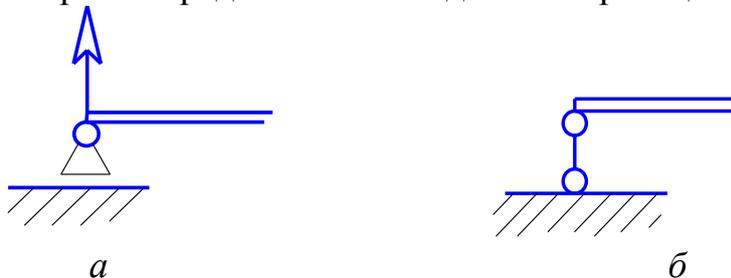


Рисунок. 5.2. – Шарнирно-подвижная опора

На рисунке 5.3 изображена шарнирно-неподвижная опора, налагающая две связи. Она не допускает ни вертикального, ни горизонтального перемещения.



Рис. 5.3 – Шарнирно-неподвижная опора

Направление реакции такой опоры неизвестно, поэтому ее реакция представляется двумя составляющими. На рисунке 5.3 б показано другое возможное изображение шарнирно-неподвижной опоры.

Третий вид опоры – заделка или заделка – изображен на рисунке 5.4. Эта опора не допускает никаких перемещений, то есть налагает три связи. Реакция такой опоры представляется двумя составляющими силы и опорным моментом

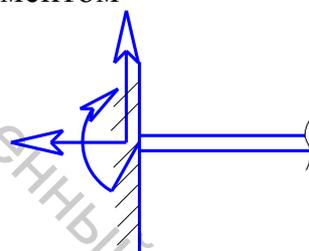


Рисунок 5.4 – Заделка

Закрепленные опорами балки имеют следующие названия:

- а) однопролетная или двухопорная (рисунок 5.5 а);
- б) консоль (рисунок 5.5 б);
- в) консольная балка (рисунок 5.5 в);

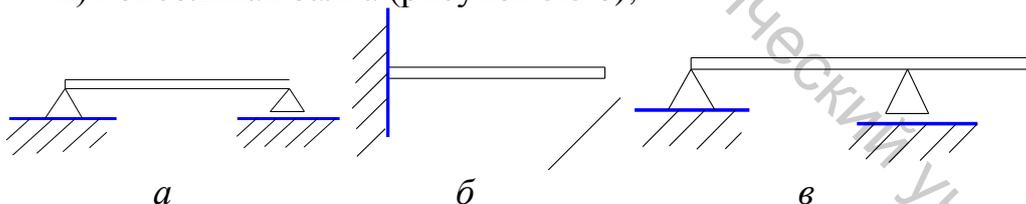


Рисунок 5.5 – Балки, закрепленные опорами

Для неподвижности балки или плоской рамы на нее необходимо наложить 3 связи с помощью комбинации опор.

На рисунках 5.6 показана одна и та же плоская рама, закрепленная с помощью различных опор. Заделка А (рисунок 5.6 а) налагает 3 связи. Шарнирно-неподвижная опора А совместно с шарнирно-подвижной опорой В (рисунок 5.6 б) налагают вместе $2 + 1 = 3$ связи. На рисунке 5.6 в каждая из шарнирно-подвижных опор налагает по одной связи.

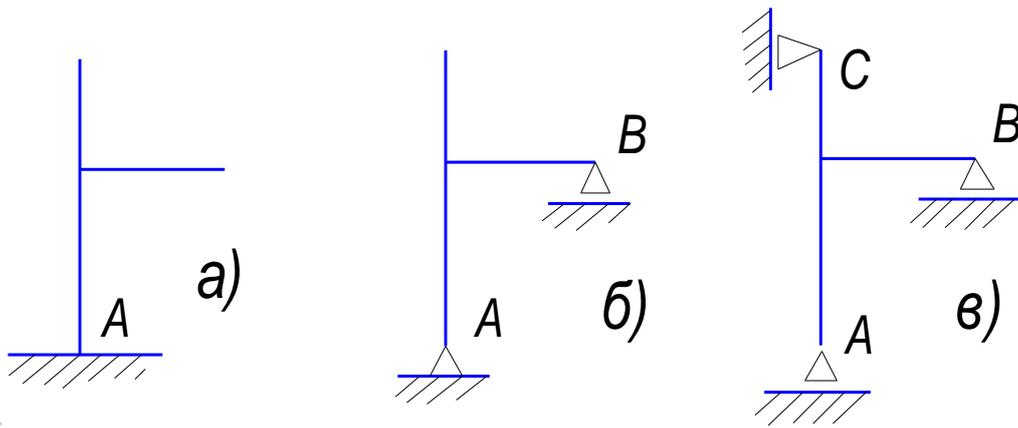


Рисунок 5.6 – Плоская рама

Заметим, что такое расположение трех шарнирно-подвижных опор, какое изображено на рисунке 5.7, не может предотвратить горизонтальное перемещение рамы, а система шарнирно-неподвижной опоры A и шарнирно-подвижной опоры C , изображенная на рисунке 5.8, допускает мгновенный поворот вокруг шарнира A .

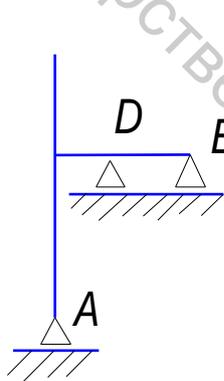


Рисунок 5.7 – Закрепление рамы, при котором допускается поступательное движение

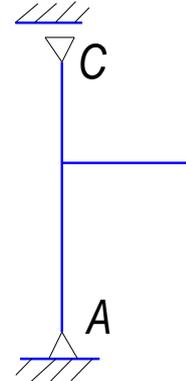


Рисунок 5.8 – Закрепление рамы, при котором допускается вращательное движение

Поскольку при определении внутренних силовых факторов учитываются все внешние силы, приложенные к отсеченной части, определению поперечной силы и изгибающего момента должно предшествовать определение опорных реакций с помощью уравнений равновесия.

При построении уравнений равновесия следует учитывать, что из множества возможных уравнений проекций сил и уравнений моментов для произвольной плоской системы сил лишь три уравнения являются независимыми. Система таких уравнений может состоять из:

- 1) одного уравнения моментов и двух уравнений проекций на непараллельные оси координат;
- 2) двух уравнений моментов и одного уравнения проекций на ось, перпендикулярную прямой, соединяющей моментные точки;

3) трех уравнений моментов при условии, что моментные точки не принадлежат одной прямой.

Для определения неизвестных сил желательно составлять такие уравнения равновесия, которые содержат лишь одну неизвестную величину. Таковыми, как правило, являются уравнения моментов. Например, на рисунке 5.9 изображена конструкция, состоящая из балки BC , опирающейся на шарнирно подвижную опору C , и консоль AB . Реакция опоры C может быть определена с помощью уравнения моментов относительно оси шарнира B сил, приложенных к балке BC . В это уравнение не войдут силы, с которыми консоль AB действуют на балку BC .

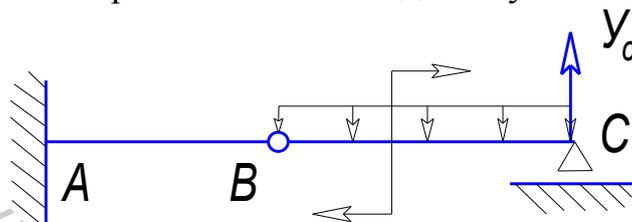


Рисунок 5.9 – Система двух тел

Для определения сил взаимодействия консоли и балки BC (если в этом есть необходимость) нужно разделить конструкцию на отдельные системы. Они изображены на рисунке 5.10.

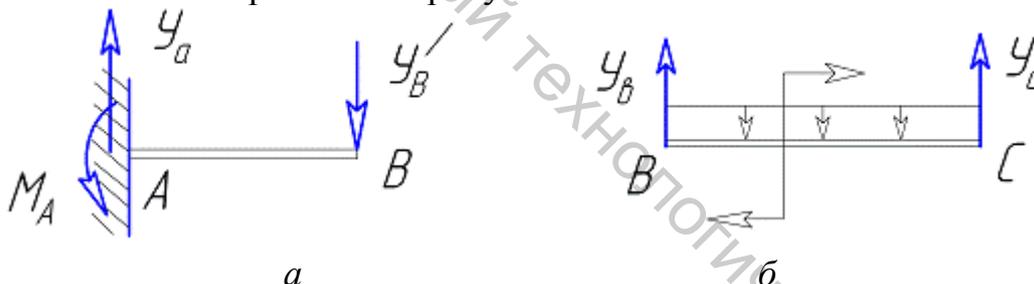


Рисунок 5.10 – Элементы конструкции

Здесь Y_B – это сила, выражающая действие консоли на балку. Она может быть определена с помощью уравнения моментов сил системы b относительно оси шарнира C .

Действие балки BC на консоль AB выражается силой Y'_B , алгебраическое значение которой равно алгебраическому значению найденной силы Y_B . Теперь с помощью уравнений проекций на вертикальную ось и уравнения моментов относительно точки A (или B) определяются сила Y_A и опорный момент M_A .

На рисунке 5.11 изображена рама, нагруженная сосредоточенной силой P , распределенной нагрузкой интенсивностью q и парой сил, момент которой равен M . Здесь же показаны составляющие реакции опоры A и реакция шарнирно-подвижной опоры B .

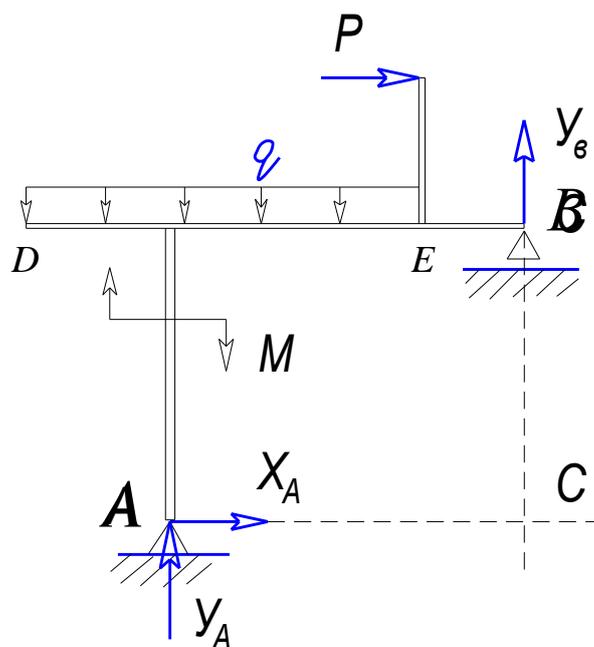


Рисунок 5.11 – Рама

Уравнение моментов относительно шарнира A содержит кроме моментов заданных сил лишь момент неизвестной силы Y_B . Моменты сил X_A и Y_B равны нулю. Линии действия сил X_A и Y_B пересекаются в точке C . Значит, моменты сил X_A и Y_B относительно точки C равны нулю и уравнение моментов относительно C содержит лишь одну неизвестную силу – силу Y_A . Уравнение проекций на горизонтальную ось не содержит сил Y_A и Y_B . Таким образом, каждое из упомянутых уравнений позволяет найти любую неизвестную силу независимо от значения других неизвестных сил.

После определения неизвестных сил нужно составить уравнение, содержащее несколько найденных сил, с целью проверки правильности их определения. Таким уравнением может быть уравнение проекций сил на вертикальную ось. Оно связывает силы Y_A и Y_B . А уравнение моментов относительно точки D или точки E содержит все три неизвестные силы X_A , Y_A и Y_B . После определения всех внешних сил можно приступить к определению внутренних силовых факторов.

5.3 Эпюры внутренних силовых факторов при изгибе балки

Для определения опасного сечения и значений в этом сечении поперечной силы и изгибающего момента строятся графики функций $Q_y(z)$ и $M_x(z)$, которые показывают зависимость этих величин от положения сечения. Эти графики называются эпюрами.

При построении эпюр Q_y и M_x следует соблюдать следующие правила (рисунок 5.12):

1. *Базис, на котором строится эпюра, располагается параллельно продольной оси балки.*

2. Значения внутренних силовых факторов откладываются от базиса по перпендикуляру в соответствии с выбранным масштабом.

3. Эпюры штрихуются линиями, перпендикулярными базису, и указываются характерные значения поперечной силы и изгибающего момента.

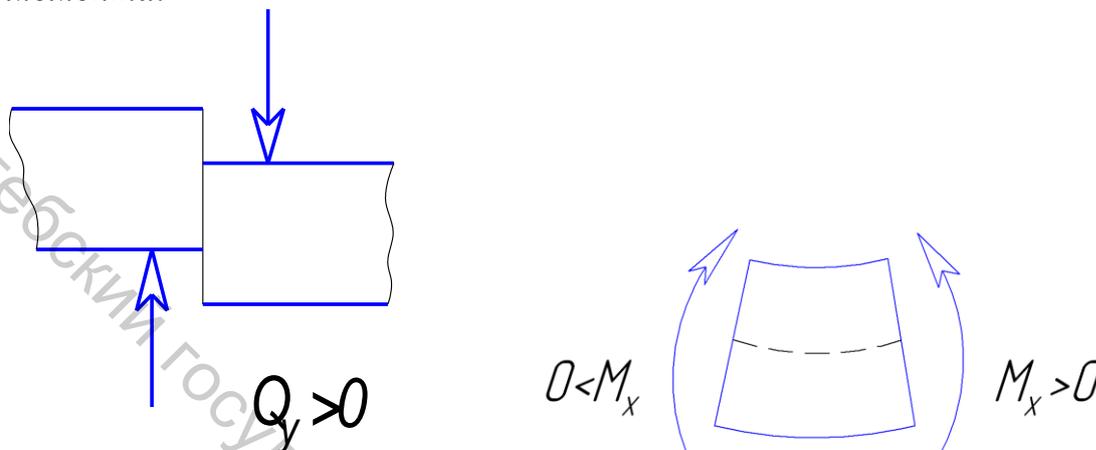


Рисунок 5.12 – Правила знаков для Q_y и M_x

Нагрузка может быть представлена сосредоточенной силой, распределенной нагрузкой и парой сил.

Распределенная нагрузка характеризуется ее интенсивностью q , то есть величиной нагрузки на единицу длины бруса. Равнодействующая такой нагрузки, распределенной по участку длиной l , равна $R = ql$, линия действия ее проходит через середину участка. Момент распределенной нагрузки относительно произвольной точки равен моменту равнодействующей (рисунок 5.13).

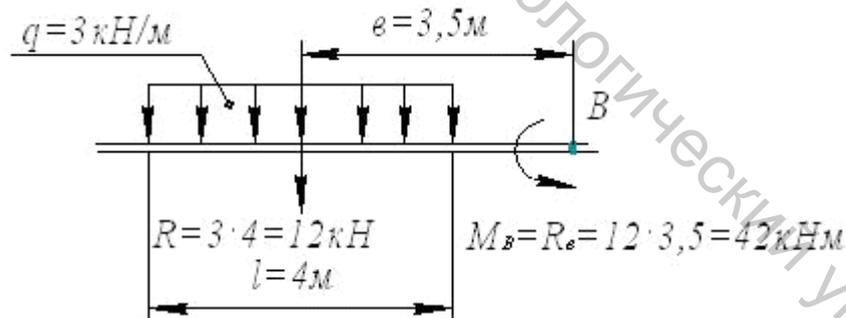


Рисунок 5.13 – Равнодействующая и момент распределенной нагрузки

Вспомним два правила определения поперечной силы и изгибающего момента.

Поперечная сила Q_y равна сумме проекций на поперечную ось y всех внешних сил, приложенных к отсеченной части бруса.

Изгибающий момент M_x равен сумме моментов относительно поперечной оси x всех внешних сил, приложенных к отсеченной части бруса.

Рассмотрим три простейших случая нагружения консоли.

1. Консоль AB нагружена парой сил, момент которой равен M (рисунок 5.14). Отсеченная (левая) часть консоли изображена под бруском штриховой линией.

Отметим свойства пары:

а) векторная сумма сил пары равна нулю. Значит, сумма проекций сил пары на любую ось равна нулю.

б) алгебраическая сумма моментов сил пары относительно любой точки плоскости равна моменту пары.

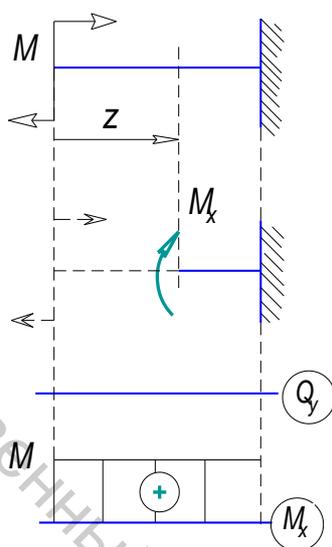


Рисунок 5.14 – Консоль, нагруженная парой сил

На основании первого свойства пары заключаем, что поперечная сила Q_y в любом сечении консоли равна нулю.

На основании второго свойства пары изгибающий момент M_x в любом сечении консоли равен моменту приложенной пары. Эпюры Q_y и M_x показаны под бруском AB .

2. Консоль AB нагружена сосредоточенной силой P (рис. 5.15).

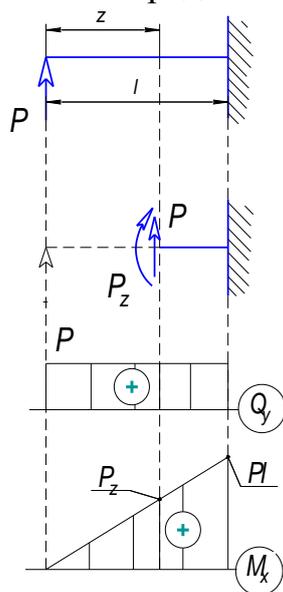


Рисунок 5.15 – Консоль, нагруженная сосредоточенной силой

Действие отсеченной части (она изображена штриховой линией) на оставшуюся часть бруса выражается поперечной силой $Q_y = P$ и изгибающим моментом $M_x = Pz$. Изгибающий момент меняется по линейному закону и наибольшее значение принимает при наибольшем плече силы, то есть при $z = l$, $\max M_x = Pl$.

3 Консоль AB нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q (рисунок 5.16).

Равнодействующая распределенной нагрузки, приложенной к отсеченной части, равна qz и направлена вниз. Значит

$$Q_y \ z = -qz. \quad (5.1)$$

Линия действия этой равнодействующей проходит через середину отсеченной части. Плечо ее равно $z/2$. Значит изгибающий момент в сечении C равен:

$$M_x \ z = -qz \frac{z}{2} = -\frac{l}{2} qz^2. \quad (5.2)$$

Выражения (5.1) и (5.2) показывают, что эпюра поперечной силы представляется наклонной прямой, а эпюра изгибающего момента – параболой:

$$\max |Q_y| = ql, \quad \max |M_x| = \frac{1}{2} ql^2.$$

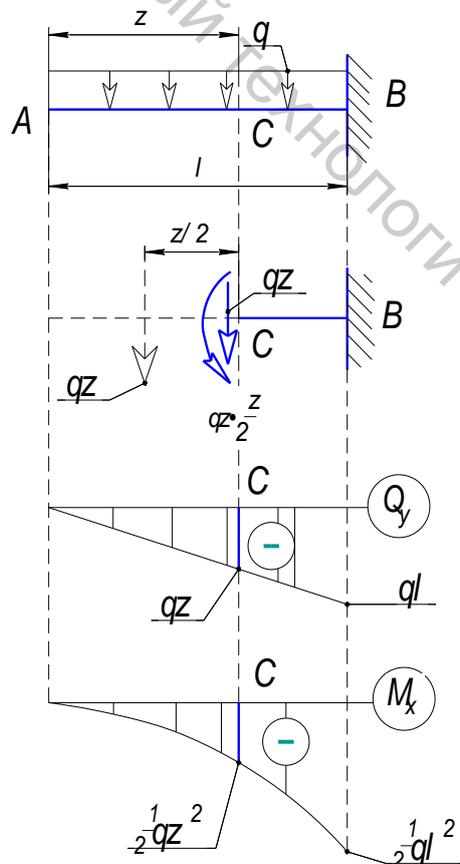


Рисунок 5.16 – Консоль, нагруженная равномерно распределенной нагрузкой

Отметим некоторые закономерности:

1. На участке, свободном от распределенной нагрузки, поперечная сила не меняется вдоль участка, а изгибающий момент меняется по линейному закону.

2. На участке с равномерно распределенной нагрузкой поперечная сила изменяется линейно, а изгибающий момент – по закону квадратной параболы.

3. При обходе бруса слева направо:

а) при $Q_y > 0$ изгибающий момент возрастет;

б) при $Q_y < 0$ изгибающий момент убывает;

в) при $Q_y = 0$ на участке без распределенной нагрузки изгибающий момент неизменный вдоль всего участка, а при распределенной нагрузке – принимает экстремальное значение.

4. В сечении, к которому приложена внешняя сосредоточенная сила, поперечная сила меняется скачкообразно на величину приложенной силы (рисунок 5.18 а).

5. В сечении, к которому приложена пара сил, изгибающий момент меняется скачкообразно на величину момента приложенной пары (рисунок 5.18 б).

5.4 Дифференциальные зависимости при изгибе

Отмеченные закономерности вытекают из дифференциальных зависимостей, полученных по условию равновесия элемента балки, ограниченного двумя бесконечно близкими поперечными сечениями (рисунок 5.17).

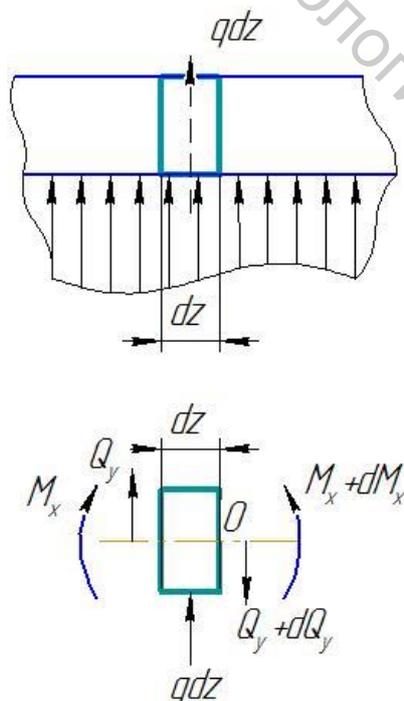


Рисунок 5.17 – Поперечная сила и изгибающий момент при действии распределенной нагрузки

Уравнение проекций на ось y .

$$Q_y - Q_y + dQ_y + qdz = 0,$$

Отсюда

$$\frac{dQ_y}{dz} = q. \quad (5.3)$$

Уравнение моментов относительно точки O :

$$-M_x - Q_y dz + M_x + dM_x - qdz \frac{dz}{2} = 0,$$

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y. \quad (5.4)$$

Формулы (5.3) и (5.4) указывают, что при положительной поперечной силе изгибающий момент возрастает (рисунок 5.19 *а*), а при отрицательной – убывает (рисунок 5.19 *б*) при обходе балки слева направо. При распределенной нагрузке, направленной вниз, кривизна параболы на эпюре изгибающего момента отрицательная, и наоборот, положительная при нагрузке, направленной вверх.

5.5 Случай сосредоточенной силы и момента

Пусть к некоторому сечению D приложена сосредоточенная внешняя сила P (рисунок 5.19). Выделим бесконечно малый элемент бруса, ограниченный двумя сечениями, примыкающими к сечению D . Уравнение проекций сил на ось y :

$$Q_y^l + P - Q_y^{pr} = 0.$$

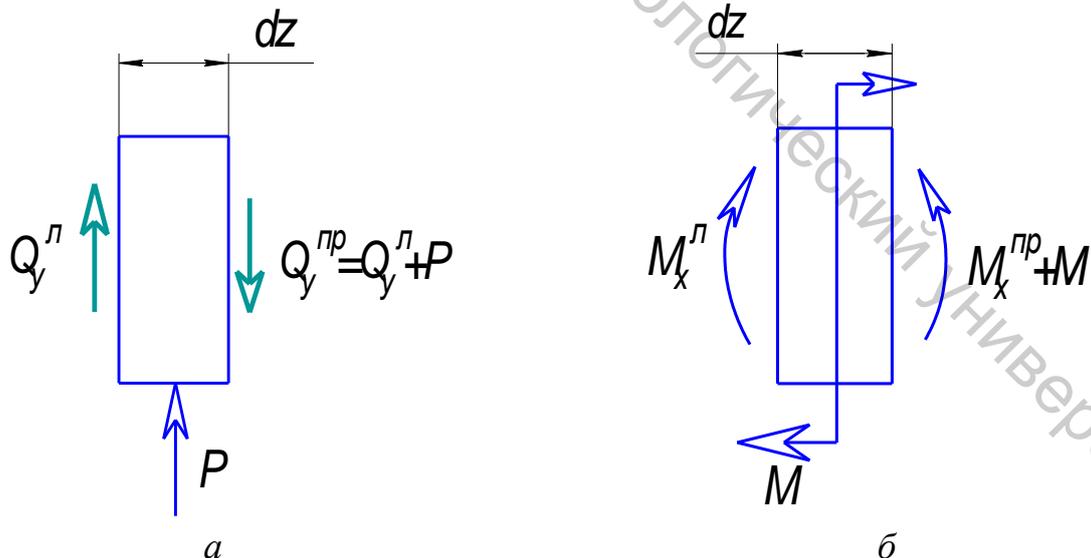


Рисунок 5.18 – Действие сосредоточенной силы (*а*) и момента (*б*)

Отсюда следует $Q_y^{pr} = Q_y^l + P$. Это значит, что при переходе через сечение, к которому приложена сосредоточенная сила, поперечная сила Q_y меняется скачкообразно на величину приложенной сосредоточенной

силы. Направление скачка на эпюре поперечной силы (в соответствии с правилом знаков) совпадает с направлением силы при обходе балки слева направо.

Если к сечению D приложена внешняя пара сил (рисунок 5.18 б), то выделив элемент бруса и составив уравнение моментов, получим:

$$M_x^{np} = M_x^l + M.$$

Это значит, что при переходе через сечение, к которому приложена внешняя пара сил, изгибающий момент меняется скачкообразно на величину момента приложенной пары.

5.6 Построение эпюр поперечной силы и изгибающего момента

Если к брусу приложены различного вида нагрузки, то эпюры Q_y и M_x представляются комбинациями эпюр для рассмотренных консолей. Для построения их достаточно определить значения внутренних силовых факторов на границах участков. При этом для параболы необходимо найти ее вершину, то есть определить экстремальное значение изгибающего момента на участке, нагруженном равномерно распределенной нагрузкой.

Как известно, экстремальное значение функции соответствует аргументу, при котором производная функции равна нулю. Значит вершина параболы, на основании формулы (5.4), соответствует сечению, в котором равна нулю поперечная сила. На эпюре поперечной силы в этом сечении прямая $Q_y(z)$ пересекает базис. Координату z_0 этого сечения можно определить следующим способом.

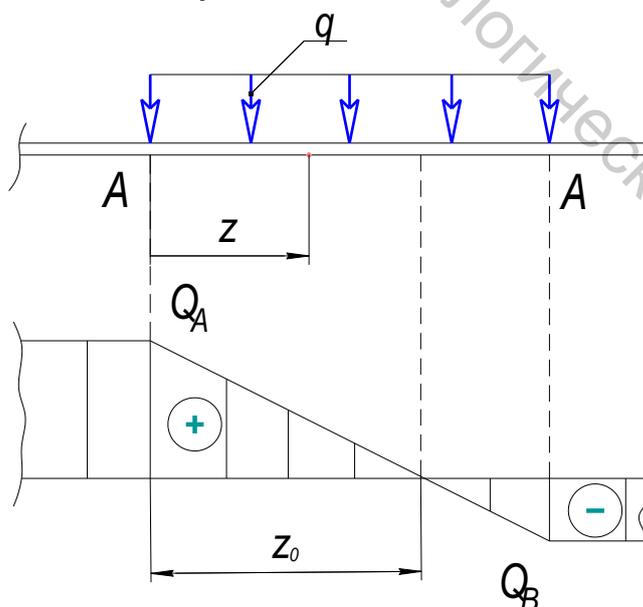


Рисунок 5.19 – Брус, нагруженный распределенной нагрузкой

На рисунке 5.19 изображена часть бруса, на участке AB которого действует распределенная нагрузка интенсивности q . Под участком AB

приведена эпюра поперечной силы Q_y . Поперечная сила в сечении с продольной координатой z равна:

$$Q_y \ z = Q_A - qz. \quad (5.5)$$

Приравняв нулю выражение (5.5), получим:

$$z_0 = \frac{Q_A}{q}. \quad (5.6)$$

Пример № 5 а

Консоль, защемленная в сечении D , нагружена сосредоточенными силами $P_1 = 3 \text{ кН}$, $P_2 = 11 \text{ кН}$ и парой сил, момент которой $M = 8 \text{ кНм}$ (рисунок 5.20).

Требуется:

Найти значения поперечной силы и изгибающего момента в сечениях, примыкающих к границам участков.

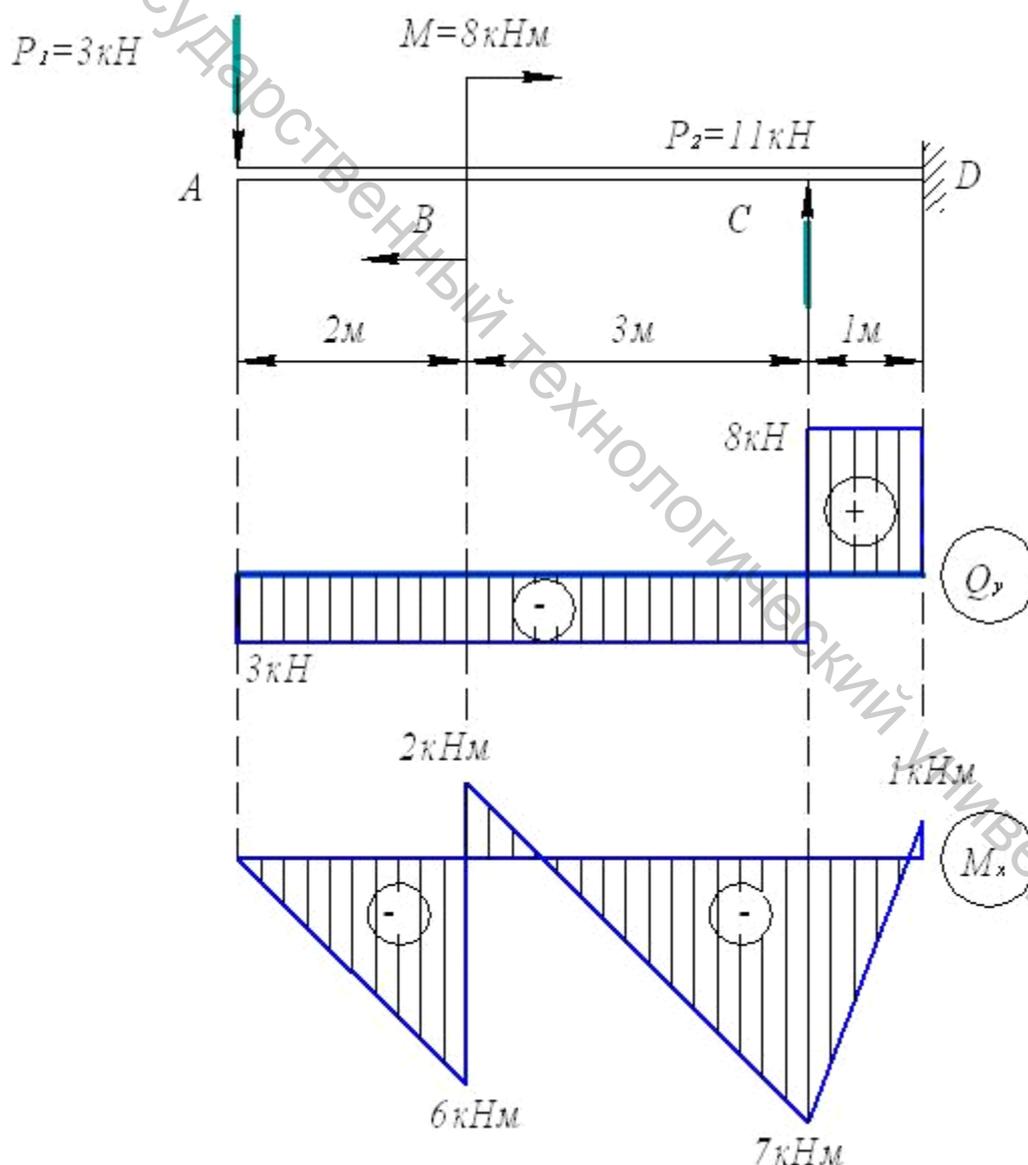


Рисунок 5.20 – Схема балки

По найденным значениям внутренних силовых факторов построить, соблюдая масштаб, эпюры $Q_y(z)$ и $M_x(z)$ и указать на них характерные ординаты с единицами измерения

Решение:

Консоль состоит из трех участков AB , BC и CD .

Ни на одном из участков нет распределенной нагрузки. Значит, вдоль каждого из участков поперечная сила не меняет своего значения, а изгибающий момент меняется по линейному закону.

К сечению D приложена неизвестная реакция заделки, тогда как слева от любого сечения нагрузка известна. Поэтому будем находить поперечные силы и изгибающие моменты в граничных сечениях по нагрузке, приложенной к левой (отсеченной) части консоли.

Участок AB .

$$Q_{yA} = -P_1 = -3 \text{ кН}; \quad Q_{yB} = -3 \text{ кН.}$$

$$M_{xA} = -P \cdot 0 = 0; \quad M_{xB} = -3 \cdot 2 = -6 \text{ кНм.}$$

Участок BC .

$$Q_{yB} = -3 \text{ кН}; \quad Q_{yC} = -3 \text{ кН.}$$

$$M_{xB} = -3 \cdot 2 + 8 = 2 \text{ кНм}; \quad M_{xC} = -3 \cdot 5 + 8 = -7 \text{ кНм.}$$

Участок CD .

$$Q_{yC} = -3 + 11 = 8 \text{ кН}; \quad Q_{yD} = 8 \text{ кН.}$$

$$M_{xC} = -3 \cdot 5 + 8 = -7 \text{ кНм}; \quad M_{xD} = -3 \cdot 6 + 8 + 11 \cdot 1 = 1 \text{ кНм.}$$

По результатам вычислений строим эпюры Q_y и M_x .

Заметим, что на участках AB и BC поперечная сила имеет равные значения. На этих участках эпюра изгибающего момента M_x представлена параллельными линиями.

На участке CD $Q_y > 0$, здесь изгибающий момент возрастает.

В сечении C поперечная сила меняется скачкообразно от -3 кН до 8 кН, то есть на величину силы $P_2 = 11$ кН.

В сечении B изгибающий момент меняется скачкообразно от -6 кНм до 2 кНм, то есть на величину момента $M = 8$ кНм.

Пример № 5 б

Балка AD нагружена распределенной нагрузкой интенсивностью $q = 4$ кН/м, сосредоточенной силой $P = 3$ кН и парой сил, приложенной к сечению B (рисунок 5.21). Поскольку момент пары сил полностью определяет ее действие на балку, то можно изобразить ее дуговой стрелкой, указав направление действия и численное значение момента.

Требуется:

1. Определить реакции опор.
2. Найти значения поперечной силы и изгибающего момента в сечениях, примыкающих к границам участков.

3. На участке с распределенной нагрузкой определить положение сечения, в котором поперечная сила равна нулю.

4. Определить значение изгибающего момента в этом сечении.

5. По найденным значениям поперечной силы и изгибающего момента построить эпюры Q_y и M_x и указать на них характерные ординаты.

Решение:

Равнодействующая распределенной нагрузки:

$$R = q \cdot AB = 4 \cdot 6 = 24 \text{ кН.}$$

Линия действия равнодействующей проходит через середину участка AB и удалена от опоры A на 3 м и от опоры C – на 5 м.

Уравнения равновесия:

$$\sum m_A = 0 \quad Y_C \cdot 2 + 6 - P \cdot 3 + 2 + 6 - M - R \cdot 3 = 0, \text{ или}$$

$$8Y_C - 3 \cdot 11 - 31 - 24 \cdot 3 = 0.$$

$$\sum m_C = 0 \quad -Y_A \cdot 2 + 6 + R \cdot 5 - M - P \cdot 3 = 0, \text{ или}$$

$$-8Y_A + 24 \cdot 5 - 31 - 3 \cdot 3 = 0.$$

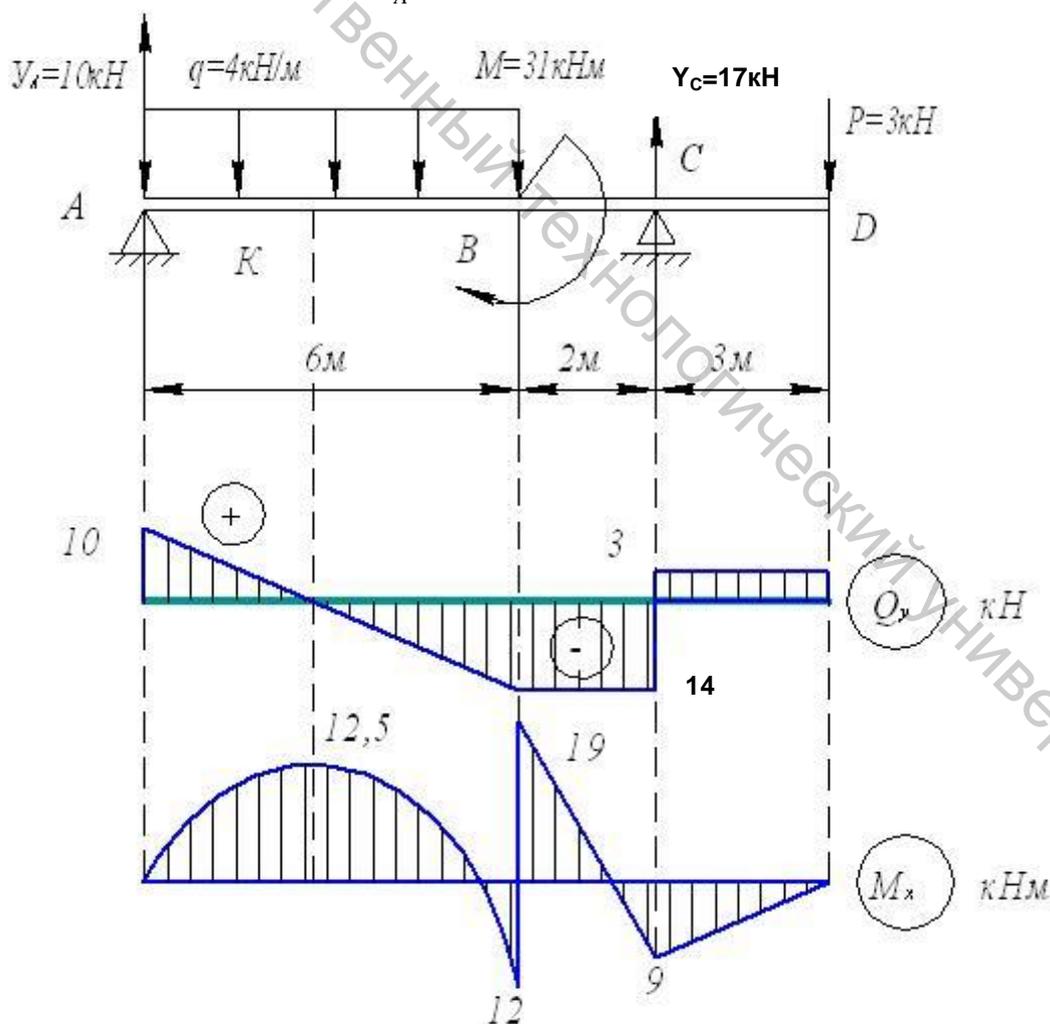


Рисунок 5.21 – Схема балки с эпюрами

Решение уравнений:

$$Y_A = 10 \text{ кН}, \quad Y_C = 17 \text{ кН}.$$

Поперечные силы:

На участке AB поперечная сила меняется по линейному закону.

$$Q_{yA} = Y_A = 10 \text{ кН}. \quad Q_{yB} = Y_A - q \cdot AB = 10 - 4 \cdot 6 = -14 \text{ кН}.$$

На границе участков AB и BC нет сосредоточенной силы. Значит, вдоль всего участка BC $Q_y = -14$ кН. При переходе через сечение C поперечная сила увеличится на величину силы Y_C . То есть на участке CD

$$Q_y = -14 + 17 = 3 \text{ кН}.$$

Это значение поперечной силы можно найти и по нагрузке справа от сечения участка CD с учетом правила знаков.

Изгибающие моменты:

$$M_{xA} = 0; \quad M_{xB} = Y_A \cdot AB - q \cdot AB \cdot \frac{AB}{2} = 10 \cdot 6 - 4 \cdot 6 \cdot \frac{6}{2} = -12 \text{ кНм}.$$

Положение сечения K найдем из условия $Q_{yK} = 0$.

$$Q_{yK} = Q_{yA} - q \cdot AK. \quad AK = \frac{Q_{yA}}{q} = \frac{10}{4} = 2,5 \text{ м}.$$

$$M_{xK} = Y_A \cdot AK - q \cdot AK \cdot \frac{AK}{2} = 10 \cdot 2,5 - 4 \cdot 2,5 \cdot \frac{2,5}{2} = 12,5 \text{ кНм}.$$

Эпюра M_x на участке AB представляется параболой, проходящей через точки $(0, 0)$, $(2,5; 12,5)$ и $(6, -12)$.

При переходе через сечение B изгибающий момент меняется скачкообразно и в сечении B участка BC принимает значение

$$M_B = -12 + 31 = 19 \text{ кНм}.$$

В сечении C изгибающий момент непрерывен, и его удобнее найти по нагрузке справа.

$$M_C = -P \cdot DC = -3 \cdot 3 = -9 \text{ кНм}.$$

После построения эпюр Q_y и M_x следует проверить, соответствуют ли они друг другу с учетом закономерностей, отмеченных ранее. Так, на участках AK и CD $Q_y > 0$ и изгибающий момент возрастает при обходе балки слева направо. На участках KB и BC $Q_y < 0$ и изгибающий момент при таком же обходе балки убывает.

5.7 Эпюры внутренних силовых факторов в сечении рамы

В поперечных сечениях стержней, составляющих раму, кроме поперечных сил и изгибающих моментов, обычно действуют и продольные силы N_z . Поэтому для рамы необходимо построить эпюры Q_y , M_x , N_z .

При построении эпюр каждый стержень рамы следует рассматривать как отдельную балку, учитывая все силы, приложенные к раме по одну сторону от сечения.

Для поперечной силы и изгибающего момента сохраняются правила знаков, принятые для балки. При этом на вертикальные стержни рамы следует смотреть как на размерную линию. То есть "верх" для нее расположен слева, а "низ" – справа. Продольная сила считается положительной при растяжении стержня и отрицательной – при сжатии.

Эпюры внутренних силовых факторов для рам строятся на базисе, совпадающем по форме с осью рамы. Значения поперечной силы и изгибающего момента откладываются от базиса по перпендикуляру по тем же правилам, что и для балок. Значения продольной силы можно откладывать по перпендикуляру от базиса в любую сторону, указав ее знак.

Пример 5 в

На рисунке 5.22 изображена рама, состоящая из двух частей, соединенных шарниром.

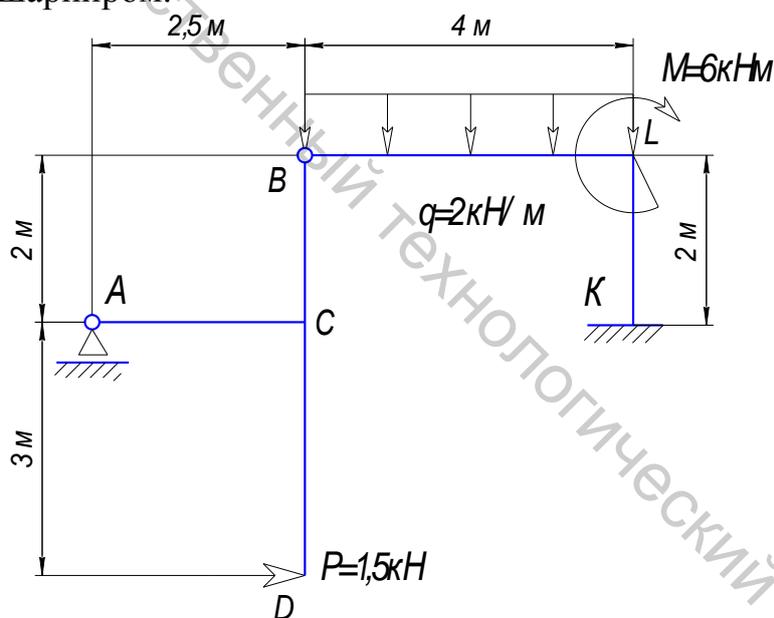


Рисунок 5.22 – Рама

Изобразим отдельные части рамы и покажем приложенные к ним силы (рисунок 5.23).

Для определения реакции шарнирно подвижной опоры A составим уравнение моментов относительно оси шарнира B .

$$\sum m_B = 0. \quad P \cdot BD - Y_A \cdot AC = 0, \text{ или } 1,5 \cdot 5 - Y_A \cdot 2,5 = 0. \quad Y_A = 3 \text{ кН.}$$

По уравнениям проекций на горизонтальную и вертикальную ось найдем:

$$X_B = 1,5 \text{ кН и } Y_B = 3 \text{ кН.}$$

Найденные силы X_B и Y_B выражают действие правой части конструкции на левую. Значит действие левой части конструкции на правую выражается силами

$$X'_B = 1,5 \text{ кН и } Y'_B = 3 \text{ кН.}$$

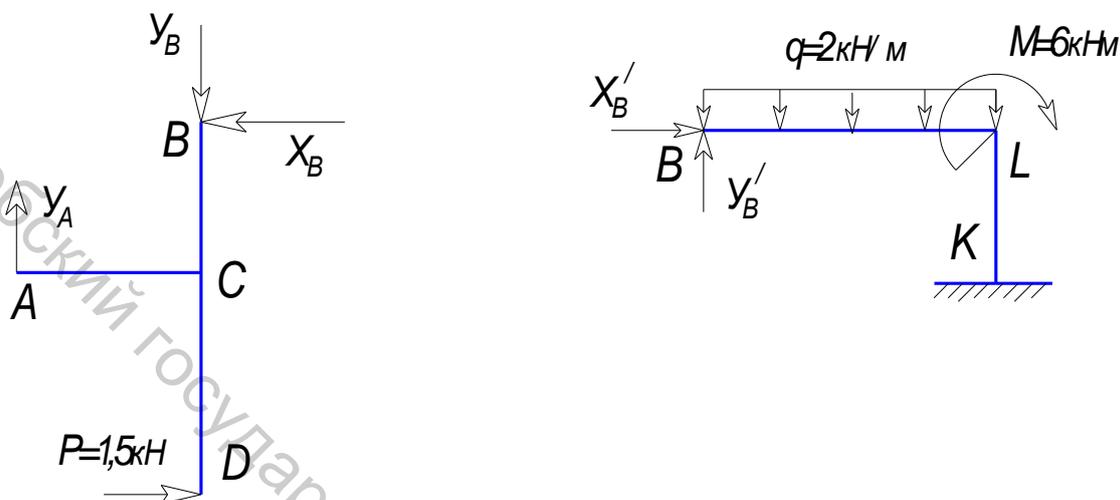


Рисунок 5.23 – Отдельные части рамы

Теперь можно приступать к построению эпюр.

Участок BL нагружен равномерно распределенной нагрузкой. Значит вдоль этого участка поперечная сила меняется, по линейному закону, а изгибающий момент по закону параболы. Вдоль остальных участков поперечные силы неизменны, а изгибающие моменты меняются линейно.

Участок AC :

$$Q_y = Y_A = 3 \text{ кН}; \quad M_A = 0, \quad M_C = Y_A \cdot AC = 3 \cdot 2,5 = 7,5 \text{ кНм.}$$

Участок CD :

$$Q_y = -P = -15 \text{ кН}; \quad M_D = 0, \quad M_C = -P \cdot DC = -1,5 \cdot 3 = -4,5 \text{ кНм.}$$

Участок CB :

$$Q_y = -P = -15 \text{ кН}; \quad M_B = 0, \text{ (сечение В примыкает к шарниру)}$$

$$M_C = X_B \cdot BC = 1,5 \cdot 2 = 3 \text{ кНм.}$$

Участок BL :

$$Q_{yB} = Y'_B = 3 \text{ кН}; \quad Q_{yL} = Y'_B - qBL = 3 - 2 \cdot 4 = -5 \text{ кН}, \quad M_B = 0,$$

$$M_L = Y'_B \cdot BL - qBL \cdot \frac{BL}{2} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} = -4 \text{ кНм.}$$

Участок LK :

$$Q_K = X'_B = 1,5 \text{ кН};$$

$$M_L = -Y'_B \cdot BL + qBL \cdot \frac{BL}{2} = -3 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} - 6 = -2 \text{ кНм,}$$

$$M_K = -Y'_B \cdot BL + qBL \cdot \frac{BL}{2} - X'_B \cdot LK - M = -3 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} - 1,5 \cdot 2 - 6 = -5 \text{ кНм.}$$

Построив эпюру поперечной силы (рисунок 5.24), найдем сечение стержня BL , в котором поперечная сила равна нулю. Его положение определим расстоянием z_1 . На основании формулы (5.6)

$$z_1 = \frac{Q_B}{q} = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ м.}$$

Изгибающий момент в этом сечении

$$\max M_x = Y'_B \cdot z_1 - qz_1 \frac{z_1}{2} = 3 \cdot 1,5 - 2 \cdot 1,5 \frac{1,5}{2} = 2,25 \text{ кНм.}$$

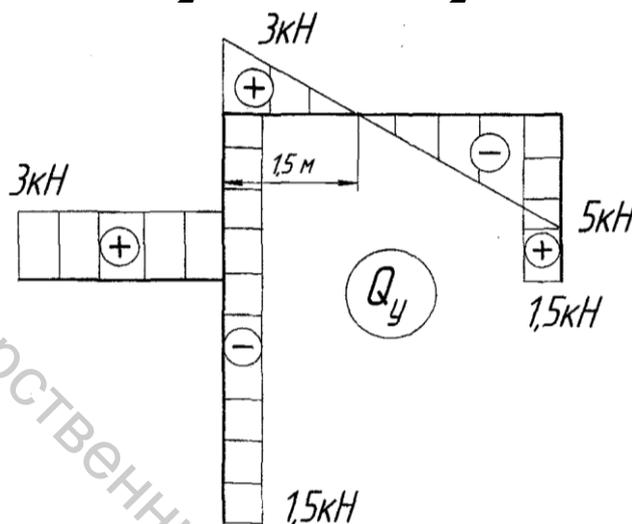


Рисунок 5.24 – Эпюра поперечной силы

На рисунке 5.25 изображена эпюра M_x , построенная по результатам вычислений.

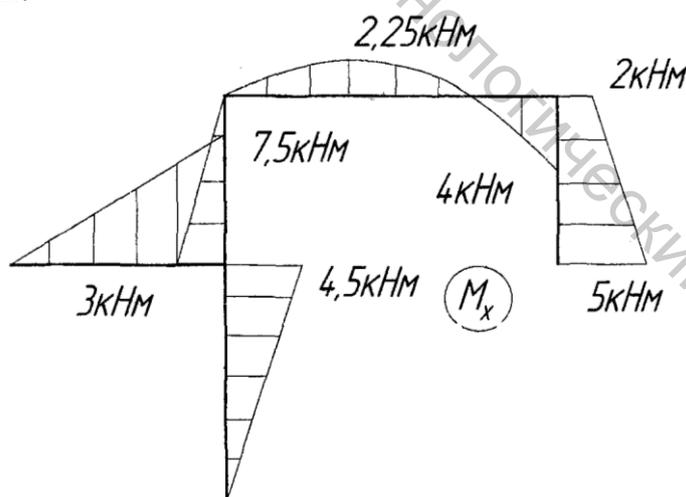


Рисунок 5.25 – Эпюра изгибающего момента

Продольная сила.

Участки AC и DC от продольных нагрузок свободны, а участок CB сжимается силами Y_A и Y_B . Так что продольная сила определяется или силой Y_A , или силой Y_B .

$$N_z = -Y_A = -Y_B = -3 \text{ кН.}$$

Участок BL сжимается силой X'_B .

$$N_z = -X'_B = -1,5 \text{ кН.}$$

Участок LK растягивается силой Y'_B и сжимается распределенной нагрузкой.

Эпюра продольной силы изображена на рисунке 5.26.

Для статической проверки вырежем узел C и изобразим силовые факторы в примыкающих к нему сечениях (рисунок 5.27).

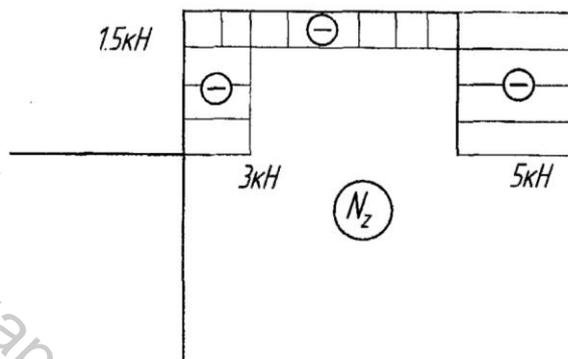


Рисунок 5.26 – Эпюра продольной силы

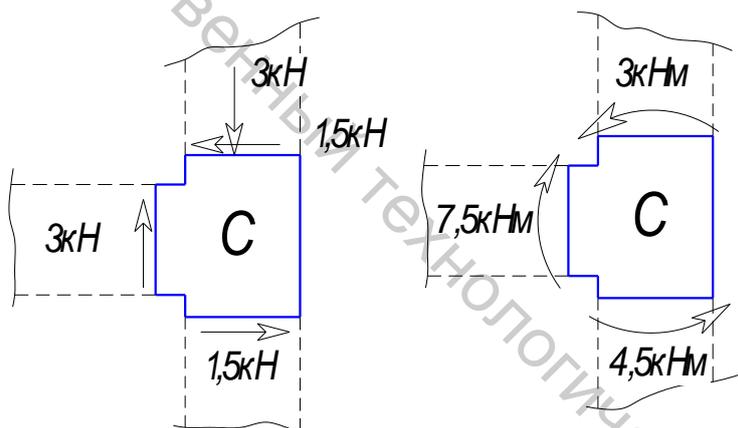


Рисунок 5.27 – Силовые факторы в сечениях, примыкающих к узлу C

5.8 Нормальные напряжения при изгибе

Рассмотрим изгиб, при котором отличным от нуля будет лишь изгибающий момент M_x . Такой изгиб называется *чистым*. При отсутствии поперечной силы естественно допустить, что касательные напряжения в поперечном сечении равны нулю и продольные слои бруса испытывают лишь растяжение или сжатие, вследствие чего в поперечном сечении действуют нормальные напряжения. На рисунке 5.28 изображено сечение, на элемент которого действует нормальная сила σdA .

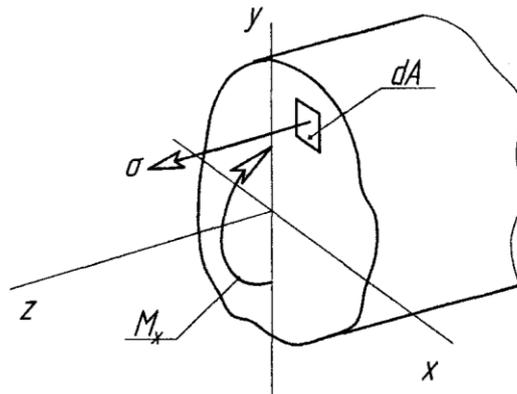


Рисунок 5.28 – Чистый изгиб

По определению изгибающего момента как главного момента внутренних сил относительно поперечной оси

$$M_x = -\int_A \sigma y dA, \quad M_y = -\int_A \sigma x dA. \quad (5.7)$$

По определению продольной силы как продольной составляющей главного вектора внутренних сил

$$N_z = \int_A \sigma dA.$$

При прямом чистом изгибе $N_z = 0$, $M_y = 0$.

Получаются три уравнения:

$$\int_A \sigma dA = 0; \quad \int_A \sigma x dA = 0, \quad \int_A \sigma y dA = -M_x, \quad (5.8)$$

которых, однако, недостаточно для определения напряжения σ . Необходим закон распределения нормальной силы σdA по сечению. Для определения его введем допущения.

А. Продольные слои не надавливают друг на друга.

Б. Сечения плоские, перпендикулярные продольной оси бруса до приложения нагрузки остаются таковыми и после приложения нагрузки (гипотеза плоских сечений).

В. Справедлив закон Гука.

Поскольку продольная сила равна нулю, то в поперечном сечении действуют и положительные напряжения и отрицательные. Значит одни продольные слои удлиняются, другие укорачиваются и существует слой, длина которого остается неизменной. Этот слой называется нейтральным. В деформированном состоянии он образует некоторую цилиндрическую поверхность.

На рисунке 5.29 изображен элемент бруса до деформации. Все слои его имеют одинаковую длину dz . Рядом изображен деформированный элемент. Длина искривленного нейтрального слоя $dz = p d\Theta$. Длина расположенного выше слоя $dz' = p - y d\Theta$.

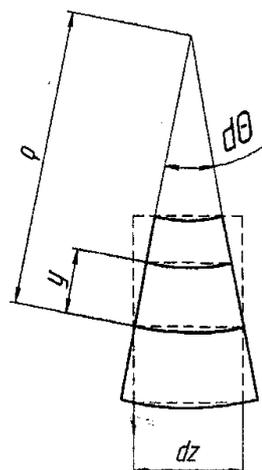
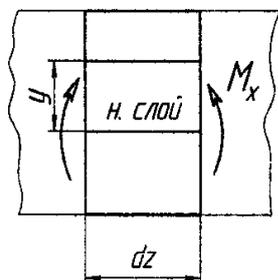


Рисунок 5.29 – Элемент бруса до и после деформации

Относительное удлинение его:

$$\varepsilon = \frac{dz' - dz}{dz} = \frac{\rho - y}{\rho} \frac{d\Theta}{dz} = -\frac{y}{\rho} \frac{d\Theta}{dz}$$

Нормальное напряжение:

$$\sigma = \varepsilon E = -E \frac{y}{\rho} \frac{d\Theta}{dz} \quad (5.9)$$

Подстановкой выражения (5.9) в уравнения (5.8) получим:

$$\begin{aligned} -\frac{E}{\rho} \int y dA &= 0, \text{ то есть } S_x = 0. \\ -\frac{E}{\rho} \int xy dA &= 0, \text{ то есть } I_{xy} = 0. \\ -\frac{E}{\rho} \int y^2 dA &= -M_x, \text{ то есть } \frac{E}{\rho} = \frac{M_x}{I_x}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Полученные результаты говорят о следующем:

1. Нейтральный слой пересекает сечение по центральной оси.
2. Для того чтобы изгиб был прямым, необходимо, чтобы силовая плоскость проходила через главную ось инерции сечения.
3. Подстановкой выражения (5.10) в формулу (5.9) получаем формулу для вычисления напряжения:

$$\sigma = -\frac{M_x}{I_x} y. \quad (5.11)$$

Линия, в точках которой напряжения равны нулю ($y = 0$), совпадает с осью x и называется *нейтральной линией*.

Наибольшее по модулю напряжение возникает в точках наиболее удаленных от нейтральной линии, то есть при $y = |y|_{\max}$.

$$\max|\sigma| = \frac{|M_x|}{I_x} |y|_{\max},$$

или

$$\max|\sigma| = \frac{M_x}{W_x}. \quad (5.12)$$

В формуле (5.12) M_x – абсолютное значение изгибающего момента, W_x – момент сопротивления сечения при изгибе, равный:

$$W_x = \frac{I_x}{|y|_{\max}}. \quad (5.13)$$

Формула (5.12) используется при расчете на прочность при изгибе бруса одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию. Условие прочности записывается в виде

$$\max \sigma = \frac{M_x}{W_x} \leq \sigma.$$

Момент сопротивления W_x является геометрической характеристикой прочности сечения бруса при изгибе.

Приведем формулы моментов сопротивления некоторых сечений.

А. Круг

$$W_x = W_y = \frac{\pi d^3}{32}.$$

Б. Кольцо

$$W_x = W_y = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4), \quad \alpha = \frac{d}{D}.$$

В. Прямоугольник (рисунок 5.30, а).

$$W_x = \frac{ac^2}{6}, \quad W_y = \frac{ca^2}{6}.$$

Г. Равнобедренный треугольник (рисунок 5.30 в).

$$W_x = \frac{ac^2}{24}, \quad W_y = \frac{ca^2}{24}.$$

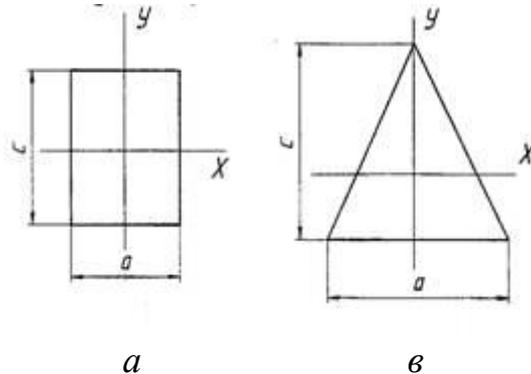


Рисунок 5.30 – Сечения бруса

Для вычисления напряжения при косом изгибе можно использовать формулу (5.11). Но для этого косою изгиб следует привести к двум

прямым изгибам, разложив нагрузку на составляющие, вызывающие изгиб в главных плоскостях инерции бруса. Тогда нормальное напряжение представляется алгебраической суммой напряжений:

$$\sigma = -\frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x. \quad (5.14)$$

Первое слагаемое формулы (5.14) имеет смысл напряжения, вызванного изгибающим моментом M_x . Оно принимает наибольшее значение в точках, наиболее удаленных от главной оси x .

$$\max \sigma M_x = \frac{M_x}{W_x}. \quad (5.15)$$

Второе слагаемое формулы (5.14) – это напряжение, вызванное изгибающим моментом M_y . Оно принимает наибольшее значение в точках, наиболее удаленных от главной оси y .

$$\max \sigma M_y = \frac{M_y}{W_y}. \quad (5.16)$$

В формулах (5.15) и (5.16) подставляются модули изгибающих моментов и вычисляются абсолютные значения напряжений.

Если сечение бруса таково, что существует точка, наиболее удаленная как от оси x , так и от оси y , то напряжение в ней представляется суммой:

$$\max \sigma = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}. \quad (5.17)$$

Конечно, в этой точке оба напряжения должны быть одного знака.

Таковыми точками являются угловые точки прямоугольного сечения и сечения типа швеллера или двутавра.

Формула (5.17) неприменима в случае круглого сечения, так как наибольшие нормальные напряжения, вызываемые изгибающими моментами M_x и M_y , действуют в разных точках. Поэтому сумма (5.17) не имеет физического смысла. Но любая центральная ось круглого сечения является главной. Значит, наибольшее нормальное напряжение действует в точке контура круглого сечения и определяется по формуле

$$\max |\sigma| = \frac{M_{изг}}{W_x}. \quad (5.18)$$

В формуле (5.18) $M_{изг}$ – изгибающий момент, равный геометрической сумме моментов M_x и M_y . То есть

$$M_{изг} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}. \quad (5.19)$$

С учетом продольной силы

$$\max |\sigma| = \frac{M_{изг}}{W_x} + \frac{|N_z|}{A}. \quad (5.20)$$

6 Расчет пространственной рамы

6.1 Построение эпюр внутренних силовых факторов в сечениях пространственной рамы

В поперечных сечениях элементов пространственной рамы могут оказаться не равными нулю все шесть внутренних силовых факторов. Если сечение не является тонкостенным, то напряжения, вызванные поперечными силами, оказывают незначительное влияние на прочность бруса. Поэтому можно ограничиться построением лишь четырех эпюр: продольной силы N_z , крутящего момента M_z и изгибающих моментов M_x и M_y .

Эпюры продольной силы и крутящего момента строятся в аксонометрии в любой плоскости, проходящей через базис, с указанием знака продольной силы и направления крутящего момента. Эпюра изгибающего момента изображается в плоскости его действия. Значения изгибающего момента откладываются от базиса по перпендикуляру на сжатой стороне бруса.

При построении эпюр достаточно найти значения внутренних силовых факторов в характерных сечениях, то есть на границах участков, и учесть их известные свойства.

Пример 6

На рисунке 6.1 изображена пространственная рама, нагруженная тремя сосредоточенными силами и парой сил, действующей в горизонтальной плоскости.

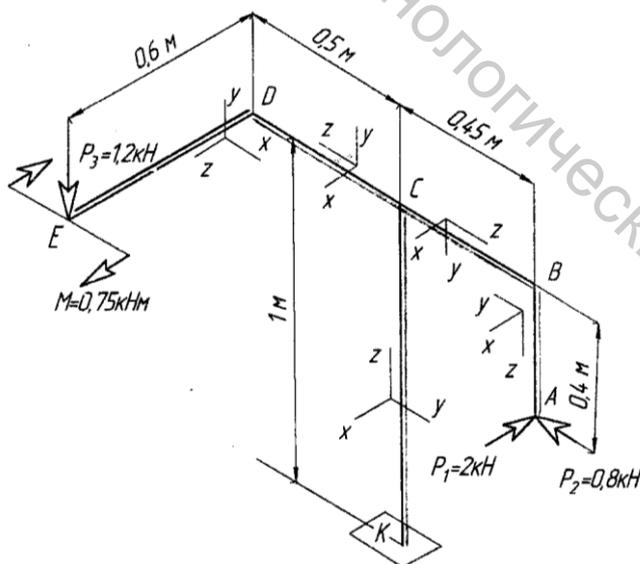


Рисунок 6.1 – Пространственная рама

Построение эпюр:

Для удобства построения эпюр целесообразно ввести скользящую систему координат. Ось z совпадает с продольной осью элемента рамы, оси x и y совмещены с главными центральными осями сечения стержня.

Сначала строим такую систему для стержня CK . Она изображена сбоку, возле стержня, но следует помнить, что ось z совпадает с линией $KС$. Доводим эту систему до сечения C и для перехода к участку CD поворачиваем ее так, чтобы ось z стала продольной для участка CD и была направлена к незакрепленной отсеченной части рамы, то есть влево. Поворот осуществляется вокруг оси, перпендикулярной стержням CK и CD , то есть вокруг оси x . Переход к стержню DE производится поворотом системы вокруг оси y , так как эта ось перпендикулярна плоскости стержней CD и DE .

При переходе от стержня $KС$ к стержню CB ось z направляется вправо с поворотом координатной системы стержня $KС$ вокруг оси x . Ось x сохраняется и при переходе к стержню BA .

Продольная сила и изгибающие моменты вызывают в поперечном сечении нормальные напряжения, а крутящий момент – касательные. В результате материал бруса находится в сложном напряженном состоянии.

Для анализа сложного напряженного состояния необходимо найти напряжения от каждого внутреннего силового фактора.

Продольные силы (рисунок 6.2)

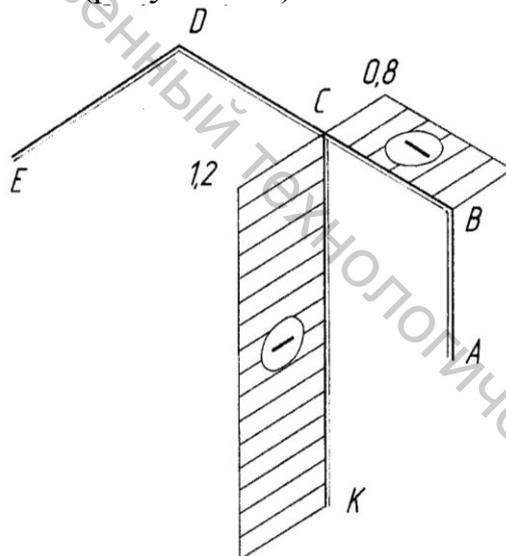


Рисунок 6.2 – Эпюра продольной силы

Обходим раму от сечения A до сечения C . Участок AB свободен от продольной нагрузки, так как силы P_1 и P_2 перпендикулярны оси z этого участка. Участок BC сжат силой P_2 . Рассекая участки ED и DC , замечаем, что приложенная к отсеченной свободной части сила P_3 перпендикулярна оси z . Значит продольная сила на этих участках равна нулю. Сила P_3 параллельна продольной оси участка CK . Она вызывает его сжатие. Эпюра продольной силы показана на рисунке.

Прежде, чем приступить к вычислению крутящих и изгибающих моментов, заметим следующее:

1. Момент силы относительно оси равен нулю, если сила пересекает ось или ей параллельна. То есть если линия действия силы и ось расположены в одной плоскости.
2. Алгебраическая сумма моментов сил пары относительно оси, перпендикулярной плоскости действия пары, равна моменту пары.
3. Алгебраическая сумма моментов сил пары относительно оси параллельной плоскости действия пары равна нулю.

Крутящий момент (рисунок 6.3)

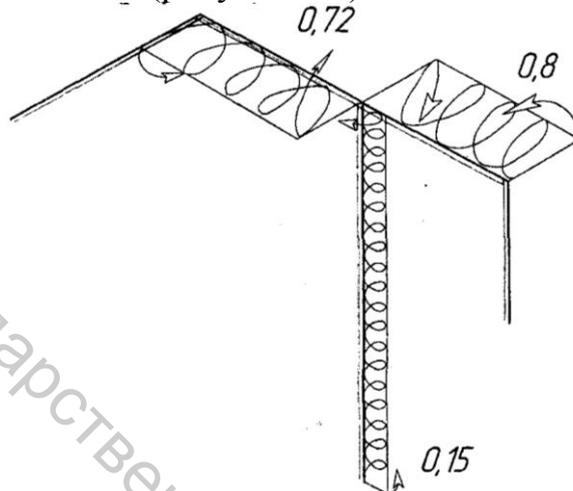


Рисунок 6.3 – Эпюра крутящего момента

На основании первого замечания заключаем, что крутящий момент на участке AB равен нулю (силы P_1 и P_2 пересекают ось z). На участке ED крутящий момент также равен нулю (сила P_3 пересекает ось z , плоскость пары параллельна оси z).

На участке BC крутящий момент создается силой P_1 . Плечо силы – AB . Значит:

$$M_z = P_1 \cdot AB = 2 \cdot 0,40 = 0,8 \text{ кНм.}$$

Участок CD закручивается силой P_3 , момент которой равен:

$$M_z = P_3 \cdot DE = 1,2 \cdot 0,6 = 0,72 \text{ кНм.}$$

На участке CK крутящий момент зависит от силы P_1 (плечо – BC) и от пары $M = 0,75$ кНм.

Продольная ось участка CK перпендикулярна плоскости действия пары M (замечание 2) и удалена от линии действия силы P_1 на расстояние $CB = 0,45$ м. Силы P_2 и P_3 не вызывают деформации кручения участка CK (сила P_2 пересекает ось z). Направления моментов пары M и силы P_1 противоположны. Значит

$$M_z = P_1 \cdot CB - M = 2 \cdot 0,45 - 0,75 = 0,15 \text{ кНм.}$$

Эпюра крутящего момента показана на рисунке 6.3. Здесь показаны и направления моментов, приложенных к граничным сечениям участков.

Изгибающий момент M_x (рисунок 6.4)

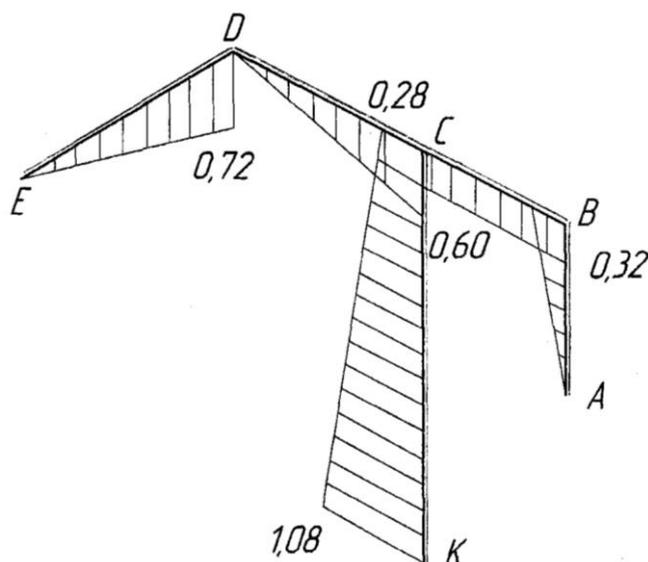


Рисунок 6.4 – Эпюра изгибающего момента M_x

Если рассечь в любом месте стержень AB или стержень BC , то к отсеченной свободной части рамы будут приложены две силы – P_1 и P_2 . Сила P_1 параллельна оси x стержней AB и BC . Значит на величину изгибающего момента M_x она не влияет. Сила P_2 перпендикулярна оси x . Она и создает момент M_x , который действует в вертикальной плоскости yz . В этой плоскости изображается эпюра M_x участка AB . Плечо силы P_2 в сечении A равно нулю, а в сечении B равно AB . Значит

$$M_{xA} = 0, \quad M_{xB} = P_2 \cdot AB = 0,8 \cdot 0,4 = 0,32 \text{ кНм.}$$

Сжаты нижние слои стержня.

При переходе к участку BC направление оси x не меняется. Значит для момента M_x справедливо правило раствора циркуля. Так как плечо силы P_2 на этом участке рамы не меняется, то во всех сечениях стержня BC $M_x = 0,32$ кНм.

К отсеченной свободной части стержня ED приложены сила P_3 и пара сил, момент которой $M = 0,75$ кНм. Плоскость действия пары проходит через оси x стержней ED и DC . Значит она не влияет на изгибающий момент M_x этих стержней. Момент M_x в сечениях стержней ED и DC вызывается силой P_3 . Он действует в вертикальной плоскости и увеличивается от сечения E к сечению D .

$$M_{xE} = 0, \quad M_{xD} = P_3 \cdot ED = 1,2 \cdot 0,6 = 1,72 \text{ кНм.}$$

При переходе от стержня ED к стержню DC направление оси x не сохранилось. Значит правило раствора циркуля для момента M_x здесь неприменимо. На участке DC плечо силы P_3 меняется от нуля (в сечении D) до $0,5$ м (в сечении C).

$$M_{xD} = 0, \quad M_{xC} = P_3 \cdot DE = 1,2 \cdot 0,5 = 0,6 \text{ кНм.}$$

На участке CK изгибающий момент M_x вызывается силами P_2 и P_3 . Сила P_1 параллельна оси x этого участка, а пара сил M действует в

плоскости $xу$. Значит на величину момента M_x участка $СК$ сила P_1 и пара M не влияют.

Плечо силы P_3 остается неизменным для всех сечений стержня $СК$ и равно $0,5$ м. Значит момент M_x от силы P_3 равен:

$$P_3 \cdot CD = 1,2 \cdot 0,5 = 0,6 \text{ кНм.}$$

Этот момент вызывает сжатие левых слоев.

Плечо силы P_2 меняется с переходом от сечения $С$ к сечению $К$. В сечении $С$ плечо силы P_2 равно AB .

$$M_{xС} = P_2 \cdot AB = 0,8 \cdot 0,4 = 0,32 \text{ кНм.}$$

Направление этого момента совпадает с направлением хода часовой стрелки. Значит, действуя на стержень $СК$ сверху, он вызывает сжатие правых слоев.

С учетом момента силы P_3 получим:

$$M_{xС} = M_{xС} P_3 + M_{xС} P_2 = 0,6 - 0,32 = 0,28 \text{ кНм.}$$

Плечо силы P_2 в сечении $К$ равно $КС - AB = 1 - 0,4 = 0,6$ м. Направление момента силы P_2 относительно оси x этого сечения совпадает с направлением момента силы P_3 .

$$M_{xК} = M_{xК} P_3 + M_{xК} P_2 = 0,6 + 0,8 \cdot 0,6 = 1,08 \text{ кНм.}$$

Сжаты левые слои.

Изгибающий момент M_y (рисунок 6.5)

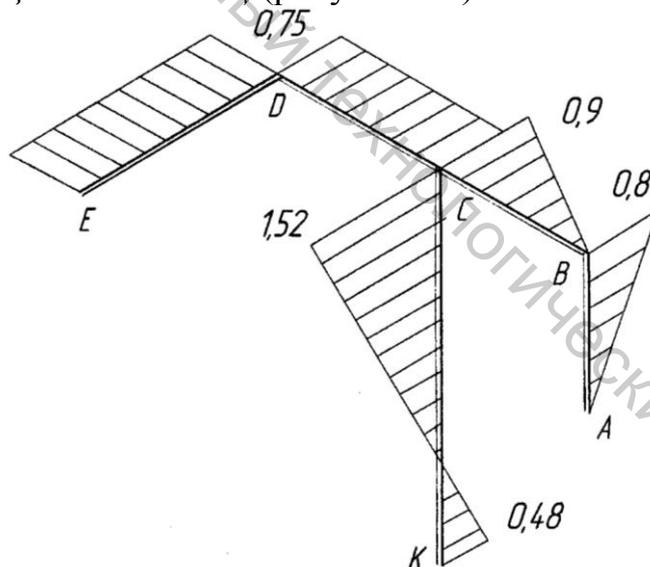


Рисунок 6.5 – Эпюра изгибающего момента M_y

На участке AB изгибающий момент M_y вызывается силой P_1 . Плечо ее меняется вдоль этого участка от нуля до $0,4$ метра. Значит

$$M_{yA} = 0, \quad M_{yB} = P_1 \cdot AB = 2 \cdot 0,4 = 0,8 \text{ кНм.}$$

Этот момент действует в плоскости zx . В этой плоскости и изображена эпюра M_y .

При переходе к участку BC направление оси y изменилось, следовательно правило раствора циркуля для момента M_y неприменимо.

Ось y любого сечения этого участка пересекает силу P_2 . Значит момент M_y силы P_2 равен нулю. Момент M_y силы P_1 меняется вдоль стержня BC , так как меняется ее плечо от нуля до 0,45 м. Таким образом,

$$M_{yB} = 0, \quad M_{yC} = P_1 \cdot BC = 2 \cdot 0,45 = 0,9 \text{ кНм.}$$

Ось y участков ED и DC параллельна силе P_3 . Значит сила P_3 на изгибающий момент M_y этих участков не влияет. По отмеченным выше свойствам пары сил изгибающий момент M_y на участках ED и DC равен моменту приложенной к сечению E пары. То есть во всех сечениях этих участков

$$M_y = M = 0,75 \text{ кНм.}$$

Изгибающий момент M_y в сечениях стержня CK вызывается силами P_1 и P_3 (сила P_2 и плоскость пары M параллельны оси y). Направления моментов силы P_1 (плечо AB) и силы P_3 (плечо ED) относительно оси y сечения C совпадают. Значит

$$M_{yC} = P_1 \cdot AB + P_3 \cdot ED = 2 \cdot 0,4 + 1,2 \cdot 0,6 = 1,52 \text{ кНм.}$$

В сечении K изгибающий момент M_y равен разности моментов сил P_1 и P_3 , так как направление момента силы P_3 так же, как и плечо ее, осталось неизменными, а направление момента силы P_1 изменилось на противоположное. Плечо ее теперь равно $1 - 0,4 = 0,6$ м.

$$M_{yK} = -P_3 \cdot P_1 - ED \cdot KL = 2 \cdot 0,6 - 1,2 \cdot 0,6 = 0,48 \text{ кНм.}$$

Продольная сила и изгибающие моменты вызывают в поперечном сечении нормальные напряжения, а крутящий момент – касательные. В результате материал бруса находится в сложном напряженном состоянии.

Поскольку оси x и y взаимно перпендикулярны, то эпюры изгибающих моментов M_x и M_y на каждом участке рамы должны быть расположены во взаимно перпендикулярных плоскостях. Эпюра M_x – в плоскости yz , эпюра M_y – в плоскости xz .

Как видим, во многих сечениях стержней пространственной рамы одновременно не равны нулю несколько внутренних силовых факторов (M_x, M_y, M_z, N_z).

6.2 Напряженное состояние

Напряженное состояние в точке тела, нагруженного произвольной уравновешенной нагрузкой, определяется нормальными и касательными напряжениями на трех взаимно перпендикулярных гранях элементарного параллелепипеда (рисунок 6.6). Система девяти напряжений, сведенных в таблицу (6.1), образует тензор напряжений. Поскольку выделенный элемент находится в состоянии равновесия, то компоненты тензора напряжений, характеризуя действие на элемент окружающей среды, являются взаимосвязанными величинами.

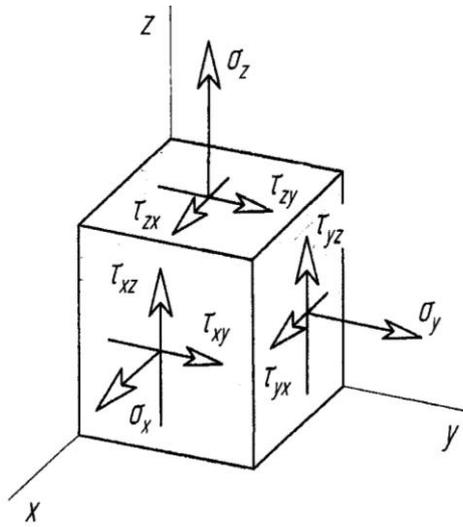


Рисунок 6.6 – Сложное напряженное состояние

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}, \quad (6.1)$$

Так, составив уравнение моментов относительно оси x_1 , получим равенство

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

Аналогично получают равенства

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} \text{ и } \tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

Эти соотношения выражают принцип парности касательных напряжений

Касательные напряжения на двух взаимно перпендикулярных площадках, перпендикулярные общему ребру, численно равны и направлены оба либо к ребру, либо от ребра.

Таким образом, из девяти компонентов тензора (6.1) независимыми будут лишь шесть.

Если одна из граней напряженного элемента свободна от нагрузки, то получается более простое напряженное состояние, которое называется *плоским*, или *двуосным*.

Если свободны от нагрузки две грани элемента, то получается *линейное* напряженное состояние, или *одноосное*.

Примеры таких упрощенных состояний приведены на рисунке 6.7.

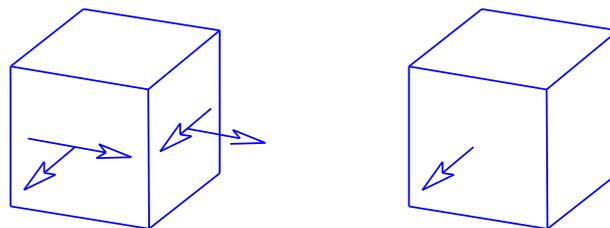


Рисунок 6.7 – Упрощенные напряженные состояния

При изменении ориентации напряженного элемента компоненты тензора (6.1), как напряжения на гранях параллелепипеда, изменяются. Само же напряженное состояние по своей природе от выбора координатной системы зависеть не может. Значит, напряженное состояние можно охарактеризовать величинами, не зависящими от координатных осей. Такими величинами являются *главные напряжения*.

Доказано, что при любой нагрузке всегда существует такое положение параллелепипеда, при котором на его гранях отсутствуют касательные напряжения. Эти грани называются *главными площадками*, а нормальные напряжения на них – *главными напряжениями*. Эти напряжения обозначаются индексами 1, 2 и 3. При этом принято, что

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3.$$

6.3 Гипотезы прочности

Напряженные состояния, определяемые различными главными напряжениями, могут иметь равные коэффициенты запаса. Такие напряженные состояния называются *равноопасными*.

Если одним из равноопасных состояний является одноосное растяжение, то главное напряжение σ_1 этого состояния называется *эквивалентным*.

Эквивалентное напряжение позволяет оценить сложное напряженное состояние, сравнивая его с результатами испытания материала при растяжении. Как выразить эквивалентное напряжение $\sigma_{\text{экв}}$ через напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ заданного напряженного состояния?

У равноопасных напряженных состояний должна быть общая причина разрушения или появления пластических деформаций. Значит должен быть какой-то параметр, выраженный через элементы напряженного состояния, который принимает для двух напряженных состояний близкие значения. Такой параметр называется *критерием прочности*.

Для материалов, используемых в машиностроении, наиболее распространенными критериями прочности являются наибольшее касательное напряжение и удельная потенциальная энергия изменения формы.

Первый критерий прочности был предложен Треска и использован затем Сен-Венаном как критерий пластичности. Гипотеза прочности, основанная на этом критерии, является третьей по порядку классической гипотезой и носит название Треска-Сен-Венана.

Удельная потенциальная энергия изменения формы, как критерий прочности, предложена Губером и независимо от него Мизесом. Гипотеза Губера-Мизеса является шестой по порядку классической гипотезой.

Наибольшее касательное напряжение в сложном напряженном состоянии равно:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

Удельная потенциальная энергия изменения формы

$$U_\phi = \frac{1+\mu}{3E} \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1 - \sigma_1\sigma_2.$$

При одноосном растяжении

$$\sigma_1 = \sigma_{\text{экв}}; \sigma_2 = 0; \sigma_3 = 0$$

и

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\text{экв}}}{2}, U_\phi = \frac{1+\mu}{3E} \cdot \sigma_{\text{экв}}^2.$$

Приравняв выражения критериев прочности для заданного и одноосного напряженных состояний, получим формулы для определения эквивалентного напряжения:

$$\sigma_{III} = \sigma_1 - \sigma_3, \quad (6.2)$$

$$\sigma_{VI} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2} \quad (6.3)$$

Для материалов, не одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, применяется гипотеза Мора, эквивалентное напряжение по которой определяется формулой

$$\sigma_{IV} = \sigma_1 - k\sigma_3. \quad (6.4)$$

Здесь k – отношение предельных напряжений при растяжении и сжатии:

$$k = \frac{\sigma_{Tp}}{\sigma_{Tc}}, \text{ или } k = \frac{\sigma_{вп}}{\sigma_{вс}}.$$

В случае упрощенного плоского напряженного состояния, изображенного на рисунке 6.7, главные напряжения определяются по кругу Мора (рисунок 6.8).

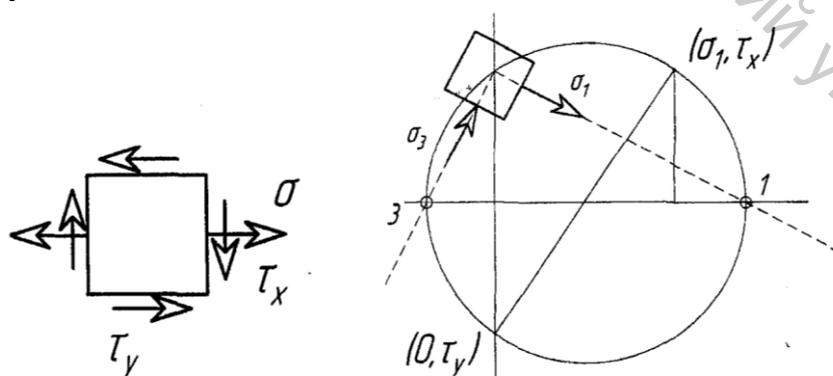


Рисунок 6.8 – Круг Мора

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}. \quad (6.5)$$

Подстановкой выражений (6.5) в формулы (6.2), (6.3) и (6.4) получим:

$$\begin{aligned}\sigma_{III} &= \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}; \quad \sigma_{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}; \\ \sigma_{IV} &= \frac{1-k}{2}\sigma + \frac{1+k}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.\end{aligned}\quad (6.6)$$

Именно такое упрощенное плоское напряженное состояние образуется в опасных точках стержней пространственной рамы. Изгибающие моменты и продольная сила вызывают в поперечном сечении стержня нормальные напряжения, а крутящий момент – касательные. При этом расчет на прочность стержня прямоугольного сечения существенно отличается от расчета круглого стержня.

Рассмотрим изгиб с кручением круглого бруса.

Как отмечалось ранее в п. 5.8, наибольшее нормальное напряжение, вызванное совместным действием изгибающих моментов M_x и M_y , возникают в точке контура сечения и определяется по формуле

$$\sigma = \frac{M_{изг}}{W_x} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W_x}.$$

Наибольшие касательные напряжения при кручении действуют во всех точках контура круглого сечения. В результате всегда имеется точка контура круглого сечения бруса, в которой при совместном действии изгибающих моментов M_x и M_y и крутящего момента M_z и нормальное напряжение и касательное принимают наибольшие значения. Эти напряжения образуют упрощенное плоское напряженное состояние, показанное на рисунке 6.8.

Воспользуемся гипотезой Треска-Сен-Венана и по формуле (6.6) получим:

$$\sigma_{III} = \sqrt{\frac{M_x^2 + M_y^2}{W_x^2} + 4\frac{M_z^2}{W_p^2}}.\quad (6.7)$$

Принимая во внимание формулы

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32}, \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16},$$

при подстановке $W_p = 2W_x$ преобразуем формулу (6.7) к виду:

$$\sigma_{III} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}}{W_x}.\quad (6.8)$$

Выражение, стоящее в числителе формулы (6.8), называется эквивалентным моментом по гипотезе Треска-Сен-Венана:

$$M_{III} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}.\quad (6.9)$$

По гипотезе Губера-Мизеса эквивалентный момент находится по формуле

$$M_{VI} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75M_z^2}. \quad (6.10)$$

Условие прочности круглого бруса при изгибе с кручением принимает вид:

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{M_{\text{экв}}}{W_x} \leq \sigma. \quad (6.11)$$

Формула (6.11) используется для определения необходимого момента сопротивления изгибу W_x круглого сечения с последующим определением его диаметра.

Формула (6.7) не учитывает продольную силу, которая вызывает в поперечном сечении нормальное напряжение. Как правило, это напряжение мало по сравнению с напряжением, вызванным изгибающим моментом. Если же продольная сила оказывается весьма значительной, то после определения необходимого диаметра бруса по формуле (6.11) следует произвести вычисление эквивалентного напряжения по формуле (6.6).

При изгибе прямоугольного бруса наибольшее нормальное напряжение действует в угловой точке сечения:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}.$$

Напряжение, вызванное продольной силой, во всех точках сечения принимает одинаковое значение:

$$\sigma = \frac{N_z}{A}.$$

Так что наибольшее нормальное напряжение в любом случае оказывается в угловой точке прямоугольного сечения. Для материала, одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию, не имеет значения знак максимального напряжения. Модуль наибольшего нормального напряжения равен:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{N_z}{A}. \quad (6.12)$$

Первое слагаемое формулы (6.12) имеет смысл напряжения, вызванного изгибающим моментом M_x . Оно принимает наибольшее значение в точках, наиболее удаленных от главной оси x :

$$\max \sigma_{M_x} = \frac{M_x}{W_x}. \quad (6.13)$$

Второе слагаемое формулы (6.12) – это напряжение, вызванное изгибающим моментом M_y . Оно принимает наибольшее значение в точках, наиболее удаленных от главной оси y :

$$\max \sigma_{M_y} = \frac{M_y}{W_y}. \quad (6.14)$$

В формулы (6.13) и (6.14) подставляются модули изгибающих моментов и вычисляются абсолютные значения напряжений.

Касательное напряжение, вызванное крутящим моментом, принимает наибольшее значение в средней точке большей стороны прямоугольного сечения, где нормальное напряжение может быть максимальным лишь в частном случае. Зато в угловой точке сечения (где действует наибольшее нормальное напряжение) касательное напряжение отсутствует. То есть материал в этой точке находится в состоянии простого растяжения или сжатия.

Таковыми точками являются угловые точки прямоугольного сечения и сечения типа швеллера или двутавра.

Формула (6.12) неприменима в случае круглого сечения, так как наибольшие нормальные напряжения, вызываемые изгибающими моментами M_x и M_y , действуют в разных точках. Поэтому сумма (6.12) не имеет физического смысла. Но любая центральная ось круглого сечения является главной. Значит наибольшее нормальное напряжение возникает в точке контура круглого сечения и определяется по формуле

$$\max|\sigma| = \frac{M_{изг}}{W_x}.$$

Здесь $M_{изг}$ – изгибающий момент, равный геометрической сумме моментов M_x и M_y .

6.4 Расчет элементов пространственной рамы

Брус $СК$ рамы, изображенный на рисунке 6.1, имеет прямоугольное сечение. Остальные стержни рамы имеют круглое сечение одного диаметра. Размер стороны сечения бруса $СК$, перпендикулярный стержню BCD , на 20 % больше диаметра круглых стержней. Найдем требуемый диаметр круглого стержня и второй размер сечения бруса $СК$.

Расчет цилиндрического стержня.

По эпюрам изгибающих моментов M_x и M_y видно, что наибольший изгибающий момент может быть в сечении D стержня ED , в сечении C стержня DC и в сечении C стержня BC .

$$M_D = \sqrt{0,72^2 + 0,75^2} = 1,04 \text{ кНм};$$

$$M_{C DC} = \sqrt{0,6^2 + 0,75^2} = 0,960 \text{ кНм};$$

$$M_{C BC} = \sqrt{0,32^2 + 0,9^2} = 0,955 \text{ кНм}.$$

Наибольшим оказался изгибающий момент в сечении D . Однако в этом сечении нет крутящего момента, в то время как в сечениях, примыкающих к узлу C , действуют крутящие моменты:

$$M_{z DC} = 0,72 \text{ кНм}, \quad M_{z BC} = 0,8 \text{ кНм}.$$

Применяя гипотезу Треска-Сен-Венана, по формуле (3.9) найдем эквивалентные моменты в этих сечениях:

$$M_{III\ C\ DC} = \sqrt{0,6^2 + 0,75^2 + 0,72^2} = 1,20 \text{ кНм};$$

$$M_{III\ C\ BC} = \sqrt{0,32^2 + 0,9^2 + 0,8^2} = 1,25 \text{ кНм}.$$

Наиболее опасным оказалось сечение *C* стержня *BC*.

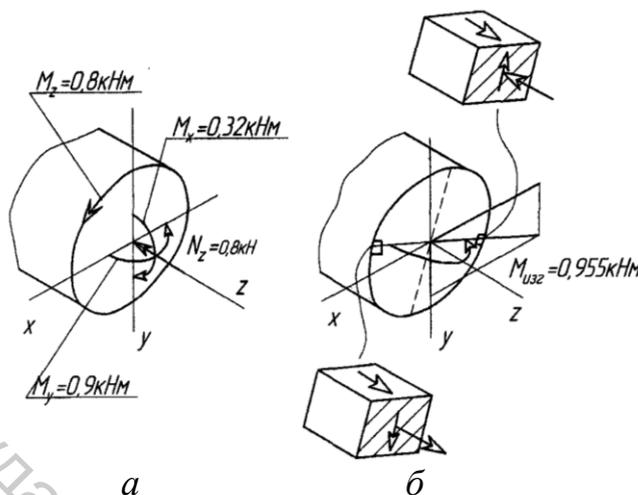


Рисунок 6.9 – Сечение *C* стержня *BC*

На рисунке 6.9 *a* изображены внутренние силовые факторы в этом сечении, а на рисунке 6.9 *б* показан суммарный изгибающий момент M_{uz2} и напряженное состояние в точке 1.

По условию прочности (6.11)

$$\sigma_{III} = \frac{M_{III}}{W_x} \leq \sigma,$$

требуемый момент сопротивления равен:

$$W_x = \frac{M_{III}}{\sigma} = \frac{125}{16} = 7,81 \text{ см}^3.$$

Соответствующий диаметр стержня

$$d = \sqrt[3]{\frac{32W}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 7,81}{\pi}} = 4,30 \text{ см}.$$

При таком определении требуемого диаметра не учтена продольная сила.

Наибольшее нормальное напряжение в этом сечении с учетом продольной силы равно:

$$\max \sigma = \frac{M_{uz2}}{W_x} + \frac{N_z}{A} = \frac{95,5 \cdot 32}{\pi \cdot 4,3^3} + \frac{0,8 \cdot 4}{\pi \cdot 4,3^2} = 12,2 + 0,055 = 12,3 \text{ кН/см}^2.$$

Видно, что напряжение, вызванное продольной силой, значительно меньше напряжения от изгибающего момента.

При касательном напряжении

$$\max \tau = \frac{M_z}{W_p} = \frac{80 \cdot 16}{\pi \cdot 4,3^3} = 5,12 \text{ кН/см}^2.$$

Эквивалентное напряжение:

$$\sigma_{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = 16,01 \text{ кН/см}^2.$$

При допускаемой пятипроцентной перегрузке условие прочности удовлетворяется.

Расчет прямоугольного бруса.

По условию задачи $v = 1,2d = 1,2 \cdot 4,3 = 5,16 \text{ см}$.

Принимаем $v = 5,2 \text{ см}$.

По эпюрам изгибающих моментов M_x и M_y выясняем, что наиболее опасным может быть как сечение C , так и сечение K . На рисунках (6.10) и (6.11) показаны внутренние силовые факторы в этих сечениях.

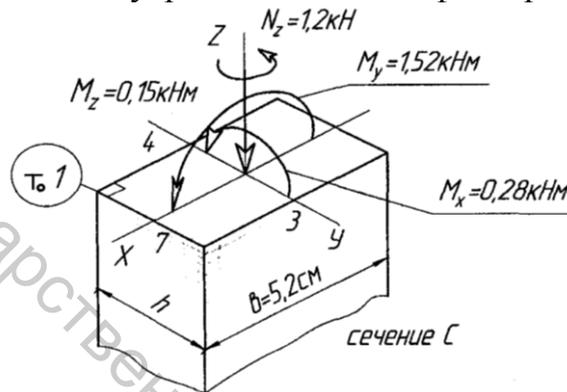


Рисунок 6.10 – Сечение C стержня CK

Поскольку продольная сила отрицательная, то нужно найти точки сечений, в которых действует наибольшее напряжение сжатия.

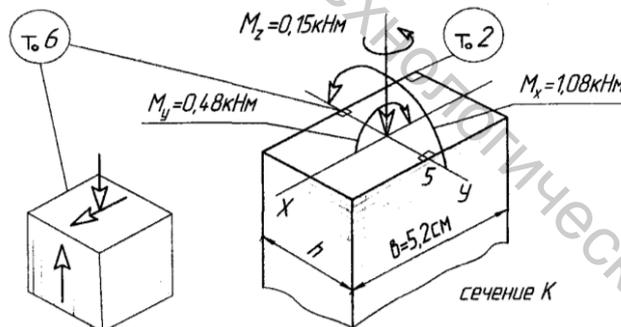


Рисунок 6.11 – Сечение K стержня CK

Таковыми являются точка 1 сечения C (рисунок 6.10) и точка 2 сечения K (рисунок 6.11).

По условию прочности $\max|\sigma| \leq \sigma$ и формуле (6.12) составим уравнения:

$$\frac{28}{5,2h^2} + \frac{152}{5,2^2h} + \frac{1,2}{5,2h} = 16 \quad (\text{точка 1}); \quad (6.15)$$

$$\frac{6}{5,2h^2} + \frac{48}{5,2^2h} + \frac{1,2}{5,2h} = 16 \quad (\text{точка 2}) \quad (6.16)$$

Решение уравнения (6.15) $h = 2,83$ см.

Решение уравнения (6.16) $h = 3,15$ см.

Принимаем большее значение $h = 3,15$ см.

Теперь следует проверить прочность бруса в точках с наибольшим касательным напряжением. Таковыми являются точки 3, 4, 5 и 6. Касательные напряжения в этих точках имеют одинаковое значение

$$\max \tau = \frac{M_z}{W_k}.$$

Здесь $W_k = \alpha v h^2$.

По отношению

$$\frac{v}{h} = \frac{5,2}{3,15} \approx 1,65$$

в таблице (4.1) коэффициентов α и γ и формуле линейного интерполирования найдем:

$$\alpha = 0,231 \frac{2 - 1,65}{2 - 1,5} + 0,246 \frac{1,65 - 1,5}{2 - 1,5} = 0,236.$$

Момент сопротивления кручению:

$$W_k = 0,236 \cdot 5,2 \cdot 3,15^2 = 12,2 \text{ см}^3.$$

$$\max \tau = \frac{15}{12,2} = 1,23 \text{ кН/см}^2.$$

Нормальное напряжение принимает большее по модулю значение в точке 6, оно равно:

$$\sigma = \frac{108 \cdot 6}{5,2 \cdot 3,15^2} + \frac{1,2}{5,2 \cdot 3,15} = 12,6 \text{ кН/см}^2. \quad (6.17)$$

На рисунке 6.11 изображено напряженное состояние в этой точке. Оно является упрощенным плоским. Эквивалентное напряжение для такого напряженного состояния по гипотезе Треска-Сен-Венана определяется по формуле (6.6):

$$\sigma_{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{12,6^2 + 4 \cdot 1,23^2} = 12,8 < \sigma.$$

Условие прочности удовлетворяется.

Изгибающий момент M_y в сечении C больше, чем изгибающий момент M_x сечения K . Так что нормальное напряжение в точке 7 может оказаться больше напряжения (6.17).

Найдем его:

$$\sigma = \frac{152 \cdot 6}{5,2^2 \cdot 3,15} + \frac{1,2}{5,2 \cdot 3,15} = 10,8 \text{ кН/см}^2.$$

Нормальное напряжение в точке 7 оказалось меньше напряжения в точке 6. Это объясняется большим значением момента сопротивления W_y . Ведь при его вычислении пришлось возводить в квадрат большую сторону сечения.

7 Статически неопределимые рамы. Эпюры внутренних силовых факторов

7.1 Принцип возможных перемещений. Теорема Бетти

Метод Мора-Верещагина определения перемещений упругих систем основан на принципе возможных перемещений, который утверждает, что для равновесия упругой системы необходимо и достаточно, чтобы сумма работ внешних и внутренних сил на возможных перемещениях системы равнялась нулю.

Применяя принцип возможных перемещений к реальным упругим системам, будем вычислять работу сил не на бесконечно малых перемещениях, а на малых конечных перемещениях, вызванных любой нагрузкой, не доводящей систему до предельного состояния.

Такая замена допустима ввиду линейной зависимости между силами и деформациями, которая положена в основу наших расчетов. Таким образом, принцип возможных перемещений запишется так:

$$A^e + A^i = 0.$$

Здесь A^e – работа внешних, а A^i – работа внутренних сил заданной системы на перемещениях, вызванных другой, воображаемой, системой сил.

Например:

На рисунке 7.1 изображена заданная система сил. Обозначим ее система a .

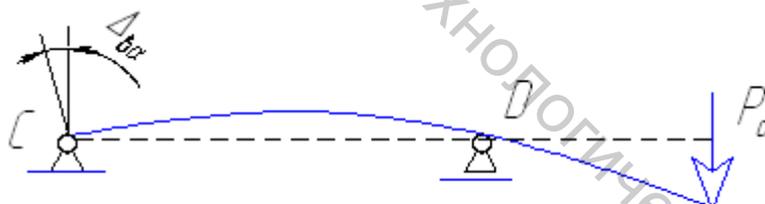


Рисунок 7.1 – Заданная система сил

На рисунке 7.2 изображена другая, произвольная система сил, обозначенная b .

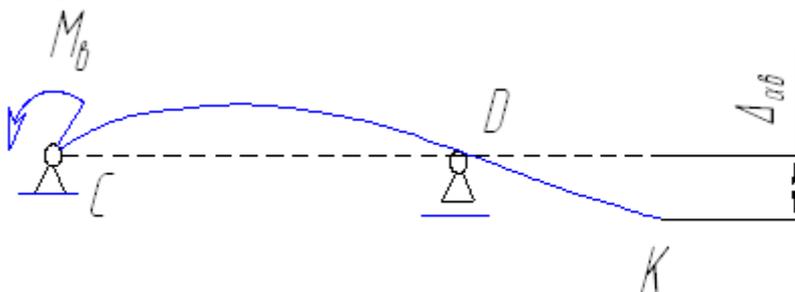


Рисунок 7.2 – Произвольная система сил

Работа внешних сил системы a на перемещении системы b равна:

$$A_{a\epsilon}^e = P_a \cdot \Delta_{a\epsilon}$$

В этом выражении $\Delta_{a\epsilon}$ – прогиб балки в сечении K системы ϵ в направлении силы P_a , вызванный моментом M_ϵ .

Аналогично можно определить работу внешних сил системы ϵ на перемещениях системы a .

$$A_{\epsilon a}^e = M_\epsilon \cdot \Delta_{\epsilon a}$$

Здесь $\Delta_{\epsilon a}$ – угол поворота сечения C в направлении момента M_ϵ , вызванный силой P_a .

Значит, принцип возможных перемещений для системы a записывается в виде:

$$A_{a\epsilon}^e + A_{a\epsilon}^i = 0;$$

а для системы ϵ – в виде:

$$A_{\epsilon a}^e + A_{\epsilon a}^i = 0.$$

Для определения работы внутренних сил на возможных перемещениях рассмотрим отдельные виды деформации бруса.

1. Растяжение $N_z \neq 0$.

На рисунке 7.3 *а* изображен элемент стержня, в поперечном сечении которого действует продольная сила N_a .

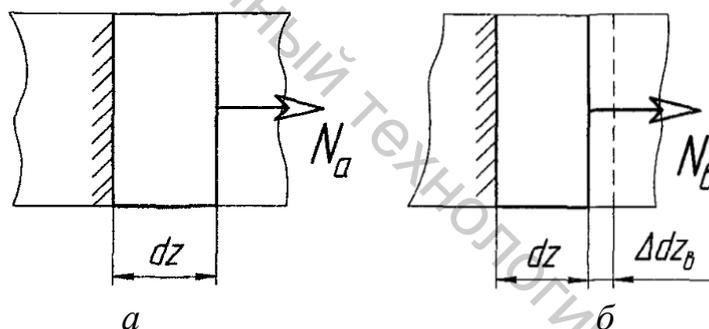


Рисунок 7.3 – Возможное перемещение системы A при растяжении

Другая нагрузка вызывает в поперечном сечении этого стержня продольную силу N_ϵ , что изображено на рисунке 7.3 *б*. Здесь же показано удлинение элемента Δdz_ϵ , равное $\Delta dz_\epsilon = \frac{N_\epsilon dz}{EA}$.

Сила N_a является для изображенного элемента стержня внешней и ее работа на перемещении Δdz_ϵ равна:

$$\delta A_{a\epsilon}^e = N_a \frac{N_\epsilon dz}{EA}.$$

На основании принципа возможных перемещений для выделенного элемента

$$\delta A_{\epsilon a}^i = -\delta A_{a\epsilon}^e = -\frac{N_a N_\epsilon}{EA} dz.$$

Распространив это выражение на весь стержень, получим:

$$A_{ae}^i = -\int_l \frac{N_a N_e}{EA} dz. \quad (7.1)$$

2. Изгиб $M_x \neq 0$.

По рисунку 7.4 найдем:

$$\delta A_{ae}^i = M_{xa} d\Theta_e = M_{xa} \frac{dz}{\rho} = M_{xa} \frac{M_{xe}}{EI_x} dz$$

Отсюда:

$$A_{ae}^i = -A_{ae}^e = -\int_l \frac{M_{xa} M_{xe}}{EI_x} dz. \quad (7.2)$$

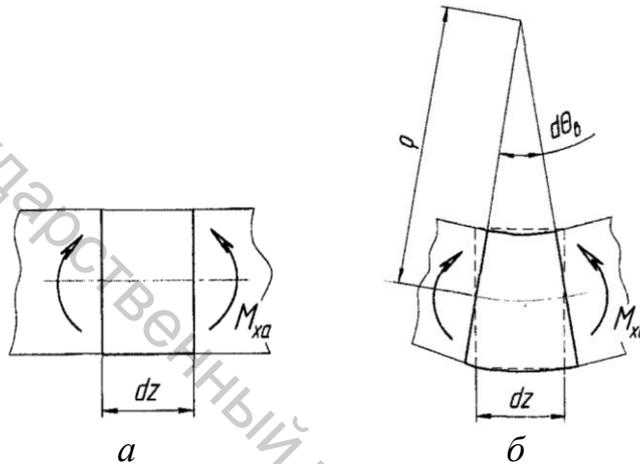


Рисунок 7.4 – Возможное перемещение системы A при изгибе

Полученные формулы (7.1) и (7.2) имеют одинаковое строение. Числитель подынтегрального выражения есть произведение внутренних силовых факторов при определенной деформации бруса, а знаменатель – жесткость сечения бруса, соответствующая этой деформации. Подобная формула получается и для деформации кручения бруса:

$$A_{ae}^i = -\int_e \frac{M_{za} M_{ze}}{GI_k} dz. \quad (7.3)$$

Заметим, что поменяв местами множители в формулах (7.1, 7.2, 7.3), получим:

$$A_{ae}^i = A_{ea}^i.$$

Применив принцип возможных перемещений для системы a и системы e , получим:

$$A_{ae} + A_{ae}^i = 0.$$

Отсюда:

$$A_{ae} = -A_{ae}^i = -A_{ea}^i = A_{ea},$$

то есть

$$A_{ae} = A_{ea}. \quad (7.4)$$

Равенство (7.4) выражает теорему Бетти:

Работа внешних сил системы a на перемещениях, вызванных силами системы b , равна работе внешних сил системы b на перемещениях, вызванных силами системы a .

7.2 Интеграл Мора

На рисунке 7.5 изображена рама, нагруженная произвольной нагрузкой P .

Назовем ее системой a . На рисунке 7.6 изображена та же рама, к сечению B которой приложена горизонтальная сила, равная безразмерной единице (система b).

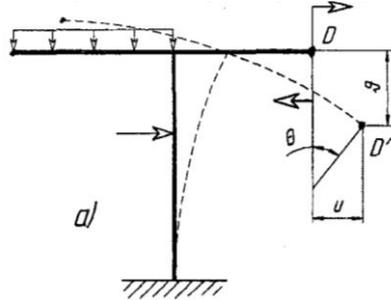


Рисунок 7.5 – Рама, нагруженная произвольной нагрузкой

Перемещения системы a являются возможными для системы b . На основании принципа возможных перемещений:

$$A_{ba}^e + A_{ab}^i = 0. \quad (7.5)$$

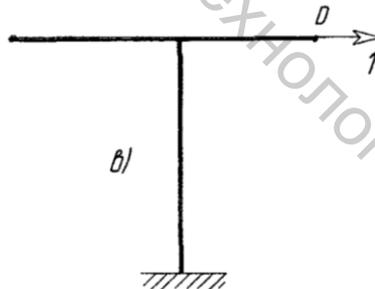


Рисунок 7.6 – Рама, нагруженная единичной нагрузкой

Работа силы системы b на горизонтальном перемещении и сечения B системы a равна:

$$A_{ba}^e = 1 \cdot u. \quad (7.6)$$

Работа внутренних сил системы b на перемещении системы a :

$$A_{ab}^i = - \int_l \frac{M_{xa} M_{xb}}{EI_x} dz. \quad (7.7)$$

После подстановки выражений (7.6) и (7.7) в уравнение (7.5) получим:

$$u = \int_l \frac{M_{xa} M_{xb}}{EI_x} dz. \quad (7.8)$$

Формула (7.8) носит название интеграла Мора. Здесь M_{xa} – выражение изгибающего момента от заданной нагрузки. Впоследствии внутренние силовые факторы от заданной нагрузки будем обозначать индексом P . $M_{xв}$ – выражение изгибающего момента от единичной нагрузки, которое впоследствии будем обозначать символом \overline{M} .

Если элементы конструкции испытывают изгиб в плоскости yz , в плоскости xz , кручение и растяжение, то интеграл Мора имеет следующее выражение:

$$u = \int_l \frac{M_{xp} \overline{M}_x}{EI_x} dz + \int_l \frac{M_{yp} \overline{M}_y}{EI_y} dz + \int_l \frac{M_{zp} \overline{M}_z}{GI_k} dz + \int_l \frac{N_{zp} \overline{N}_z}{EA} dz \quad (7.9)$$

Интеграл Мора позволяет вычислить перемещение того сечения упругой системы, к которому приложена единичная нагрузка на вспомогательной конструкции, и в том направлении, в котором единичная нагрузка направлена. Так, для определения вертикального перемещения сечения B (рисунок 7.7) вспомогательную раму (система $в$) следовало бы нагрузить вертикальной единичной силой, а для определения угла поворота этого сечения в роли единичной нагрузки выступает единичный момент $\overline{M} = 1$.

7.3 Способ Верещагина вычисления интеграла Мора

Рассмотрим интеграл:

$$I = \int_l f \varphi dz. \quad (7.10)$$

Положим, что одна из функций подынтегрального выражения, например $f(z)$, является линейной:

$$f = a + \nu z.$$

Представим интеграл (7.10) суммой интегралов:

$$I = a \int_l \varphi dz + \nu \int_l z \varphi dz. \quad (7.11)$$

Произведение φdz имеет смысл площади заштрихованного элемента на графике функции φz , показанного на рисунке 7.9. Значит, интеграл $\int_l \varphi dz$ равен площади ω фигуры, ограниченной осью z и графиком функции φz на отрезке $(0; l)$.

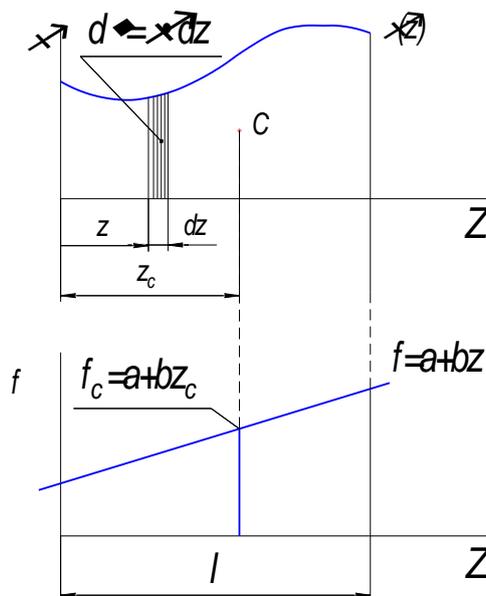


Рисунок 7.7 – Вычисление интеграла Мора

Тогда интеграл $\int_l z \varphi dz = \int_l z d\omega$ представляет собой статический момент площади этой фигуры относительно оси ординат, который можно вычислить как произведение $z_c \omega$, где z_c – абсцисса центра тяжести фигуры.

Теперь интеграл (7.11) представляется в виде

$$I = a\omega + vz_c \omega = \omega (a + vz_c) .$$

Выражение в скобках есть значение функции f при абсциссе z_c , определяющей положение центра тяжести площади ω .

Эпюра изгибающего момента, вызванного единичной нагрузкой, всегда линейна. Значит интеграл Мора (7.9), записанный при жесткости EI , не меняющейся вдоль области интегрирования в виде:

$$EIu = \int_l M_p \overline{M} dz ,$$

можно вычислить по формуле

$$EIu = \int_l M_p \overline{M} dz = \omega \overline{M}_c . \quad (7.12)$$

В формуле (7.12) ω – площадь эпюры изгибающего момента от заданной нагрузки (грузовой эпюры), M_c – значение изгибающего момента на вспомогательной эпюре (эпюре изгибающего момента от единичной нагрузки) в сечении, соответствующем центру тяжести грузовой эпюры.

Такая процедура вычисления интеграла Мора называется перемножением эпюр и обозначается символом $M_p \overline{M}$.

Следует учесть, что единичная эпюра может быть представлена ломаной линией, то есть разными прямыми на отдельных участках ба-

зиса. В этом случае следует вычислять интеграл (7.12) по каждому участку отдельно. То есть интеграл (7.12) представляется тогда суммой

$$u = M_p \overline{M} = \sum \omega_k \overline{M}_{kc}. \quad (7.13)$$

Если грузовая эпюра представляется сложной фигурой, то ее следует разложить на простейшие фигуры – треугольники, прямоугольники. Если некоторый участок бруса нагружен равномерно распределенной нагрузкой, то эпюра изгибающего момента на этом участке изображается параболой и для вычисления суммы (7.13) необходимо выделить сегмент (рисунок 7.8), площадь которого равна:

$$\omega = \frac{1}{12} qa^3,$$

а центр тяжести находится посередине участка.

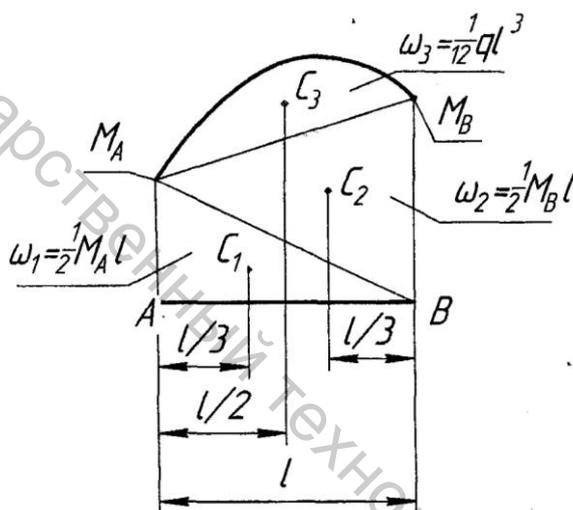


Рисунок 7.8 – Выделение простых фигур

Метод Мора-Верещагина определения перемещений упругих систем применяется при исследовании статически неопределимых систем *методом сил*.

7.4 Метод сил

Статически неопределимой стержневой системой называется такая геометрически неизменяемая стержневая система, в которой опорные реакции и внутренние силовые факторы не могут быть определены при помощи только условий равновесия и метода сечений.

Статическая неопределимость обусловлена наличием так называемых "лишних" связей. Под "лишними" понимаются связи, которые дополняют связи, необходимые для обеспечения геометрической неизменяемости системы. Реакции "лишних" связей принято называть "лишними неизвестными". Количество "лишних" связей определяет степень статической неопределимости.

На рисунке 7.9 изображена плоская рама с двумя шарнирно неподвижными и одной шарнирно подвижной опорой. Количество наложенных связей $2 + 2 + 1 = 5$.

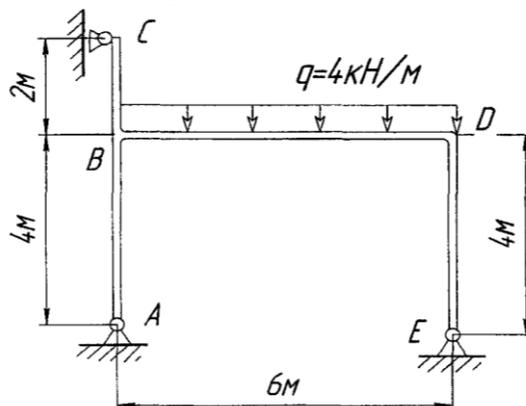


Рисунок 7.9 – Статически неопределимая рама

Кинематическая неизменяемость плоской системы достигается наложением на нее трех связей. Столько же можно составить для нее независимых уравнений равновесия. Значит изображенная рама является дважды статически неопределимой. Составленные три уравнения равновесия не позволят определить 5 неизвестных реакций связей.

Если удалить "лишние" связи и к полученной раме, которая называется *основной системой*, приложить заданную нагрузку и силы, равные реакциям удаленных связей, то получим статически определимую систему, *эквивалентную* заданной. То есть деформация ее и внутренние силовые факторы такие же, как и у заданной конструкции. Значит перемещения Δ_1 и Δ_2 вдоль удаленных связей равны нулю.

На основании принципа независимости действия сил

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{1p} = 0; \\ \Delta_2 &= \Delta_{21} + \Delta_{22} + \Delta_{2p} = 0. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Здесь Δ_{ik} – перемещение вдоль i -ой удаленной связи от реакции X_k , Δ_{ip} – перемещение в этом же направлении от заданной нагрузки.

Перемещение Δ_{ik} можно представить произведением $\delta_{ik} \cdot X_k$, в котором δ_{ik} – перемещение вдоль i -ой удаленной связи, но не от силы X_k , а от единичной силы, приложенной вместо X_k . Система уравнений (7.14) принимает вид:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} &= 0. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Перемещение Δ_{ip} и δ_{ik} можно найти по методу Мора-Верещагина. Найденные реакции удаленных связей X_1 и X_2 позволяют построить эпюры внутренних силовых факторов для эквивалентной системы.

Поскольку эквивалентная система испытывает такие же деформации, что и заданная, то внутренние силовые факторы, определенные для нее по найденным силам X_k , являются таковыми и для заданной системы.

На рисунке 7.10 приведены 4 конструкции, полученные удалением двух связей. Заметим, (рис. 7.10) что вторая конструкция может иметь вертикальные поступательные перемещения без сопротивления приложенной нагрузке. Третья конструкция может поворачиваться вокруг оси опоры A на небольшой угол. При этом угол поворота рамы зависит от приложенных сил нелинейно. Значит, вторая и третья рамы не могут быть приняты за основную систему.

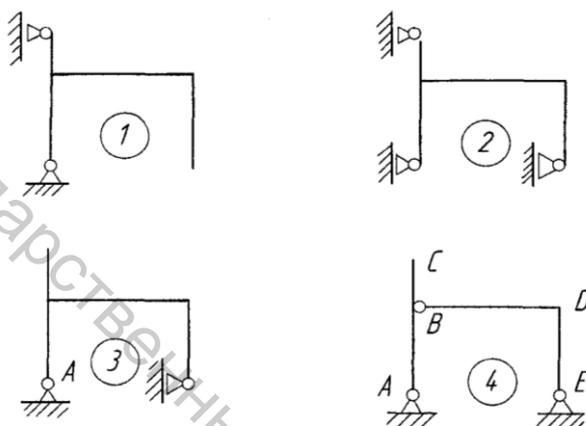


Рисунок 7.10 – Варианты основной системы

Выберем в качестве основной системы последнюю раму. Она получена удалением опоры C , налагающей одну связь, и введением шарнира B , который допускает взаимный поворот сечений вертикальной балки AC и рамы BDE , примыкающих к узлу B . То есть удалены одна внешняя связь и одна внутренняя.

На рисунке 7.11 изображена эквивалентная система, к которой кроме заданной нагрузки приложена сила X_1 , равная реакции опоры C и момент X_2 (обобщенная сила), равный изгибающему моменту в сечении B рамы BDE .

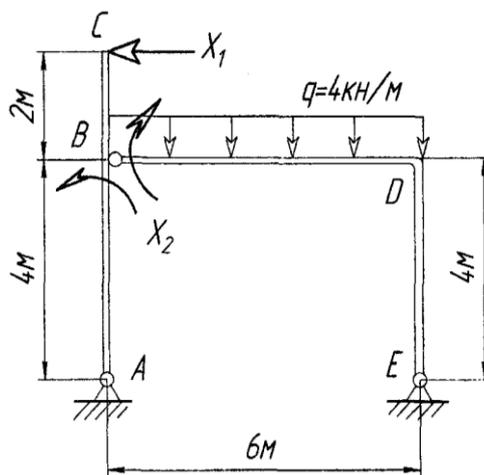


Рисунок 7.11 – Эквивалентная система

Для вычисления коэффициентов δ_{ik} уравнений (7.15) построены эпюры изгибающих моментов \overline{M}_1 и \overline{M}_2 от единичных нагрузок (рисунок 7.12).

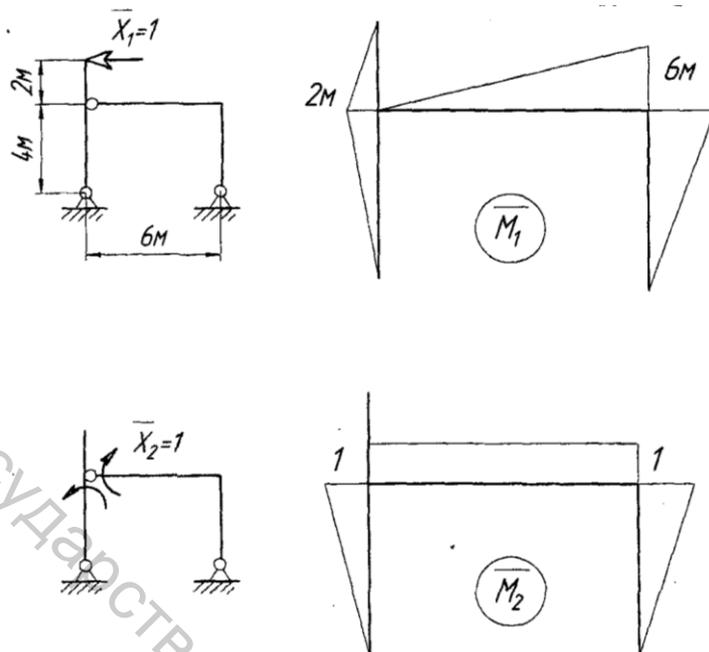


Рисунок 7.12 – Единичные эпюры

Для вычисления перемещений Δ_{ip} построена грузовая эпюра (рисунок 7.13).

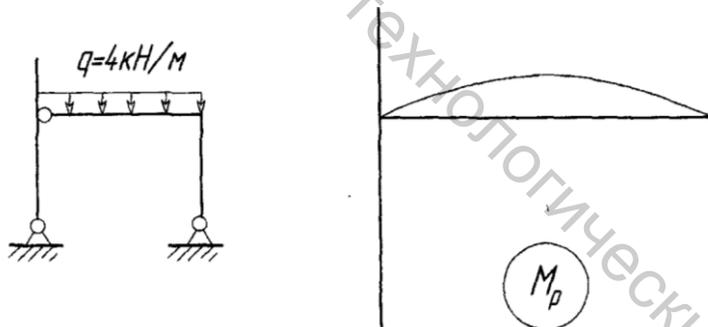


Рисунок 7.13 – Грузовая эпюра

При вычислении перемещения δ_{11} (или δ_{22}) единичная эпюра \overline{M}_1 (или \overline{M}_2) выступает в роли грузовой и в роли вспомогательной. Так что следует представить, что есть две эпюры \overline{M}_1 (или \overline{M}_2), и одна из них умножается на другую, такую же.

$$EI\delta_{11} = \overline{M}_1 \cdot \overline{M}_1 = \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4\right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6\right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6\right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = 128 \text{ м}^3;$$

$$EI\delta_{12} = \overline{M}_2 \cdot \overline{M}_1 = \delta_{21} = \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4\right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 + \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4\right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 =$$

$$= \frac{86}{3} \text{ м}^3;$$

$$EI\delta_{22} = \overline{M}_2 \cdot \overline{M}_2 = 1 \cdot 6 \cdot 1 + \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1\right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{26}{3} \text{ м};$$

$$EI\Delta_{1p} = M_p \overline{M}_1 = -\frac{1}{12} \cdot 4 \cdot 6^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 = 216 \text{ кНм}^3;$$

$$EI\Delta_{2p} = M_p \overline{M}_2 = \frac{1}{12} \cdot 4 \cdot 6^3 \cdot 1 = 72 \text{ кНм}^2.$$

Канонические уравнения (7.15) принимают вид:

$$128X_1 + \frac{86}{3}X_2 + 216 = 0;$$

$$\frac{86}{3}X_1 + \frac{26}{3}X_2 + 72 = 0.$$

После упрощения получаем:

$$192X_1 + 43X_2 = -324;$$

$$43X_1 + 13X_2 = -108.$$

Решение уравнений:

$$X_1 = 0,668 \text{ кН}; X_2 = -10,52 \text{ кНм}.$$

На рисунке 7.14 изображена эквивалентная система при найденных значениях X_1 и X_2 . Для определения реакций опор эквивалентной системы и построения эпюр внутренних силовых факторов рассмотрим равновесие балки ABC и рамы BDE в отдельности (рисунок 7.15).

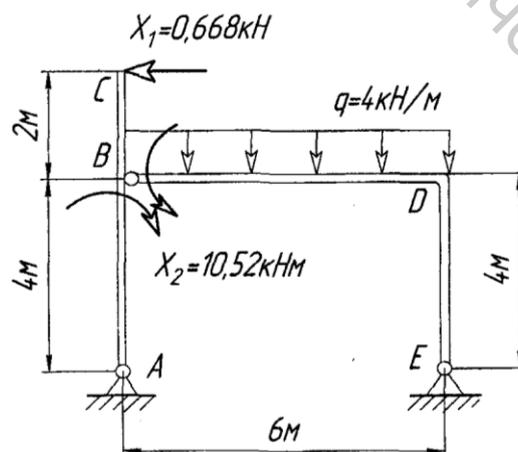


Рисунок 7.14 – Эквивалентная система при найденных значениях неизвестных величин

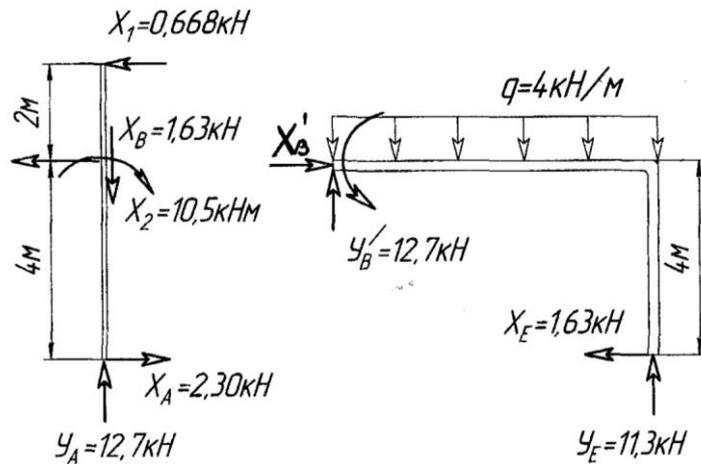


Рисунок 7.15 – Элементы эквивалентной системы

По уравнению моментов относительно оси шарнира A найдем силу X_B :

$$0,668 \cdot 6 - 10,52 + X_B \cdot 4 = 0. \quad X_B = 1,63 \text{ кН.}$$

По уравнению моментов относительно шарнира B найдем силу X_A .

$$X_A \cdot 4 + 0,668 \cdot 2 - 10,52 = 0. \quad X_A = 2,30 \text{ кН.}$$

X_B – это сила, с которой рама BDE действует на балку ABC . Значит

$$X'_B = X_B = 1,63 \text{ кН.}$$

По уравнению моментов для рамы относительно шарнира E найдем Y'_B :

$$10,52 - 1,63 \cdot 4 - 10,52 + 4 \cdot 6 \cdot 3 - Y'_B \cdot 6 = 0. \quad Y'_B = 12,67 \text{ кН.}$$

По уравнению проекций сил на ось X :

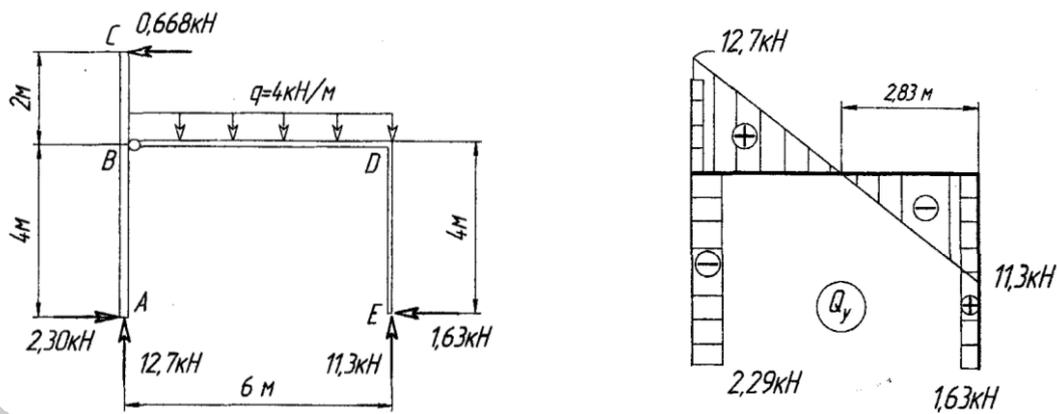
$$X_E = X_B = 1,63 \text{ кН.}$$

По уравнению проекций сил на ось y :

$$12,67 - 4 \cdot 6 + Y_E = 0. \quad Y_E = 11,33 \text{ кН.}$$

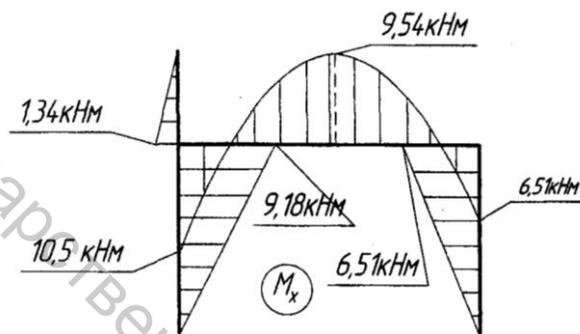
На рисунках 7.16 $a, б, в$ изображены эпюры поперечной силы, изгибающего момента и продольной силы.

По построенной эпюре изгибающего момента можно определить перемещения сечений заданной рамы. Для этого необходимо иметь единичную эпюру. Но для построения единичной эпюры для заданной статически неопределимой рамы нужно опять, используя метод сил, удалить "лишние" связи, построить эквивалентную систему и повторить все последующие операции.



а

б



в

Рисунок 7.16 – Плоская рама (а) и эпюры поперечной силы (б) и изгибающего момента (в)

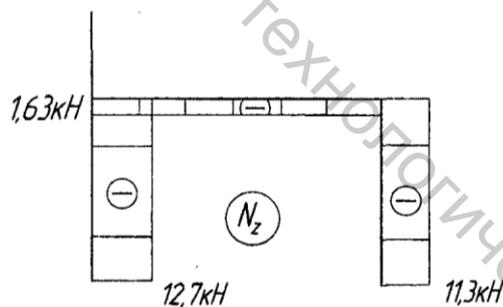


Рисунок 7.17 – Эпюра продольной силы

Но можно обойти эти процедуры, если заметить, что построенная эпюра M_x является эпюрой изгибающего момента как для эквивалентной системы, так и для заданной статически неопределимой, и что эти системы имеют одинаковые деформации и перемещения. Значит, определение перемещений заданной статически неопределимой рамы можно заменить определением перемещений эквивалентной ей статически определимой рамы. Причем любой эквивалентной рамы, построенной на основании заданной. То есть единичная эпюра может быть построена для любой основной системы.

Например, найдем горизонтальное перемещение сечения B , используя ту же основную систему.

На рисунке 7.18 изображена рама, нагруженная горизонтальной единичной силой и соответствующая ей эпюра изгибающего момента. По грузовой эпюре (рисунок 7.18) и единичной эпюре (рисунок 7.19) найдем горизонтальное перемещение сечения B .

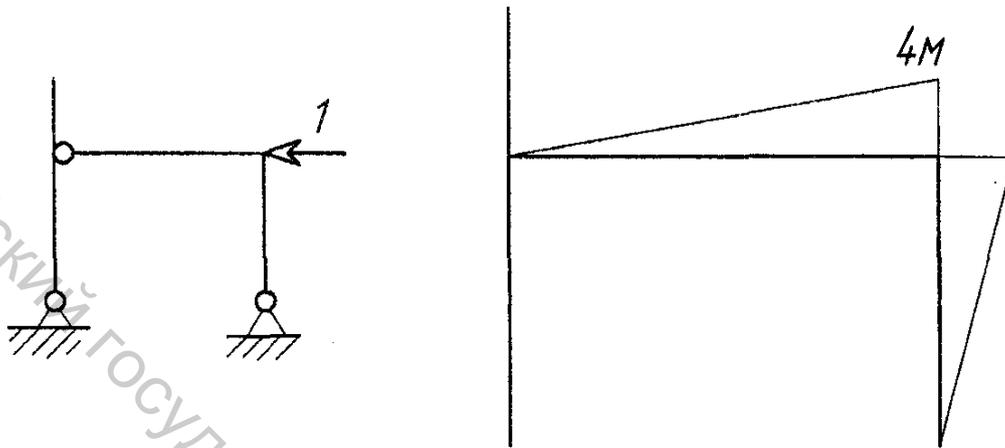


Рисунок 7.18 – Единичная эпюра

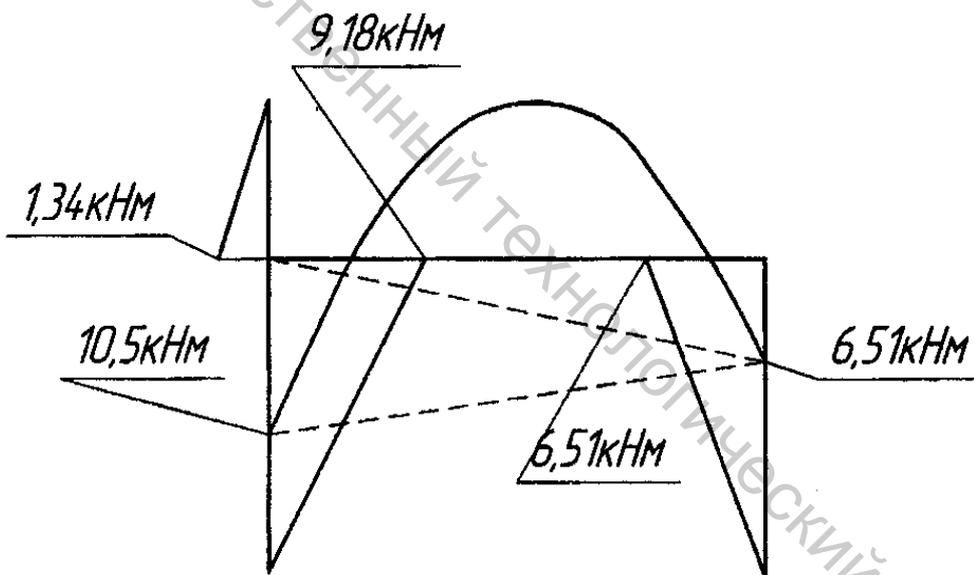


Рисунок 7.19 – Грузовая эпюра

$$EIu_B = \left(\frac{4}{12} \cdot 6^3 \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 - \left(\frac{1}{2} \cdot 10,54 \cdot 6 \right) \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 - \left(\frac{1}{2} \cdot 6,51 \cdot 6 \right) \frac{2}{3} \cdot 4 - \left(\frac{1}{2} \cdot 6,51 \cdot 4 \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = 15,1 \text{ кНм}^3$$

Если в качестве вспомогательной выбрать раму, изображенную на рисунке 7.20, то единичная эпюра и перемножение эпюр окажется более простым.

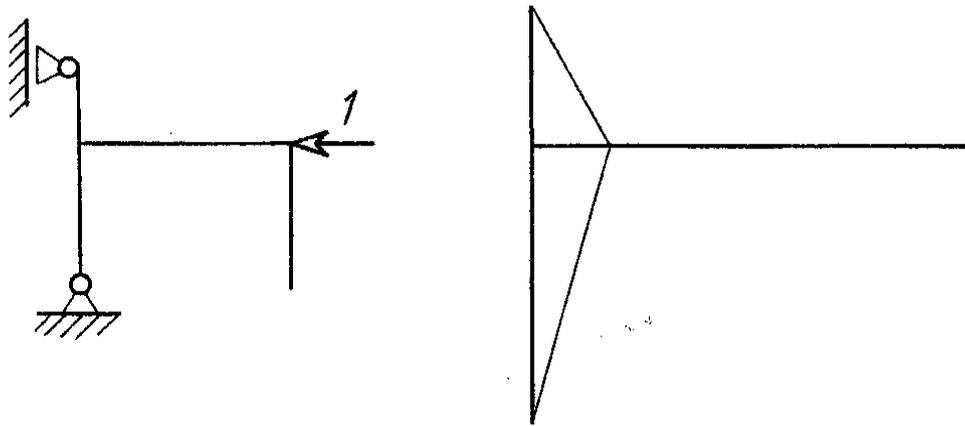


Рисунок 7.20 – Единичная эпюра

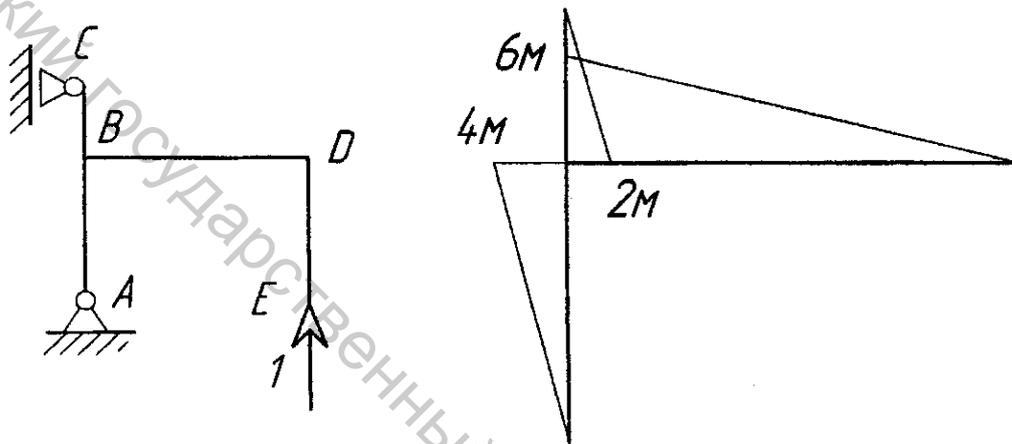


Рисунок 7.21 – Единичная эпюра

$$EIu_B = \left(\frac{1}{2} \cdot 9,18 \cdot 4 \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} - \left(\frac{1}{2} \cdot 1,335 \cdot 2 \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = 15,1 \text{ кНм}^3$$

Результат тот же.

Рама, изображенная на рисунке 7.20, может быть использована для деформационной проверки эпюры, изображенной на рисунке 7.19. Для этого найдем, например, вертикальное перемещение сечения E.

На рисунке 7.21 изображена соответствующая нагрузка и эпюра изгибающего момента \bar{M} .

Перемножение эпюр (рисунок 7.19) и (рисунок 7.20):

$$EIv_E = - \left(\frac{1}{2} \cdot 1,335 \cdot 2 \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - \left(\frac{1}{2} \cdot 9,18 \cdot 4 \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 - \\ - \left(\frac{1}{2} \cdot 10,52 \cdot 6 \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 - \left(\frac{1}{2} \cdot 6,51 \cdot 6 \right) \cdot \frac{1}{3} \cdot 6 + \left(\frac{4}{12} \cdot 6^3 \right) \cdot 3 = -0,04 \text{ кНм}^3$$

Полученное значение мало по сравнению со значением EIu_B и может быть принято равным нулю.

8 Колебания упругой системы с одной степенью свободы

8.1 Свободные колебания

Наиболее простым примером колебательного движения является прямолинейное движение материальной точки при восстанавливающей силе, пропорциональной отклонению точки от положения равновесия (рисунок 8.1)

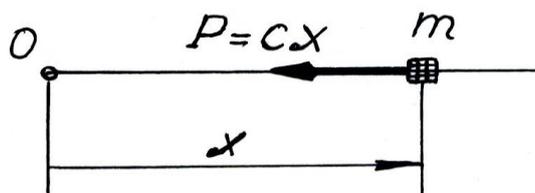


Рисунок 8.1 – Восстанавливающая сила

Физическая природа восстанавливающей силы может быть различной. Например, таковой может являться реакция невесомой упругой связи. Тогда коэффициент пропорциональности C характеризует жесткость этой связи, то есть он равен силе, которую нужно приложить к связи для того, чтобы получить перемещение материальной точки, равное единице.

Дифференциальное уравнение движения материальной точки имеет вид:

$$m\ddot{x} = -cx,$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \quad (8.1)$$

где

$$k^2 = \frac{c}{m}. \quad (8.2)$$

Общее решение уравнения (8.1) представляется в виде:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (8.3)$$

Постоянные C_1 и C_2 зависят от начальных условий, то есть от начального положения материальной точки и от ее начальной скорости. Они определяются координатой x и значением производной \dot{x} в момент времени $t_0 = 0$.

$$x_0 = x|_{t=0}; \quad V_0 = \dot{x}|_{t=0}.$$

Простой подстановкой найдем:

$$C_1 = x_0; \quad C_2 = \frac{V_0}{k}.$$

Теперь общее решение (8.3) представляется в виде:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{V_0}{k} \sin kt.$$

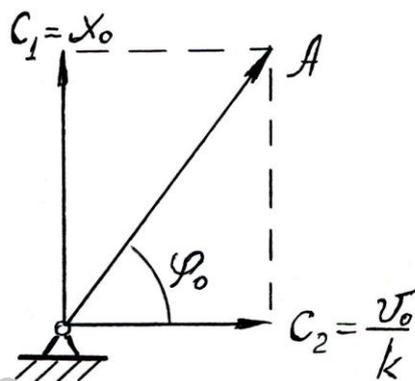
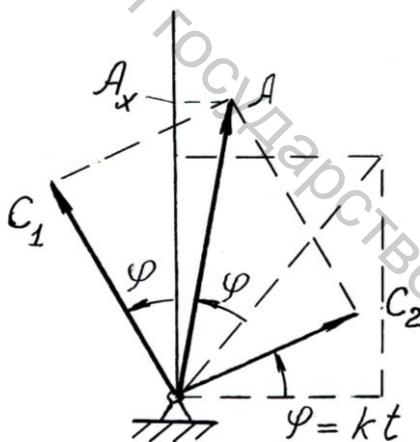


Рисунок 8.2 – Начальное положение вектора A

Это решение имеет следующую геометрическую интерпретацию. Рассмотрим равномерное вращательное движение системы двух взаимно перпендикулярных жестко связанных друг с другом векторов C_1 и C_2 . Их сумма представлена вектором A .



$$\text{Его модуль } A = \sqrt{x_0^2 + \frac{V_0^2}{k^2}} \quad (8.4)$$

Начальное положение вектора A , показанное на рисунке 8.2, определено углом $\varphi_0 = \text{arctg} \frac{x_0 k}{V_0}$.

Рисунок 8.3 – Геометрическое представление решения 8.3

На рисунке 8.3 показано положение системы в текущий момент t . При равномерном вращении системы с угловой скоростью, равной k , угол поворота ее $\varphi = kt$.

Проекция вектора A на ось x равна сумме проекций на ось x ее составляющих:

$$A_x = C_{1x} + C_{2x} = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt .$$

Это выражение совпадает с выражением (8.3).

В то же время

$$x = A_x = A \sin kt + \varphi_0 . \quad (8.5)$$

В некоторых случаях исследование колебательного движения удобнее производить с помощью выражения (8.5).

Коэффициент A равен наибольшему значению координаты x , т.е. координате x при наибольшем отклонении материальной точки от положения равновесия. Это есть амплитуда колебаний.

Амплитуда колебаний зависит от начальных условий x_0, V_0 и параметра k^2 , а значит от жесткости упругой связи s и инертности колеблющейся точки.

Аргумент $kt + \varphi_0$ называется фазой колебаний, а φ_0 – начальной фазой.

Время одного оборота вектора A называется периодом колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{k}.$$

Период колебаний равен промежутку времени, по истечении которого движение точки полностью повторяется. Величина, обратная периоду колебаний, называется частотой колебаний:

$$\gamma = \frac{1}{T}.$$

Она измеряется герцами – числом колебаний за одну секунду.

Параметр k , равный угловой скорости вращения системы векторов, изображенных на рисунке 8.3, называется круговой (циклической) частотой. Она измеряется числом радиан в секунду и равна числу колебаний за 2π секунд.

В курсе сопротивления материалов исследуется не столько движение материальной точки, сколько состояние упругой связи. Исследуя состояние упругой связи, уравнение (8.1) можно получить иным путем.

Упругое перемещение u при статическом нагружении упругой системы силой ϕ равно:

$$u = \delta_{11}\phi.$$

Здесь δ_{11} – отклонение материальной точки от положения равновесия под действием силы, равной единице.

Теперь воспользуемся принципом Даламбера и положим:

$$\phi = -m\ddot{u}.$$

Тогда

$$u = \delta_{11} -m\ddot{u}, \quad (8.6)$$

или

$$\ddot{u} + \frac{1}{\delta_{11}m}u = 0.$$

Это уравнение совпадает с уравнением (8.1). Таким образом, циклическая частота свободных колебаний определяется по формуле

$$k^2 = \frac{1}{\delta_{11}m}. \quad (8.7)$$

Эта формула практически не отличается от формулы (8.2), так как жесткость C и единичное перемещение связаны соотношением

$$C = \frac{1}{\delta_{11}}.$$

Тем не менее, такой подход к составлению уравнений колебаний во многих случаях оказывается более удобным, нежели при использовании жесткости упругой связи.

8.2 Затухающие колебания

При колебаниях реальной конструкции всегда существуют силы, которые препятствуют движению, что приводит к постепенному уменьшению амплитуды и затуханию колебаний.

К силам, препятствующим движению, следует отнести силы трения в кинематических парах, силы сопротивления воздуха или вязкой среды, а также внутренние силы неупругого сопротивления. По гипотезе Фойгта для учета внутренних сил сопротивления движению следует рассматривать материал колеблющейся балки как упруго вязкий. Напряжения в нем зависят не только от деформации ε , но и от скорости изменений деформации.

$$\sigma = \varepsilon E + \chi E \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}.$$

Здесь χ – коэффициент вязкого трения. По гипотезе Фойгта силы внутреннего сопротивления приводятся к внешней силе:

$$R = -\mu \frac{du}{dt}.$$

С учетом силы R уравнение (8.6) принимает вид:

$$u = \delta_{11} \phi + R = \delta_{11} (-m\ddot{u} - \mu\dot{u}). \quad (8.8)$$

Преобразуем уравнение (8.8) к виду:

$$\ddot{u} + 2n\dot{u} + k^2u = 0. \quad (8.9)$$

Здесь $n = \frac{\mu}{2m}$ – параметр, зависящий от коэффициента вязкого трения, $k^2 = 1/\delta_{11}m$ – значение циклической частоты колебаний при отсутствии сил сопротивления. Общее решение уравнения (8.9) представляется в виде:

$$u = e^{-nt} C_1 e^{\sqrt{n^2 - k^2}t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2 - k^2}t}. \quad (8.10)$$

При $n \geq k$ (случай большего сопротивления) имеет место апериодическое затухающее движение.

И лишь в случае $n < k$ движение носит колебательный характер, хотя и не является периодическим.

С помощью обозначения

$$k_1^2 = k^2 - n^2$$

выражение (8.10) можно представить в виде:

$$u = e^{-nt} C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t,$$

или

$$u = e^{-nt} A \sin k_1 t + \delta \quad (8.11)$$

По выражению (8.11) видно, что через промежуток времени, равный π / k_1 , система проходит через состояние равновесия. Этим объясняется колебательный характер движения.

Величина

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}} \quad (8.12)$$

условно называется периодом затухающих колебаний.

Формула (8.12) показывает, что период затухающих колебаний больше, чем период свободных колебаний системы при отсутствии сопротивления движению.

Множитель Ae^{-nt} показывает, что последовательные максимальные отклонения системы от положения равновесия с течением времени уменьшаются. При этом отношение

$$\eta = \frac{u(t+T_1)}{u(t)} = \frac{e^{-n(t+T_1)} A \cdot \sin(k_1 t + k_1 T_1 + \gamma)}{e^{-nt} A \cdot \sin(k_1 t + \gamma)} = e^{-nT_1}$$

не зависит от времени t . Величина η называется декрементом затухающих колебаний, а показатель степени nT_1 – логарифмическим декрементом.

8.3 Вынужденные колебания

Колебания упругой системы, которые вызываются и поддерживаются возмущающими силами, заданными в виде явных функций времени, называются вынужденными.

Физическая природа таких сил весьма разнообразна. Разнообразны и задающие их функции. Они могут быть как периодическими, так и случайными функциями времени. Наиболее часто на практике встречаются возмущающие силы, меняющиеся периодически.

Возможно и кинематическое возбуждение колебаний.

Рассмотрим действие силы, изменяющейся по гармоническому закону:

$$P = P_0 \sin \omega t. \quad (8.13)$$

Уравнение (8.6) принимает вид:

$$u = \delta_{11} \quad -m\ddot{u} - \mu\dot{u} + P \sin \omega t, \quad (8.14)$$

или

$$\ddot{u} + \frac{\mu}{m} \dot{u} + \frac{1}{\delta_{11} m} u = \frac{P}{m} \sin \omega t.$$

При введенных ранее обозначениях:

$$2n = \frac{\mu}{m}, \quad k^2 = \frac{1}{\delta_{11} m}$$

уравнение (8.14) принимает вид:

$$\ddot{u} + 2n\dot{u} + k^2 u = \frac{P}{m} \sin \omega t. \quad (8.15)$$

Полученное дифференциальное уравнение является неоднородным (с правой частью). Полное решение такого уравнения, как известно, состоит из решения u_0 однородного уравнения:

$$\ddot{u}_0 + 2n\dot{u}_0 + k^2 u_0 = 0 \quad (8.16)$$

и частного решения u^* исходного неоднородного уравнения (8.15)

$$u = u_0 + u^*.$$

Однородное уравнение (8.16) совпадает с уравнением (8.9), описывающим затухающие колебания с частотой:

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}.$$

Представим частное решение неоднородного уравнения (8.15) в виде:

$$u^* = B + Dt \sin \omega t + \gamma, \quad (8.17)$$

где B, D, γ – искомые постоянные.

Подстановка решения (8.17) в уравнение (8.15) приводит к четырем алгебраическим уравнениям:

$$\begin{aligned} k^2 - \omega^2 D &= 0; \\ 2n\omega D &= 0; \\ k^2 - \omega^2 B + 2nD &= \frac{P}{m} \cos \gamma; \\ 2n\omega B + 2\omega D &= -\frac{P}{m} \sin \gamma. \end{aligned} \quad (8.18)$$

Рассмотрим наиболее общий случай, при котором частота возмущения ω отлична от частоты k .

Из первого уравнения системы (8.18) следует $D = 0$, а третье и четвертое уравнения принимают вид:

$$\begin{aligned} k^2 - \omega^2 B &= \frac{P}{m} \cos \gamma; \\ 2n\omega B &= -\frac{P}{m} \sin \gamma. \end{aligned} \quad (8.19)$$

Отсюда

$$B = \frac{P}{m \sqrt{k^2 - \omega^2 + 4n^2 \omega^2}},$$

или

$$B = \frac{P}{mk^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)^2 + 4 \frac{n^2 \omega^2}{k^2}}}. \quad (8.20)$$

Заметим, что k в формуле (8.20) – это частота свободных колебаний системы при отсутствии сопротивления движению.

Угол сдвига фаз γ определяется по одному из уравнений (8.19) или по формуле

$$\operatorname{tg} \gamma = -\frac{2n\omega}{k^2 - \omega^2}. \quad (8.21)$$

Полное решение уравнения (8.15) теперь имеет вид:

$$u = Ae^{-nt} \sin k_1 t + \delta + B \sin \omega t + \gamma. \quad (8.22)$$

Формула (8.22) показывает, что упругая система одновременно участвует в двух колебательных движениях. Первое слагаемое выражения (8.22) описывает собственные затухающие колебания.

В отличие от колебаний, рассмотренных в предыдущем разделе, эти колебания имеют место и при нулевых начальных условиях, так как они зависят не только от начальных условий, но и от возмущающей силы.

Пользуясь начальными условиями:

$$u|_{t=0} = u_0 \text{ и } \dot{u}|_{t=0} = V_0,$$

получим два уравнения:

$$A \sin \delta = u_0 - B \sin \gamma; \quad (8.23)$$

$$A \cos \delta = \frac{1}{k_1} \left[V_0 + nu_0 - B \omega \cos \gamma + n \sin \gamma \right].$$

По уравнениям (8.23) видно, что постоянные A и δ , характеризующие затухающие колебания, зависят от угла сдвига фаз γ и величины B и при нулевых начальных условиях определяются из уравнений:

$$A \sin \delta = -B \sin \gamma;$$

$$A \cos \delta = -\frac{B}{k_1} \omega \cos \gamma + n \sin \gamma.$$

Второе слагаемое формулы (8.22) характеризует установившиеся вынужденные колебания с частотой, равной частоте возмущающей силы, и с амплитудой B .

Принимая во внимание соотношение:

$$k^2 = \frac{1}{\delta_{11} m},$$

представим амплитуду B в следующем виде:

$$B = \frac{\delta_{11} P}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)^2 + 4 \frac{n^2}{k^2} \frac{\omega^2}{k^2}}}. \quad (8.24)$$

Произведение $\delta_{11} P$ представляет собой перемещение массы m под действием силы P , равной амплитуде возмущающей силы, приложенной статически:

$$\delta_{11} P = u_{cm}.$$

Таким образом, амплитуда вынужденных колебаний равна:

$$B = u_{cm} \beta, \quad (8.25)$$

где

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)^2 + 4 \frac{n^2}{k^2} \frac{\omega^2}{k^2}}}. \quad (8.26)$$

Коэффициент β показывает, во сколько раз амплитуда вынужденных колебаний, то есть наибольшее динамическое перемещение, больше статического перемещения под действием силы, равной P . Этот коэффициент называется динамическим, или коэффициентом нарастания колебаний.

Коэффициент β зависит от соотношений ω / k и n / k . При совпадении частот ω и k упругая система находится в состоянии резонанса. При этом коэффициент β равен:

$$\beta = \frac{k}{2n}.$$

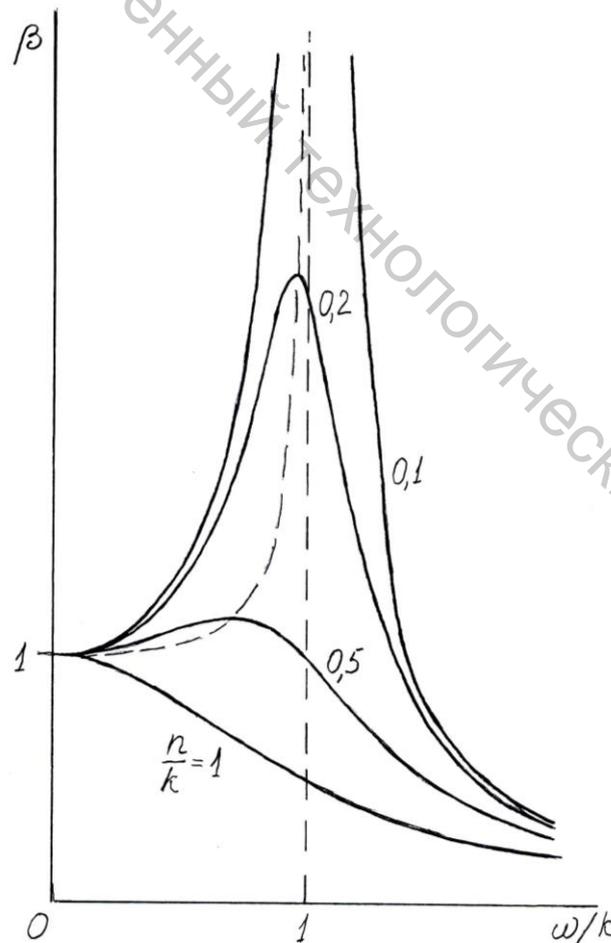


Рисунок 8.4 – Частотно-амплитудная диаграмма при различных значениях коэффициента n

Заметим, что это значение не является максимальным, хотя и близко к нему. Максимальное значение коэффициент β принимает при частоте ω возмущающей силы несколько меньшей частоты свободных колебаний k .

Взяв первую и вторую производные по отношению ω/k от выражения, стоящего в знаменателе формулы (8.26), получим значение отношения ω/k , соответствующее максимальному значению коэффициента β .

$$\frac{\omega}{k} = \sqrt{1 - 2\frac{n^2}{k^2}}. \quad (8.27)$$

После подстановки выражения (8.27) в формулу (8.26) получим:

$$\max \beta = \frac{1}{2\frac{n}{k} \sqrt{1 - \frac{n^2}{k^2}}} = \frac{1}{2\frac{n}{k} \frac{k_1}{k}}. \quad (8.28)$$

На рисунке 8.4 показана зависимость коэффициента динамичности от отношения ω/k при различных значениях отношения n/k . Здесь же штриховой линией соединены максимальные значения β .

При $n=0$, то есть при ничтожно малом сопротивлении движению, коэффициент β многократно возрастает. Но увеличение β происходит не мгновенно, так как не может быть бесконечно больших ускорений.

Вернемся к частному решению (8.17) и положим $n=0$ в системе (8.18). Второе уравнение системы (8.18) обращается в тождество, остальные уравнения принимают вид:

$$\begin{aligned} k^2 - \omega^2 D &= 0; \\ k^2 - \omega^2 B &= \frac{P}{m} \cos \gamma; \\ 2\omega D &= -\frac{P}{m} \sin \gamma. \end{aligned} \quad (8.29)$$

При $\omega \neq k$ из первого уравнения следует $D=0$.

Тогда $\sin \gamma=0$, $\cos \gamma=1$ и $B = \frac{P}{m k^2 - \omega^2}$, или с учетом форму-

лы частоты свободных колебаний при $n=0$, равной $k^2 = \frac{1}{\delta_n m}$,

$$B = u_{cm} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{k}\right)^2}.$$

Этот же результат получается при подстановке $n=0$ в формулу (8.26).

Теперь положим в системе (8.29) $\omega = k$. Из второго уравнения следует:

$$\frac{P}{m} \cos \gamma = 0,$$

значит

$$\gamma = \frac{\pi}{2}, \quad \sin \gamma = 1$$

и

$$D = -\frac{P}{2m\omega} = -\frac{P}{2mk},$$

или

$$D = -\frac{P\delta_{11}}{2} k.$$

Учитывая соотношение $u_{cm} = \delta_{11}P$, получим:

$$D = -\frac{u_{cm}}{2} k.$$

Таким образом, уравнение установившихся вынужденных колебаний при резонансе имеет вид:

$$u = -\frac{u_{cm}}{2} kt \sin\left(kt + \frac{\pi}{2}\right),$$

или

$$u = -\frac{u_{cm}}{2} kt \cos kt. \quad (8.30)$$

Как видно, неограниченное возрастание амплитуды колебаний происходит во времени линейно.

Формула (8.21), которую можно записать в виде

$$\operatorname{tg} \gamma = -\frac{2 \frac{n}{k} \frac{\omega}{k}}{1 - \left(\frac{\omega}{k}\right)^2},$$

показывает, что угол сдвига фаз также зависит от отношений n/k и ω/k .

Увеличение сопротивления движению при $\omega < k$ приводит к увеличению угла сдвига фаз. Но при резонансе $\omega = k$

$$\gamma = \frac{\pi}{2}.$$

Если частота возмущения превышает собственную частоту, то угол сдвига фаз будет больше, чем $\pi/2$ и увеличение его при возрастании отношения ω/k происходит тем медленнее, чем больше сопротивление движению.

Эти зависимости видны на рисунке 8.5.

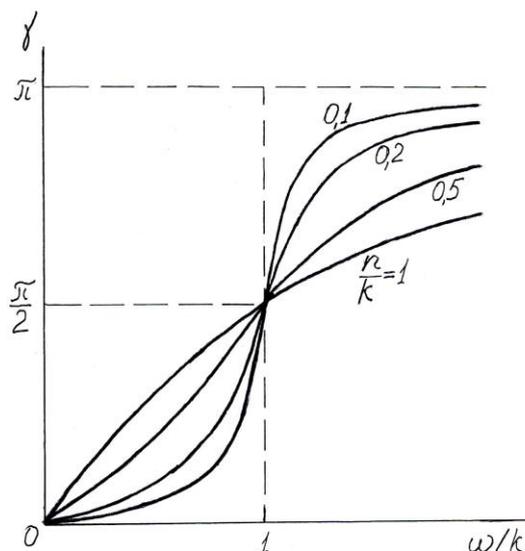


Рисунок 8.5 – Зависимость угла сдвига фаз γ от частоты возмущения ω и от сопротивления среды

8.4 Учет массы упругих элементов

В рассмотренных выше задачах полагалось, что масса тела, налагающего упругую связь на материальную точку, пренебрежительно мала. В реальных конструкциях масса пружины или балки может оказаться весьма значительной, сравнимой с массой тела, которое представляется материальной точкой. Пренебрежение инертностью пружины или балки, или иного упругого тела может привести к значительным погрешностям.

Точное решение задачи об исследовании колебаний таких систем оказывается очень громоздким и не всегда возможным. Ведь такая система представляет собой бесконечное множество взаимосвязанных материальных точек с бесконечно малыми массами. Положение такой системы определяется бесконечным множеством координат. Значит, такая система имеет бесконечное множество степеней свободы и, следовательно, бесконечное множество собственных частот.

Во многих инженерных задачах оказывается достаточным определение наименьшей собственной частоты, которая называется частотой основного тона. Приближенное значение частоты основного тона может быть найдено с помощью введения некоторых допущений.

Одно из таких допущений предложено Рэлеем. Функция перемещения элементов тела, представляющего упругую связь:

$$u = u(z, t),$$

заменяется произведением двух функций:

$$u = f(z) \varphi(t). \quad (8.31)$$

Здесь $f z$ – функция продольной координаты элемента упругого тела, характеризующая форму деформированного тела; φt – функция времени, которая является переменной обобщенной координатой. Она играет роль переменного масштабного коэффициента.

Рассмотрим применение метода Рэлея на примере задачи о свободных колебаниях консоли, изображенной на рисунке 8.6. К свободному концу консоли прикреплена сосредоточенная масса m_1 . Масса консоли m равномерно распределена по ее длине.

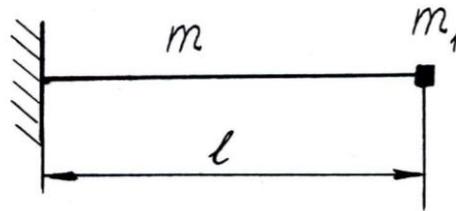


Рисунок 8.6 – Консоль с сосредоточенной массой

Если пренебречь инертностью консоли, то есть положить $m = 0$, то частота свободных колебаний консоли равна:

$$k^2 = \frac{1}{\delta_{11} m} = \frac{3EI}{ml^3}. \quad (8.32)$$

Такой же результат получим с помощью уравнения

$$\frac{d}{dt} T + \Pi = 0, \quad (8.33)$$

которое выражает закон сохранения полной механической энергии системы.

В уравнении (8.33) T – кинетическая энергия массы m_1 , равная:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{u}_1^2, \quad (8.34)$$

Π – потенциальная энергия упругой деформации консоли.

Естественно допустить, что форма деформированной безмассовой консоли с сосредоточенной массой m_1 при колебании совпадает с формой консоли, нагруженной сосредоточенной силой. Тогда

$$\Pi = \frac{1}{2} P u_1 = \frac{1}{2} \frac{u_1^2}{\delta_{11}}. \quad (8.35)$$

В выражениях потенциальной энергии (8.35) и кинетической энергии (8.34) u_1 и \dot{u}_1 – координата и скорость сосредоточенной массы m_1 .

После подстановки выражений (8.34) и (8.35) в уравнение (8.33) получим:

$$m_1 \ddot{u}_1 + \frac{1}{\delta_{11}} u_1 = 0.$$

Отсюда следует решение (8.32).

Теперь учтем распределенную массу $m \neq 0$. Кинетическая энергия деформированной системы, изображенной на рисунке 8.7.

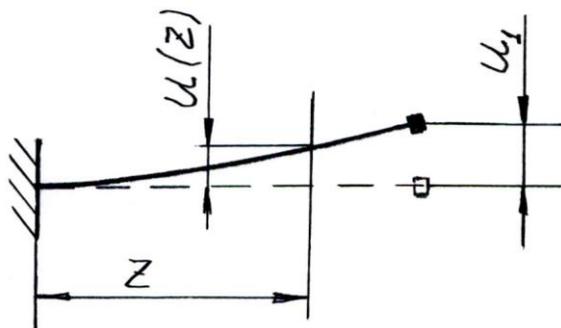


Рисунок 8.7 – Перемещение произвольного сечения консоли

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{u}_1^2 + \frac{1}{2} \int_m \dot{u}^2 dm.$$

При равномерном распределении массы m по длине консоли

$$dm = \frac{m}{l} dz,$$

тогда

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{u}_1^2 + \frac{1}{2} \frac{m}{l} \int_l \dot{u}^2 dz. \quad (8.36)$$

Представив перемещение произвольного сечения консоли в виде:

$$u = f(z) \varphi(t) = f \varphi,$$

получим

$$u_1 = f(z_1) \varphi(t) = f_1 \varphi.$$

Выражение (8.36) принимает следующий вид:

$$T = \frac{1}{2} m_1 f_1^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \frac{m}{l} \dot{\varphi}^2 \int_l f^2 dz = \frac{1}{2} A \dot{\varphi}^2. \quad (8.37)$$

Множитель A формулы (8.37) называется инерционным коэффициентом. Он равен:

$$A = m_1 f_1^2 + \frac{m}{l} \int_l f^2 dz. \quad (8.38)$$

Потенциальную энергию упругой деформации системы найдем с помощью того же представления прогиба произвольного сечения консоли:

$$\Pi = \frac{1}{2} EI \int_l u''^2 dz = \frac{1}{2} EI \varphi^2 \int_l f''^2 dz,$$

или

$$\Pi = \frac{1}{2} B \varphi^2. \quad (8.39)$$

Множитель B формулы (8.39) называется обобщенным коэффициентом жесткости или квазиупругим коэффициентом.

$$B = EI \int_l f''^2 dz. \quad (8.40)$$

Подстановкой выражений (8.37) и (8.39) в уравнение (8.33) получим:

$$A\ddot{\varphi} + B\varphi = 0.$$

Отсюда частота свободных колебаний консоли:

$$k^2 = \frac{B}{A} = \frac{EI \int_l f''^2 dz}{m_1 f_1 + \frac{m}{l} \int_l f^2 dz}. \quad (8.41)$$

В формулах (8.38) и (8.40) f – задаваемая функция. Она назначается исходя из представления нагрузки, которая, будучи приложена статически, придаст продольной оси консоли форму, близкую к форме колеблющейся балки. Таковой нагрузкой может быть, например, сосредоточенная сила, приложенная к массе m_1 , или равномерно распределенная нагрузка.

Положим, что форма колеблющейся консоли близка к форме консоли, изогнутой сосредоточенной силой (рисунок 8.8).

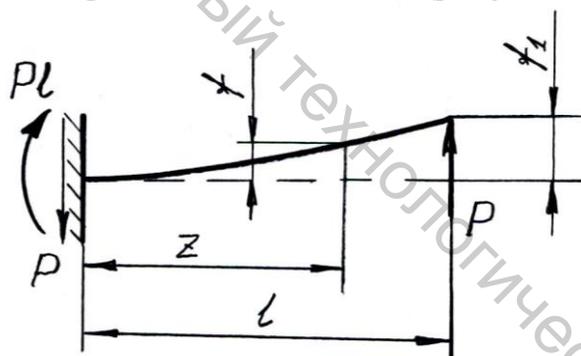


Рисунок 8.8 – Перемещение, вызванное сосредоточенной силой

Уравнение упругой линии:

$$f = \frac{1}{EI} \left(-\frac{Pl}{2} z^2 + \frac{P}{6} z^3 \right) = \frac{P}{6EI} (-3lz^2 + z^3). \quad (8.42)$$

Перемещение сечения C :

$$f_1 = f \cdot l = -\frac{Pl^3}{3EI}. \quad (8.43)$$

Инерционный коэффициент (8.38):

$$A = m_1 \left(-\frac{Pl^3}{3EI} \right)^2 + \frac{m}{l} \int_0^l \frac{P^2}{6EI^2} (9l^2 z^4 - 6lz^5 + z^6) dz = \frac{P^2 l^6}{9EI^2} \left(m_1 + \frac{33}{140} m \right) \quad (8.44)$$

Обобщенный коэффициент жесткости (8.40):

$$B = EI \int_0^l \frac{P^2}{EI^2} z - l^2 dz = \frac{P^2 l^3}{3EI}. \quad (8.45)$$

Подстановкой выражений (8.44) и (8.45) в формулу (8.41) получим:

$$k^2 = \frac{P^2 l^3}{3EI} \cdot \frac{9 EI^2}{P^2 l^6 \left(m_1 + \frac{33}{140} m \right)} = \frac{3EI}{l^3 \left(m_1 + \frac{33}{140} m \right)}. \quad (8.46)$$

Инерционный коэффициент (8.38) можно представить в виде:

$$A = f_1^2 \left[m_1 + \frac{m}{l} \int_l \left(\frac{f}{f_1} \right)^2 dz \right] = f_1^2 m_1 + m_{np}. \quad (8.47)$$

В формуле (8.47)

$$m_{np} = \frac{m}{l} \int_l \left(\frac{f}{f_1} \right)^2 dz. \quad (8.48)$$

Эта величина представляет собой массу балки, приведенную к сечению, к которому прикреплена сосредоточенная масса m_1 . То есть это такая масса, сосредоточенная в выбранном сечении, кинетическая энергия которой равна кинетической энергии распределенной массы при условии равенства скоростей сечений действительной балки и приведенной.

Подынтегральное выражение формулы (8.48) по найденным перемещениям (8.42) и (8.43):

$$\left(\frac{f}{f_1} \right)^2 = \left(\frac{3}{2} \frac{z^2}{l^2} - \frac{1}{2} \frac{z^3}{l^3} \right)^2 = 1,5\alpha^2 - 0,5\alpha^3,^2,$$

где $\alpha = z/l$.

Приведенная масса консоли:

$$m_{np} = \frac{m}{l} \int_0^l 1,5\alpha^2 - 0,5\alpha^3 l d\alpha = \frac{33}{140} m.$$

Теперь приближенное значение частоты основного тона можно определить, заменив систему, изображенную на рисунке 8.6, моделью, изображенной на рисунке 8.9.

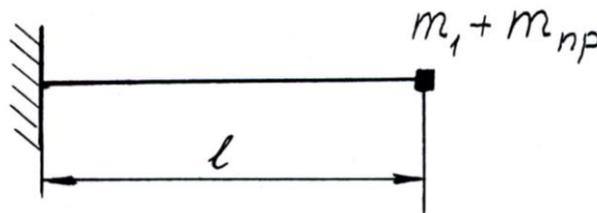


Рисунок 8.9 – Приведение распределенной массы

Тогда в соответствии с решением (8.32):

$$k^2 = \frac{3EI}{\left(m_1 + \frac{33}{140}m\right)l^3}.$$

Заметим, что, назначая форму упругой линии, то есть построив уравнение (8.42), можно опустить коэффициент перед выражением, стоящим в скобках. Тогда:

$$f = -3lz^2 + z^3, \quad f_1 = -2l^3.$$

Инерционный коэффициент (8.38):

$$A = m_1 4l^6 + \frac{m}{l} \int_0^l 9l^2 z^4 - 6lz^5 + z^6 dz = m_1 4l^6 + \frac{33}{35} ml^6 = 4l^6 \left(m_1 + \frac{33}{140}m\right).$$

Обобщенный коэффициент жесткости (8.40):

$$B = EI \int_0^l 36 z - l^2 dz = 12EI l^3.$$

По формуле (8.41) получаем тот же результат (8.46):

$$k^2 = \frac{B}{A} = \frac{12EI l^3}{4l^6 \left(m_1 + \frac{33}{140}m\right)} = \frac{3EI}{\left(m_1 + \frac{33}{140}m\right)l^3}.$$

9 Колебания стержневой системы с конечным числом степеней свободы

9.1 Свободные колебания

Система, состоящая из конечного числа упругих стержней, имеет бесконечное число степеней свободы, поскольку каждый из ее элементов представляет бесконечное множество материальных точек. Приближенное решение задачи можно получить, заменив реальную конструкцию более простой моделью с конечным числом степеней свободы.

Для построения упрощенной модели следует:

- а) выделить наиболее массивные элементы конструкции и пренебречь инертностью менее массивных ее частей;
- б) выделить наиболее жесткие элементы и пренебречь их деформацией, то есть положить их абсолютно жесткими;
- в) пренебречь размерами и вращательным движением малых элементов, то есть заменить их материальными точками.

На рисунке 9.1 изображена плоская рама, которая находится в состоянии устойчивого равновесия.

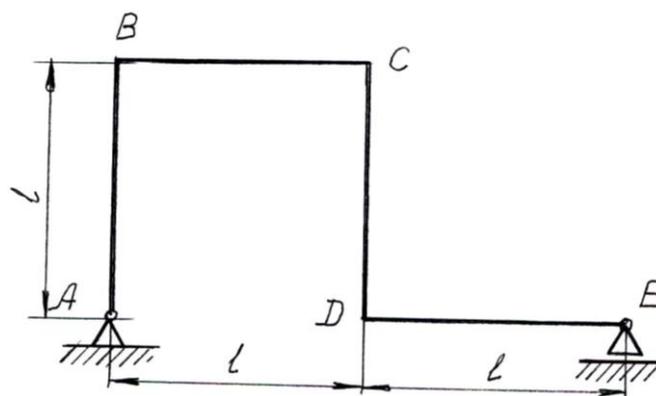


Рисунок 9.1 – Плоская рама

Масса и жесткость стержня CD значительно больше, чем других стержней. Положим стержень CD абсолютно жестким и изобразим деформированную систему, придав ей произвольное перемещение.

При этом учтем, что перемещения, вызванные изгибом стержней AB , BC и DE , значительно превышают перемещения, вызванные их деформациями растяжения-сжатия.

Такая деформированная рама изображена на рисунке 9.2.

Положение системы определяют три обобщенные координаты: горизонтальное и вертикальное перемещения центра масс u_1 , u_2 и угол поворота стержня CD u_3 .

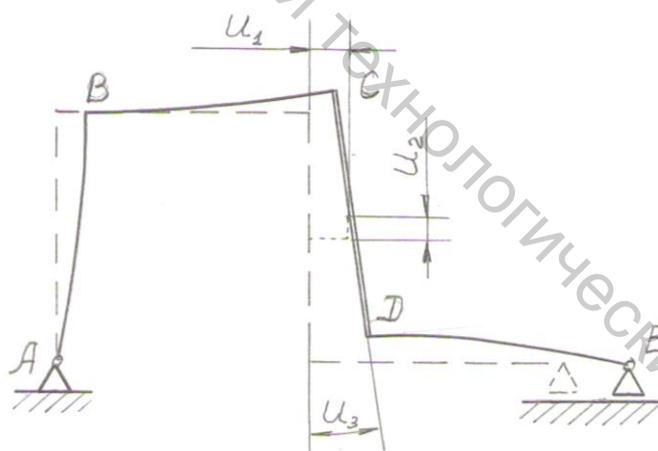


Рисунок 9.2 – Деформация плоской рамы

Таким образом, упрощенная модель исходной рамы является системой с тремя степенями свободы. Ее колебательное движение зависит от инертности стержня CD (его массы и момента инерции массы относительно центра масс) и от жесткости стержней AB , BC и DE .

Если один из трех стержней (например, стержень BC) обладает высокой, по сравнению со стержнями AB и DE , жесткостью, то система еще более упростится.

Такая рама изображена на рисунке 9.3. Положение стержня CD определяется теми же координатами u_1 , u_2 и u_3 . Но вследствие того, что

стержни BC и CD представляют собой единый жесткий элемент конструкции, угол поворота стержня CD такой же, как и угол поворота стержня BC .

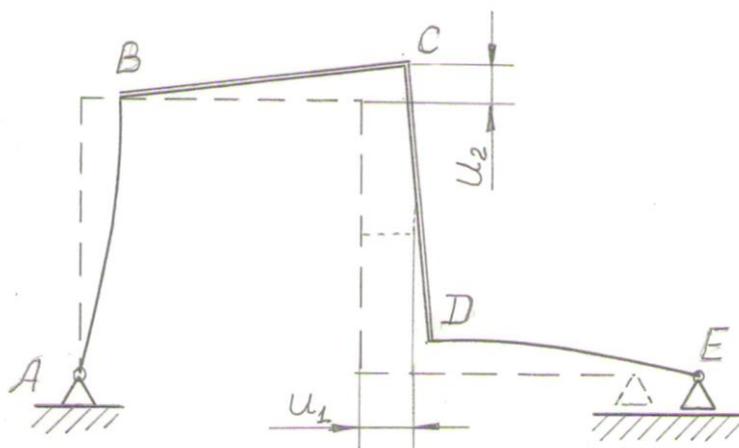


Рисунок 9.3 – Упрощенная деформация плоской рамы

Он связан с вертикальным перемещением узла C зависимостью $u_3 = u_2 / l$. Значит, независимых координат теперь только две.

Если массы гибких стержней сравнимы с массами жестких элементов конструкции, то пренебрегать их инертностью нельзя. В этом случае необходимо установить форму инерционного перемещения гибкого стержня. Поскольку истинная форма стоячей волны гибкого стержня является неизвестной, ее следует назначить так, чтобы удовлетворялись краевые условия.

Так, сечение A стержня AB может свободно поворачиваться, а сечение B повернуто на угол, равный углу поворота бруса CD . Горизонтальное перемещение этого сечения также может быть выражено через координату u_1 и угол поворота бруса CD .

Рассмотрим изображенную на рисунке 9.4 модель рамы.

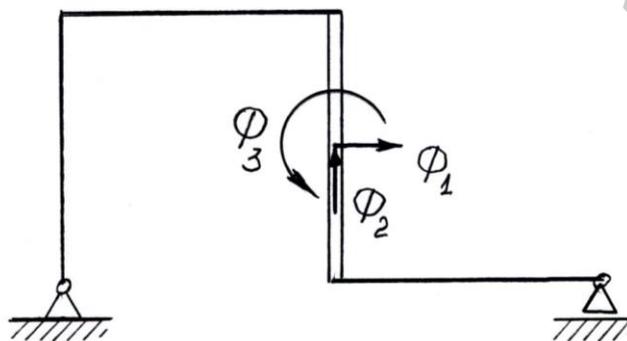


Рисунок 9.4 – Обобщенные силы инерции

Еще раз отметим, что положение системы определяется тремя обобщенными координатами u_1 , u_2 , u_3 . Деформированное состояние колеблющейся рамы в каждый момент времени идентично состоянию

статически уравновешенной системы, нагруженной силами, равными при свободных колебаниях обобщенным силам инерции бруса CD .

На рисунке 9.4 показаны силы инерции бруса CD , приведенные к его центру масс. Горизонтальная и вертикальная составляющие ϕ_1 и ϕ_2 соответствуют обобщенным координатам u_1 и u_2 . ϕ_3 – это главный момент сил инерции бруса CD относительно оси, проходящей через центр масс. Он соответствует угловой координате u_3 .

Для линейно деформируемой системы, каковой и является исследуемая конструкция, полные перемещения сечений (на основании принципа независимости действия сил) определяются как суммы перемещений, вызванных отдельными нагрузками.

$$u_i = \sum_{j=1}^n u_{ij} . \quad (9.1)$$

Здесь u_{ij} – перемещение сечения в направлении обобщенной координаты u_i , вызванное силой ϕ_j . Это перемещение равно:

$$u_{ij} = \delta_{ij} \phi_j = \delta_{ij} -m_j \ddot{u}_j . \quad (9.2)$$

В формуле (9.2) δ_{ij} – перемещение сечения в направлении координаты u_i , вызванное единичной силой, приложенной вместо силы ϕ_j . Следует учесть, что в выражении обобщенной даламберовой силы инерции:

$$\phi_j = -m_j \ddot{u}_j$$

m_j не всегда является массой.

Под m_j следует понимать меру инертности бруса в движении, определяемом координатой u_j . Так, в представлении:

$$\phi_3 = -m_3 \ddot{u}_3$$

m_3 есть момент инерции массы бруса CD относительно его центральной оси.

Теперь выражение (9.2) для системы с тремя степенями свободы представляется в виде дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} u_1 &= \delta_{11} -m_1 \ddot{u}_1 + \delta_{12} -m_2 \ddot{u}_2 + \delta_{13} -m_3 \ddot{u}_3 ; \\ u_2 &= \delta_{21} -m_1 \ddot{u}_1 + \delta_{22} -m_2 \ddot{u}_2 + \delta_{23} -m_3 \ddot{u}_3 ; \\ u_3 &= \delta_{31} -m_1 \ddot{u}_1 + \delta_{32} -m_2 \ddot{u}_2 + \delta_{33} -m_3 \ddot{u}_3 . \end{aligned} \quad (9.3)$$

Решение системы (9.3) разыскивается в виде:

$$\begin{aligned} u_1 &= A_1 \sin kt + B_1 \cos kt; \\ u_2 &= A_2 \sin kt + B_2 \cos kt; \\ u_3 &= A_3 \sin kt + B_3 \cos kt. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Здесь k – циклическая частота колебаний.

После подстановки выражений (9.4) в уравнения (9.3) и несложных преобразований получаются две подобные алгебраические системы относительно неизвестных A_1, A_2, A_3

$$\begin{aligned} \delta_{11}m_1k^2 - 1 A_1 + \delta_{12}m_2k^2 A_2 + \delta_{13}m_3k^2 A_3 &= 0; \\ \delta_{21}m_1k^2 A_1 + \delta_{22}m_2k^2 - 1 A_2 + \delta_{23}m_3k^2 A_3 &= 0; \end{aligned} \quad (9.5)$$

$$\delta_{31}m_1k^2 A_1 + \delta_{32}m_2k^2 A_2 + \delta_{33}m_3k^2 - 1 A_3 = 0$$

и относительно неизвестных B_1, B_2, B_3

$$\begin{aligned} \delta_{11}m_1k^2 - 1 B_1 + \delta_{12}m_2k^2 B_2 + \delta_{13}m_3k^2 B_3 &= 0; \\ \delta_{21}m_1k^2 B_1 + \delta_{22}m_2k^2 - 1 B_2 + \delta_{23}m_3k^2 B_3 &= 0; \end{aligned} \quad (9.6)$$

$$\delta_{31}m_1k^2 B_1 + \delta_{32}m_2k^2 B_2 + \delta_{33}m_3k^2 - 1 B_3 = 0.$$

Уравнения (9.5) и (9.6), кроме неизвестных $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$, содержат неизвестную частоту k . Найти все 7 неизвестных по шести уравнениям нельзя, но частота k может быть определена.

Ненулевое решение системы однородных уравнений (9.5) или (9.6) существует лишь при равенстве нулю определителя системы, то есть при:

$$\begin{vmatrix} \delta_{11}m_1k^2 - 1 & \delta_{12}m_2k^2 - 1 & \delta_{13}m_3k^2 - 1 \\ \delta_{21}m_1k^2 - 1 & \delta_{22}m_2k^2 - 1 & \delta_{23}m_3k^2 - 1 \\ \delta_{31}m_1k^2 - 1 & \delta_{32}m_2k^2 - 1 & \delta_{33}m_3k^2 - 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (9.7)$$

Условие (9.7) в развернутом виде представляет собой уравнение третьей степени относительно k^2 :

$$L_1k^6 + L_2k^4 + L_3k^2 - 1 = 0. \quad (9.8)$$

Здесь

$$L_1 = \delta_{11}\delta_{22}\delta_{33} + 2\delta_{12}\delta_{23}\delta_{31} - \delta_{11}\delta_{23}^2 - \delta_{22}\delta_{31}^2 - \delta_{33}\delta_{12}^2 m_1m_2m_3;$$

$$L_2 = \delta_{12}^2 - \delta_{11}\delta_{22} m_1m_2 + \delta_{23}^2 - \delta_{22}\delta_{33} m_2m_3 + \delta_{31}^2 - \delta_{33}\delta_{11} m_3m_1;$$

$$L_3 = \delta_{11}m_1 + \delta_{22}m_2 + \delta_{33}m_3.$$

Уравнение (9.8) называется *частотным*. Оно имеет три действительных положительных корня k_1^2, k_2^2, k_3^2 . Им соответствуют три значения собственной частоты k_1, k_2, k_3 . Индексы при k подбираются так, чтобы удовлетворялось условие:

$$k_1 < k_2 < k_3.$$

Частота k_1 называется *частотой основного тона*.

Несколько значений частоты свидетельствуют о том, что колебательный процесс является многочастотным и решение (9.4) теперь представляется в виде:

$$u_i = \sum_{j=1}^3 A_{ij} \sin k_j t + B_{ij} \cos k_j t, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Здесь i – номер обобщенной координаты; j – номер частоты.

Постоянные A_{ij} и B_{ij} зависят от начальных условий, но каждому значению k_j соответствует определенное соотношение амплитуд A_{ij} и B_{ij} . При подстановке значения частоты k_j в уравнения (9.5) одно из них представляется линейной комбинацией остальных уравнений, то есть независимых уравнений остается два. Таким образом, две амплитуды выразятся через выбранную одну. Если за основную амплитуду взять амплитуду колебаний первой массы A_{1j} , то получим отношение:

$$A_{2j} = n_{2j} A_{1j};$$

$$A_{3j} = n_{3j} A_{1j}.$$

Так же

$$B_{2j} = n_{2j} B_{1j};$$

$$B_{3j} = n_{3j} B_{1j}.$$

Таковы же и соотношения обобщенных координат:

$$u_i^j = A_{ij} \sin k_j t + B_{ij} \cos k_j t,$$

Значит, коэффициенты n_{ij} определяют формы, которые принимает деформированная система при колебаниях с соответствующей частотой k_j . Эти формы называются главными. Истинная мгновенная форма представляется комбинацией главных форм, при которой обобщенные координаты при найденных соотношениях амплитуд

$$u_i = \sum_{j=1}^3 n_{ij} A_{1j} \sin k_j t + B_{1j} \cos k_j t. \quad (9.9)$$

Если движение системы начинается из состояния покоя, то

$$A_{11} = 0, \quad A_{12} = 0 \text{ и } A_{13} = 0.$$

Уравнение (9.9) принимает вид:

$$u_1 = B_{11} \cos k_1 t + B_{12} \cos k_2 t + B_{13} \cos k_3 t;$$

$$u_2 = n_{21} B_{11} \cos k_1 t + n_{22} B_{12} \cos k_2 t + n_{23} B_{13} \cos k_3 t; \quad (9.10)$$

$$u_3 = n_{31} B_{11} \cos k_1 t + n_{32} B_{12} \cos k_2 t + n_{33} B_{13} \cos k_3 t.$$

Подстановка в систему (9.10) $t = 0$ приводит к системе уравнений относительно амплитуд B_{11} , B_{12} , B_{13} .

$$u_{10} = B_{11} + B_{12} + B_{13};$$

$$u_{20} = n_{21} B_{11} + n_{22} B_{12} + n_{23} B_{13};$$

$$u_{30} = n_{31} B_{11} + n_{32} B_{12} + n_{33} B_{13}.$$

Подобным образом, по начальным значениям скоростей V_{10} , V_{20} и V_{30} , определяются амплитуды A_{11} , A_{12} , A_{13} .

Построим для нашей задачи систему (9.5).

На рисунках 9.5, 9.6 и 9.7 показаны единичные нагрузки, приложенные вместо сил ϕ_j формулы (9.2), и соответствующие им эпюры изгибающих моментов \bar{M}_j .

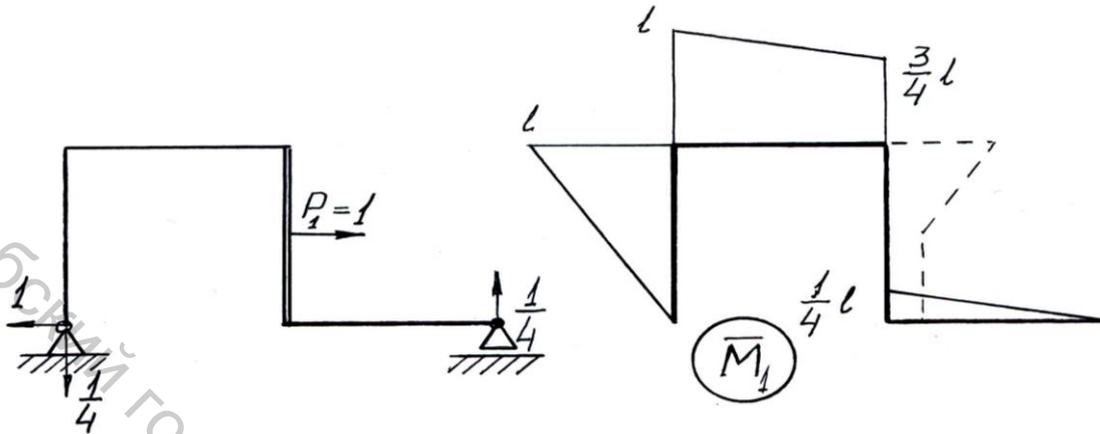


Рисунок 9.5 – Единичная нагрузка

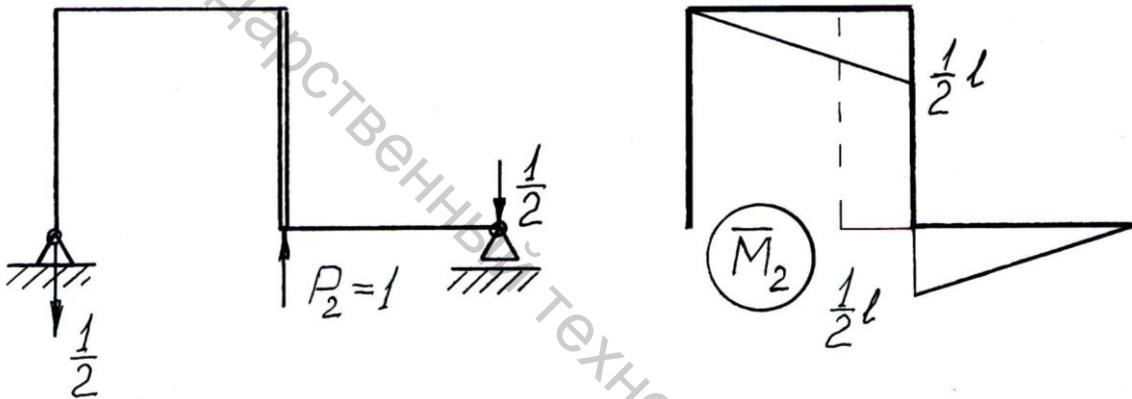


Рисунок 9.6 – Единичная нагрузка

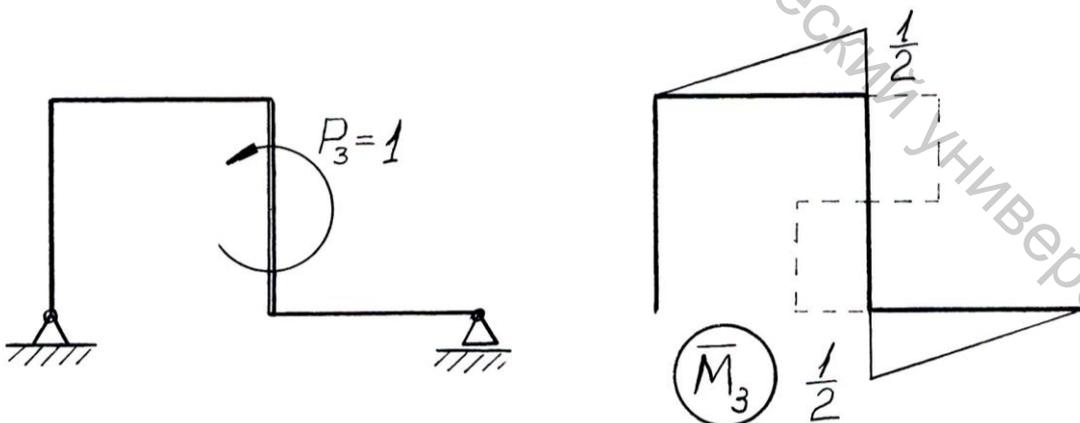


Рисунок 9.7 – Единичная нагрузка

Перемножив по Верещагину эпюры изгибающих моментов, получим:

$$EI\delta_{ij} = \bar{M}_i \bar{M}_j.$$

$$EI\delta_{11} = \bar{M}_1 \bar{M}_1 = \left(\frac{1}{2} \frac{1}{4} l\right) \frac{2}{3} \frac{l}{4} + \left(\frac{1}{2} l \cdot l\right) \frac{2}{3} l + \frac{1}{2} l \cdot l \left(\frac{2}{3} l + \frac{1}{3} \frac{3l}{4}\right) + \frac{1}{2} \frac{3}{4} l \cdot l \left(\frac{1}{3} l + \frac{2}{3} \frac{3l}{4}\right) = \frac{9}{8} l^3;$$

$$EI\delta_{12} = \bar{M}_1 \bar{M}_2 = -\left(\frac{1}{2} l \frac{1}{4}\right) \frac{2}{3} \frac{l}{2} - \left(\frac{1}{2} l \cdot l\right) \frac{1}{3} \frac{l}{2} - \left(\frac{1}{2} \frac{3}{4} l \cdot l\right) \frac{2}{3} \frac{l}{2} = -\frac{l^3}{4};$$

$$EI\delta_{13} = \bar{M}_1 \bar{M}_3 = -\left(\frac{1}{2} l \frac{1}{4}\right) \frac{2}{3} \frac{l}{2} + \left(\frac{1}{2} l \cdot l\right) \frac{1}{3} \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \frac{3}{4} l \cdot l\right) \frac{2}{3} \frac{1}{2} = -\frac{l^2}{6}; \quad (9.11)$$

$$EI\delta_{22} = \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} l\right) \frac{2}{3} \frac{l}{2} 2 = \frac{l^3}{6}; \quad EI\delta_{23} = 0;$$

$$EI\delta_{33} = \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} l\right) \frac{2}{3} \frac{l}{2} 2 = \frac{l^3}{6};$$

$$EI\delta_{21} = EI\delta_{12} = -\frac{l^3}{4}; \quad EI\delta_{31} = EI\delta_{13} = -\frac{l^2}{6};$$

$$EI\delta_{32} = EI\delta_{23} = 0.$$

При перемножении эпюр принималась во внимание одинаковая жесткость сечений EI участков AB , BC и DE , а также абсолютная жесткость бруса CD (эпюры изгибающего момента на участке CD изображены штриховой линией).

С учетом найденных значений δ_{ij} и обобщенных масс

$$m_1 = m, m_2 = m, m_3 = \frac{ml^2}{12}$$

уравнения (9.5) имеют вид:

$$\begin{aligned} \left(\frac{9l^3}{8EI} mk^2 - 1\right) A_1 - \frac{l^3}{4EI} mk^2 A_2 + \frac{l^2}{6EI} \frac{ml^2}{12} A_3 &= 0; \\ -\frac{l^3}{4EI} mk^2 A_1 + \left(\frac{l^3}{6EI} mk^2 - 1\right) A_2 + 0 &= 0; \\ \frac{l^2}{6EI} mk^2 A_1 + 0 + \left(\frac{l}{6EI} \frac{ml^2}{12} k^2 - 1\right) A_3 &= 0. \end{aligned} \quad (9.12)$$

Обозначим:

$$k^2 \frac{ml^3}{72EI} = z. \quad (9.13)$$

Система (9.12) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} 81z - 1 A_1 - 18z A_2 + z A_3 l &= 0; \\ -18z A_1 + 12z - 1 A_2 + 0 &= 0; \\ 12z A_1 + 0 + z - 1 A_3 l &= 0. \end{aligned} \quad (9.14)$$

По определителю системы (9.14):

$$\begin{vmatrix} 84z-1 & -18z & z \\ -18z & 12z-1 & 0 \\ 12z & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

получаем частотное уравнение:

$$504z^3 - 729z^2 + 94z - 1 = 0. \quad (9.15)$$

Корни уравнения (9.15):

$$z_1 = 0,0117; \quad z_2 = 0,1301; \quad z_3 = 1,305.$$

Им соответствуют частоты:

$$k_1 = 0,918\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}; \quad k_2 = 3,06\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}; \quad k_3 = 9,69\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}.$$

Для построения главных форм колебаний воспользуемся вторым и третьим уравнениями системы (9.14).

При $z = z_1 = 0,0117$ они принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} -0,2106A_{11} - 0,8596A_{21} &= 0; \\ 0,1404A_{11} - 0,9883A_{31}l &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда: $A_{21} = -0,245A_{11}$, $lA_{31} = 0,142A_{11}$.

При $z = z_2 = 0,1301$

$$-2,342A_{12} + 0,5612A_{22} = 0;$$

$$1,561A_{12} - 0,870lA_{32} = 0.$$

$$A_{22} = 4,17A_{12}, \quad lA_{32} = 1,79A_{12}.$$

При $z = z_3 = 1,305$

$$-23,49A_{13} + 14,66A_{23} = 0;$$

$$15,66A_{13} + 0,305lA_{33} = 0.$$

$$A_{23} = 1,60A_{13}, \quad lA_{33} = -51,3A_{13}.$$

Заметим, что главные формы обладают свойством ортогональности. Что это значит? Для каждой главной формы, соответствующей частоте k_j , можно построить вектор F_j , компоненты которого равны:

$$F_{jl} = \sqrt{m_l} A_{lj}.$$

То есть:

$$\vec{F}_1 \quad \sqrt{m_1} A_{11}; \quad \sqrt{m_2} A_{21}; \quad \sqrt{m_3} A_{31};$$

$$\vec{F}_2 \quad \sqrt{m_1} A_{12}; \quad \sqrt{m_2} A_{22}; \quad \sqrt{m_3} A_{32};$$

$$\vec{F}_3 \quad \sqrt{m_1} A_{13}; \quad \sqrt{m_2} A_{23}; \quad \sqrt{m_3} A_{33}.$$

Положив $A_{lj} = 1$, получим более простую систему векторов f_j .

$$\begin{aligned}\vec{f}_1 & \sqrt{m_1}; \quad \sqrt{m_2}n_{21}; \quad \sqrt{m_3}n_{31} ; \\ \vec{f}_2 & \sqrt{m_1}; \quad \sqrt{m_2}n_{22}; \quad \sqrt{m_3}n_{32} ; \\ \vec{f}_3 & \sqrt{m_1}; \quad \sqrt{m_2}n_{23}; \quad \sqrt{m_3}n_{33} .\end{aligned}$$

Признаком ортогональности векторов является равенство нулю их скалярного произведения, то есть:

$$F_j F_s = \sum_{p=1}^n F_{jp} F_{sp} = \sum_{p=1}^n m_p A_{pj} A_{ps} = 0,$$

или

$$\vec{f}_j \vec{f}_s = \sum_{s=1}^n m_p n_{pj} n_{ps} .$$

По результатам вычислений в рассмотренной задаче получим векторы:

$$\begin{aligned}\vec{f}_1 & \left(\sqrt{m}; \quad -0,245\sqrt{m_2}; \quad 0,142 \frac{l}{l} \sqrt{\frac{ml^2}{12}} \right); \\ \vec{f}_2 & \left(\sqrt{m}; \quad 4,17\sqrt{m}; \quad 1,79 \frac{l}{l} \sqrt{\frac{ml^2}{12}} \right); \\ \vec{f}_3 & \left(\sqrt{m}; \quad 1,60\sqrt{m}; \quad -5,13 \frac{l}{l} \sqrt{\frac{ml^2}{12}} \right).\end{aligned}$$

Скалярные произведения:

$$\vec{f}_1 \vec{f}_2 = m \left(1 \cdot 1 - 0,245 \cdot 4,17 + \frac{0,142 \cdot 1,79}{l} \frac{l^2}{12} \right) = -0,0005m;$$

$$\vec{f}_2 \vec{f}_3 = m \left(1 \cdot 1 - 4,17 \cdot 1,60 - \frac{1,79 \cdot 51,3}{l} \frac{l^2}{12} \right) = 0,019m;$$

$$\vec{f}_3 \vec{f}_1 = m \left(1 \cdot 1 - 1,60 \cdot 0,245 - \frac{51,3 \cdot 0,142}{l} \frac{l^2}{12} \right) = -0,00095m.$$

Результаты близки к нулю.

9.2 Уравнения Лагранжа

Частотное уравнение можно построить с помощью уравнений Лагранжа второго рода для механической системы:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i^* . \quad (9.16)$$

Здесь q_i – обобщенная координата, Q_i^* – обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q_i .

Если силы, приложенные к механической системе, являются потенциальными, то уравнение (9.16) можно записать в виде:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0, \quad (9.17)$$

где Π – потенциальная энергия упругой деформации системы в текущий момент времени t .

Заметим, что обобщенная сила Q_i^* уравнения (9.16) – это сила, приложенная к колеблющейся массе со стороны безмассового упругого скелета системы, то есть, в случае предыдущей задачи, это сила, с которой безмассовая рама действует на инертный брус CD . При решении задачи удобнее оперировать силами, приложенными к упругой раме, которые равны силам Q_i^* , но противоположны им по направлению. В этом случае уравнения (9.16) запишутся в виде:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i = 0. \quad (9.18)$$

Рассмотрим построение частотного уравнения на примере предыдущей задачи.

Положение инертного бруса CD определено обобщенными координатами u_i . *Кинетическая энергия системы* – это кинетическая энергия бруса CD , которая по теореме Кенига складывается из кинетической энергии поступательного движения его со скоростью центра масс и кинетической энергии вращательного движения его вокруг центральной оси.

$$T = T_{nc} + T_{ep} = \frac{1}{2} m \dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \frac{1}{2} \frac{ml^2}{12} \dot{u}_3^2. \quad (9.19)$$

Потенциальная энергия упругой деформации системы представляется суммой потенциальных энергий деформации трех стержней – AB , BC и DE .

Пренебрегая деформацией растяжения – сжатия при определении потенциальной энергии деформации гибких стержней ограничимся лишь деформацией изгиба. Тогда:

$$\Pi = \frac{EI}{2} \int_i \left[\frac{d^2 u}{dz^2} \right]^2 dz. \quad (9.20)$$

В формуле (9.20) $u(z)$ – перемещение сечения с продольной координатой z . Определение этого перемещения основывается на интуитивном представлении формы упругой линии изогнутого стержня. Форма упругой линии определяется функцией, удовлетворяющей граничные условия, которые зависят от способа закрепления гибкого стержня, и перемещения граничных сечений. Эти перемещения выражаются че-

рез введенные обобщенные координаты. Таким образом, потенциальная энергия деформации каждого стержня выражается через обобщенные координаты.

Рассмотрим деформацию каждого стержня в отдельности и построим уравнения упругой линии.

А. Стержень AB (рисунок 9.8)

Сечение A закреплено шарнирно-неподвижной опорой, которая допускает его поворот. Угол поворота θ_A неизвестен. Сечение B получило горизонтальное перемещение u_B , которое выражается через обобщенные координаты u_1 и u_3 (рисунок 9.2):

$$u_B = u_1 - u_3 \frac{l}{2}. \quad (9.21)$$

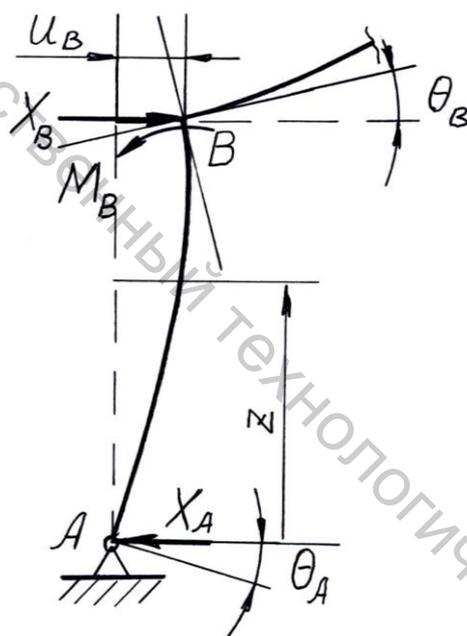


Рисунок 9.8 – Деформация стержня AB

Угол поворота сечения B θ_B неизвестен, но известно, что он такой же, как и угол поворота сечения B стержня BC . Как следует нагрузить стержень AB , чтобы получить такие перемещения?

Для поворота сечения B на угол θ_B и горизонтального смещения его u_B к сечению B следует приложить пару сил с моментом M_B . Пара сил должна быть уравновешена другой парой. Таковой будет пара, образованная силами X_A и X_B . Эти нагрузки видны на рисунке 9.8.

При построении уравнения упругой линии продольную координату z можно отсчитывать от сечения A , а можно и от сечения B . Если за начальное сечение принять сечение A , то неизвестными начальными параметрами будут X_A и θ_A . Начальные параметры u_A и M_A известны. Они

равны нулю. Если в качестве начального сечения взять сечение B , то известным будет лишь перемещение u_B . Остальные начальные параметры (θ_B, X_B и M_B) – неизвестны.

Остановимся на первом варианте.

$$EIu = -EI\theta_A z + \frac{1}{6} X_A z^3. \quad (9.22)$$

По краевым условиям $u|_l = -u_B$, $u'|_l = \theta_B$ получим два уравнения:

$$\begin{aligned} -EI\theta_A l + \frac{X_A l^3}{6} &= -EIu_B; \\ -EI\theta_A + \frac{X_A l^2}{2} &= EI\theta_B. \end{aligned} \quad (9.23)$$

Уравнения (9.23) содержат три неизвестных. Найти их можно лишь при исследовании перемещений стержня BC .

Б. Стержень BC (рисунок 9.9)

Поскольку продольные деформации стержней вызывают незначительные перемещения, положим, что горизонтальные перемещения всех сечений стержня BC одинаковы. На рисунке 9.9 указаны лишь вертикальные перемещения сечений. Сечение B повернуто на угол θ_B , который, как отмечалось, равен углу поворота сечения B стержня AB . Сечение C получило вертикальное перемещение $u_C = u_2$ и угловое $\theta_C = u_3$.

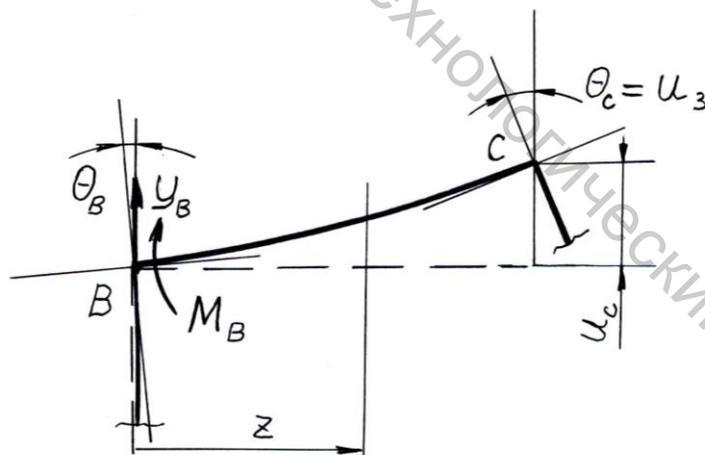


Рисунок 9.9 – Деформация стержня BC

Выберем в качестве начального сечение B . К нему приложены сила Y_B и пара сил, момент которой M_B . Здесь следует учесть, что момент M_B на рисунке (9.8) выражает действие стержня BC на стержень AB , а момент M_B на рисунке (9.9) выражает действие стержня AB на стержень BC . Поэтому на рисунках (9.8) и (9.9) эти моменты при равных алгебраических значениях имеют противоположные направления.

Уравнение упругой линии:

$$EIu = EI\theta_B z + \frac{1}{2} M_B z^2 + \frac{1}{6} Y_B z^3. \quad (9.24)$$

По краевым условиям

$$u|_l = u_2, \quad u'|_l = u_3$$

получим уравнения

$$\begin{aligned} EIu &= EI\theta_B l + \frac{1}{2} M_B l^2 + \frac{1}{6} Y_B l^3; \\ EIu_3 &= EI\theta_B + M_B l + \frac{1}{2} Y_B l^2. \end{aligned} \quad (9.25)$$

Уравнения (9.25) кроме неизвестного угла θ_B содержат неизвестные момент M_B и силу Y_B .

Дополним систему уравнений (9.23) и (9.25) уравнением статики:

$$lX_A - M_B = 0$$

и равенством (9.21) и получим следующее решение:

$$\begin{aligned} \theta_A &= \frac{1}{7l} (9u_1 + 3u_2 - 5,5u_3 l); \\ \theta_B &= \frac{1}{7l} (-3u_1 + 6u_2 - 0,5u_3 l); \\ X_A &= \frac{6EI}{7l^3} (2u_1 + 3u_2 - 2u_3 l); \\ Y_B &= \frac{6EI}{7l^3} (-3u_1 - 8u_2 + 6,5u_3 l); \\ M_B &= \frac{6EI}{7l^2} (2u_1 + 3u_2 - 2u_3 l). \end{aligned} \quad (9.26)$$

Перейдем к определению потенциальной энергии.

$$\Pi = \frac{EI}{2} \int_l u''^2 dz.$$

Стержень AB .

$$u'' = \frac{1}{EI} X_A z.$$

$$\Pi_{AB} = \frac{EI}{2} \int_0^l \frac{1}{EI} X_A^2 z^2 dz = \frac{X_A^2 l^3}{EI \cdot 6} = \frac{6EI}{49l^3} (2u_1 + 3u_2 - 2u_3 l)^2. \quad (9.27)$$

Стержень BC .

$$u'' = \frac{1}{EI} (M_B + Y_B z)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{BC} &= \frac{EI}{2} \int_0^l \frac{1}{EI} M_B + Y_B z^2 dz = \frac{1}{2EI} \left(M_B^2 l + M_B Y_B l^2 + \frac{1}{3} Y_B^2 l^3 \right) = \\ &= \frac{6EI}{49l^3} 3u_1^2 + 19u_2^2 + 15,25u_3^2 l^2 + 9u_1 u_2 - 6u_1 u_3 l - 33,5u_2 u_3 l \end{aligned} \quad (9.28)$$

Перейдем к стержню DE (рисунок 9.10).

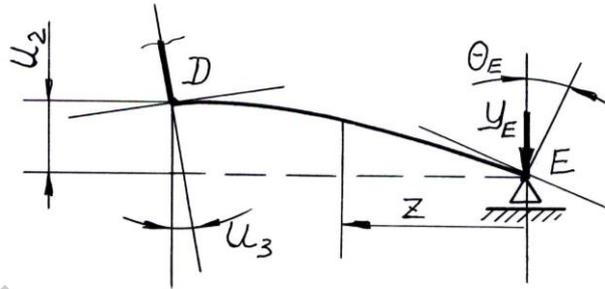


Рисунок 9.10 – Стержень DE

Уравнение упругой линии:

$$EIu = EI\theta_E z - \frac{1}{6} Y_E z^3. \quad (9.29)$$

По краевым условиям

$$u|_l = u_2; \quad u'|_l = -u_3$$

получим уравнения

$$\begin{aligned} EI\theta_E l - \frac{1}{6} Y_E l^3 &= u_2; \\ EI\theta_E - \frac{1}{2} Y_E l^2 &= -u_3. \end{aligned} \quad (9.30)$$

Решение уравнений (9.30):

$$\begin{aligned} \theta_E &= \frac{1}{2l} 3u_2 + u_3 l; \\ Y_E &= \frac{3EI}{l^3} u_2 + u_3 l. \end{aligned}$$

Потенциальная энергия деформации стержня DE .

$$\begin{aligned} u'' &= -\frac{1}{EI} Y_E z; \\ \Pi_{DE} &= \frac{EI}{2} \int_0^l \frac{1}{EI} Y_E^2 z^2 dz = \frac{Y_E^2 l^3}{6EI} = \frac{3EI}{2l^3} u_2 + u_3 l^2. \end{aligned} \quad (9.31)$$

Если какой-либо стержень системы закреплен так, что одно из крайних сечений его имеет возможность свободно поворачиваться, то его перемещение можно сопоставить с перемещениями консоли, нагруженной на конце сосредоточенной силой (рисунок 9.11).

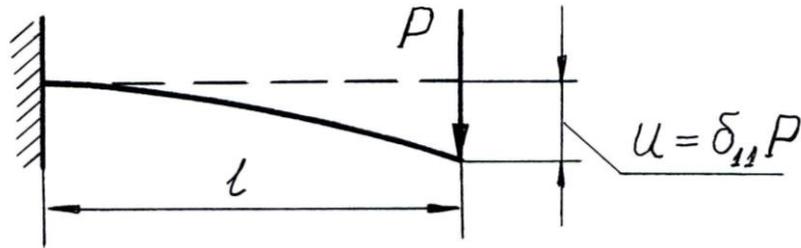


Рисунок 9.11 – Деформация консоли

Потенциальная энергия деформации такой консоли равна:

$$\Pi = \frac{1}{2} Pu = \frac{1}{2} \frac{u^2}{\delta_{11}},$$

где

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{3EI}$$

Значит

$$\Pi = \frac{3EI}{2l^3} u^2. \quad (9.32)$$

На рисунке 9.12 показано положение стержня DE в состоянии равновесия системы и в деформированном состоянии (D_1E_1).

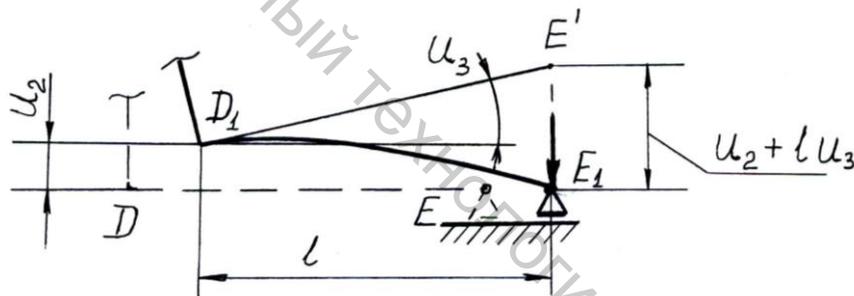


Рисунок 9.12 – Деформация стержня DE

Это перемещение можно осуществить в два этапа. Сначала переместить стержень как абсолютно жесткий в положение D_1E_1 . Затем, зафиксировав сечение D , действием на сечение E сосредоточенной силой (равной реакции опоры E) переместить его в положение E_1 . При этом перемещении его деформации аналогичны деформациям консоли, изображенной на рисунке 9.11. Прогиб u формулы (9.32) равен $u_2 + lu_3$ и потенциальная энергия деформации стержня DE

$$\Pi_{DE} = \frac{3EI}{2l^3} (u_2 + lu_3)^2.$$

Эта закономерность может использоваться в целях проверки определения потенциальной энергии деформации стержня, один конец которого закреплен с помощью шарнира. На рисунке 9.13 изображена деформация стержня AB .

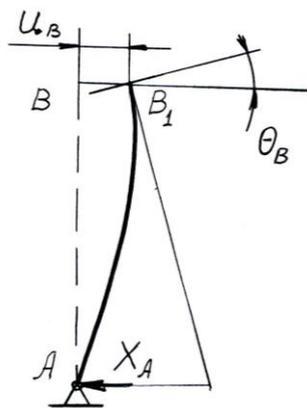


Рисунок 9.13 – Деформация стержня AB

По найденному значению угла θ_B определим параметр u формулы (9.32):

$$u = u_B + l\theta_B = u_1 - \frac{1}{2}lu_3 + \frac{1}{7}(-3u_1 + 6u_2 - 0,5lu_3) = \frac{2}{7}2u_1 + 3u_2 - 2u_3l.$$

Потенциальная энергия:

$$\Pi_{AB} = \frac{3EI}{2l^3}u^2 = \frac{3EI}{2l^3} \frac{4}{49} (2u_1 + 3u_2 - 2u_3l)^2 = \frac{6EI}{49l^3} (2u_1 + 3u_2 - 2u_3l)^2.$$

Этот результат совпадает с выражением (9.27).

Теперь потенциальная энергия упругой деформации всей рамы с учетом выражений (9.27), (9.28), (9.31)

$$\dot{I} = \dot{I}_{AB} + \dot{I}_{BC} + \dot{I}_{DE} = \frac{3EI}{7l^3} [2u_1^2 + 11,5u_2^2 + 9u_3^2l^2 + 6u_1u_2 - 4lu_1u_3 - 6lu_2u_3]. \quad (9.33)$$

Перейдем к построению уравнений Лагранжа.

По выражению (9.19):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_1} \right) &= m\ddot{u}_1; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_2} \right) &= m\ddot{u}_2; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_3} \right) &= \frac{ml^2}{12} \ddot{u}_3. \end{aligned}$$

По выражению (9.33):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial u_1} &= \frac{6EI}{7l^3} (2u_1 + 3u_2 - 2u_3l); \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_2} &= \frac{6EI}{7l^3} (3u_1 + 11,5u_2 - 3u_3l); \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_3} &= \frac{6EI}{7l^2} (-2u_1 - 3u_2 + 9u_3l). \end{aligned} \quad (9.34)$$

Подстановкой выражений (9.34) в формулу (9.17) получим три дифференциальных уравнения:

$$\begin{aligned} m\ddot{u}_1 + \frac{6EI}{7l^3} 2u_1 + 3u_2 - 2u_3l &= 0; \\ m\ddot{u}_2 + \frac{6EI}{7l^3} 3u_1 + 11,5u_2 - 3u_3l &= 0; \\ \frac{ml^2}{12}\ddot{u}_3 + \frac{6EI}{7l^3} -2u_1 - 3u_2 + 9u_3l &= 0. \end{aligned} \quad (9.35)$$

Представим решение уравнений (9.35) в виде:

$$u_i = A_i \sin kt$$

и после введения обозначения (9.13) получим алгебраическую систему:

$$\begin{aligned} 84z - 2 A_1 - 3A_2 + 2A_3l &= 0; \\ -3A_1 + 84z - 11,5 A_2 + 3A_3l &= 0; \\ 2A_1 + 3A_2 + 7z - 9 A_3l &= 0. \end{aligned} \quad (9.36)$$

Приравняв нулю определитель однородной системы (9.36)

$$\begin{vmatrix} 84z - 2 & -3 & 2 \\ -3 & 84z - 11,5 & 3 \\ 2 & 3 & 7z - 9 \end{vmatrix} = 0,$$

получим частотное уравнение:

$$49392z^3 - 71442z^2 + 9212z - 98 = 0,$$

или после сокращения:

$$504z^3 - 729z^2 + 94z - 1 = 0,$$

что совпадает с выражением (9.15).

Теперь обратимся к формуле (9.18) и построим уравнения Лагранжа с помощью обобщенных сил Q_i .

Вернемся к рисунку 9.4 и вместо сил ϕ_1 , ϕ_2 и ϕ_3 приложим обобщенные силы Q_1 , Q_2 и Q_3 , соответствующие обобщенным координатам u_1 , u_2 и u_3 (рисунок 9.14). Совместное действие этих сил вызывает перемещения u_1 , u_2 , u_3

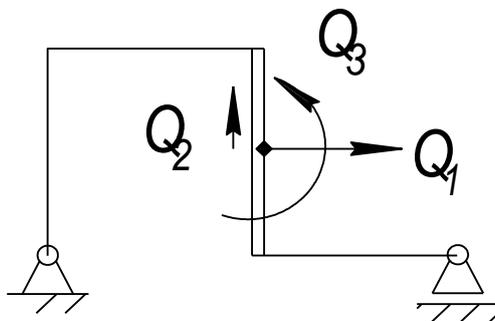


Рисунок 9.14 – Обобщенные силы

Найдем эти силы как корни системы уравнений метода сил

$$\sum_{i=1}^n \delta_{ij} Q_j = u_i; \quad i = 1, 2, 3.$$

По найденным ранее коэффициентам δ_{ij} строим систему:

$$\left. \begin{aligned} \frac{9l^3}{8EI} Q_1 - \frac{l^3}{4EI} Q_2 + \frac{l^2}{6EI} Q_3 &= u_1; \\ -\frac{l^3}{4EI} Q_1 + \frac{l^3}{6EI} Q_2 + 0 &= u_2; \\ \frac{l^2}{6EI} Q_1 + 0 + \frac{l}{6EI} Q_3 &= u_3 \end{aligned} \right\}. \quad (9.37)$$

Решение системы (9.37):

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{6EI}{7l^3} (2u_1 + 3u_2 - 2lu_3); \\ Q_2 &= \frac{6EI}{7l^3} (3u_1 + 11,5u_2 - 3lu_3); \\ Q_3 &= \frac{6EI}{7l^3} (-2u_1 - 3u_2 - 9lu_3). \end{aligned} \quad (9.38)$$

Как видим, значения обобщенных сил, полученные с помощью канонических уравнений метода сил, полностью совпадают с выражениями (9.34).

9.3 Учет массы гибких элементов стержневой системы

Перейдем к более точному решению задачи при определении кинетической энергии системы с учетом инертности гибких стержней.

Кинетическая энергия гибкого стержня определяется по формуле

$$T = \frac{m}{2l} \int_0^l v^2 dz. \quad (9.39)$$

Здесь v – скорость центра тяжести поперечного сечения, положение которого определяется продольной координатой z .

При отсутствии продольных перемещений сечений

$$v = \frac{d}{dt} u, \quad z, t,$$

где u – поперечное перемещение сечения, зависящее от времени и формы стоячей волны. Интуитивное представление формы изогнутого стержня уже использовалось при определении потенциальной энергии упругой деформации стержней AB , BC , DE . Она назначалась для каждого стержня исходя из граничных условий. То есть определялась нагрузка, с помощью которой конечные сечения стержня получают заданные перемещения. Затем строилось уравнение упругой линии деформиро-

ванного стержня, которое мы будем принимать за уравнение стоячей волны.

Поскольку эти уравнения представляются линейными функциями обобщенных координат, то и поперечные скорости сечений представляются такими же линейными функциями обобщенных скоростей.

По уравнению (9.22) упругой линии стержня AB

$$\dot{u} = -\theta_A z - \frac{1}{6EI} \dot{X}_A z^3. \quad (9.40)$$

Подстановкой выражения (9.40) в формулу (9.39) получим:

$$T_{AB} = \frac{m_{AB}}{2} \left(\frac{1}{3} \dot{\theta}_A l^2 - \frac{1}{15EI} \dot{\theta}_A \dot{X}_A l^4 + \frac{1}{252 EI^2} \dot{X}_A^2 l^6 \right). \quad (9.41)$$

Сечения стержня BC кроме поперечного смещения получают продольные перемещения со скоростью $\dot{u}_1 - \frac{1}{2} l \dot{u}_3$. Кинетическая энергия стержня BC

$$T_{BC} = \frac{1}{2} m_{BC} \left(\dot{u}_1 - \frac{1}{2} l \dot{u}_3 \right)^2 + \frac{m_{BC}}{2l} \int_l \dot{u}^2 dz. \quad (9.42)$$

В формуле (9.42) u – перемещение, определяемое формулой (9.24). С учетом выражения (9.24) интеграл формулы (9.42) принимает вид:

$$\int_0^l \dot{u}^2 dz = \frac{l^3}{3} \dot{\theta}_3^2 + \frac{l^5}{20 EI^2} \dot{M}_B^2 + \frac{l^7}{252 EI^2} \dot{Y}_B^2 + \frac{l^4}{4EI} \dot{\theta}_B \dot{M}_B + \frac{l^5}{15EI} \dot{\theta}_B \dot{Y}_B + \frac{l^6}{36 EI^2} \dot{M}_B \dot{Y}_B. \quad (9.43)$$

Формулы (9.41) и (9.43) содержат производные по времени. Они выражаются через обобщенные скорости в соответствии с формулами (9.26):

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_A &= \frac{1}{7l} (9\dot{u}_1 + 3\dot{u}_2 - 5,5\dot{u}_3 l) ; \\ \dot{\theta}_B &= \frac{1}{7l} (-3\dot{u}_1 + 6\dot{u}_2 - 0,5\dot{u}_3 l) ; \\ \dot{X}_A &= \frac{6EI}{7l^3} (2\dot{u}_1 + 3\dot{u}_2 - 2\dot{u}_3 l) ; \\ \dot{Y}_B &= \frac{6EI}{7l^3} (-3\dot{u}_1 - 8\dot{u}_2 + 6,5\dot{u}_3 l) ; \\ \dot{M}_B &= \frac{6EI}{7l^2} (2\dot{u}_1 + 3\dot{u}_2 - 2\dot{u}_3 l) . \end{aligned} \quad (9.44)$$

После подстановки выражений (9.44) в формулы (9.41) и (9.43) будем иметь:

$$T_{AB} = \frac{m_{AB}}{98} (20,37\dot{u}_1^2 + 0,6857\dot{u}_2^2 + 6,255l^2\dot{u}_3^2 + 6,514\dot{u}_1\dot{u}_2 - 22,54l\dot{u}_1\dot{u}_3 - 3,714l\dot{u}_2\dot{u}_3) ; \quad (9.45)$$

$$T_{BC} = \frac{m_{BC}}{2} \left(\dot{u}_1 - \frac{1}{2} \dot{u}_3 \right)^2 + \frac{m_{BC}}{98} 0,08571 \dot{u}_1^2 + 21,14 \dot{u}_2^2 +$$

$$+ 0,5190 l^2 \dot{u}_3^2 - 1,643 \dot{u}_1 \dot{u}_2 + 0,3286 l \dot{u}_1 \dot{u}_3 - 6,007 l \dot{u}_2 \dot{u}_3 . \quad (9.46)$$

Сечения стержня DE получают продольные перемещения со скоростью $\dot{u}_2 + \frac{1}{2} l \dot{u}_3$ и поперечные перемещения, определяемые формулой (9.29). Кинетическая энергия стержня DE

$$T_{DE} = \frac{1}{2} m_{DE} \left(\dot{u}_2 + \frac{1}{2} l \dot{u}_3 \right)^2 + \frac{m_{DE}}{2} \int_l \dot{u}^2 dz .$$

С учетом выражений (9.30) получим:

$$T_{DE} = \frac{m_{DE}}{2} \left(\dot{u}_2 + \frac{1}{2} l \dot{u}_3 \right)^2 + \frac{m_{DE}}{98} 0,4857 \dot{u}_2^2 + 0,714 l \dot{u}_2 \dot{u}_3 + 0,01905 l^2 \dot{u}_3^2 . \quad (9.47)$$

Кинетическая энергия жесткого стержня CD представлена формулой (9.19).

Положим для примера:

$$m_{CD} = m_1, \quad m_{AB} = 0,25m, \quad (9.48)$$

$$m_{BC} = 0,2m, \quad m_{DE} = 0,1m.$$

После подстановки значений (9.48) в формулы (9.45), (9.46) и (9.47) получим выражение кинетической энергии всей системы:

$$T = T_{AB} + T_{BC} + T_{CD} + T_{DE} = \frac{m}{2} 1,454 \dot{u}_1^2 + 1,16 \dot{u}_2^2 + 0,2077 l^2 \dot{u}_3^2 +$$

$$+ 0,02653 \dot{u}_1 \dot{u}_2 - 0,1637 l \dot{u}_1 \dot{u}_3 - 0,01776 l \dot{u}_2 \dot{u}_3 .$$

Уравнения Лагранжа с учетом формул (9.33) принимают следующий вид:

$$m 1,454 \ddot{u}_1 + 0,01326 \ddot{u}_2 - 0,008485 l \ddot{u}_3 + \frac{6EI}{7l^3} 2u_1 + 3u_2 - 2lu_3 = 0;$$

$$m 0,01326 \ddot{u}_1 + 1,136 \ddot{u}_2 - 0,00888 l \ddot{u}_3 + \frac{6EI}{7l^3} 3u_1 + 11,5u_2 - 3lu_3 = 0; \quad (9.49)$$

$$m 0,08485 \ddot{u}_1 + 0,00888 \ddot{u}_2 - 0,2077 l \ddot{u}_3 + \frac{6EI}{7l^3} 2u_1 + 3u_2 - 9lu_3 = 0.$$

Представив решение уравнений (9.49) в виде

$$u_i = A_i \sin kt$$

с помощью подстановки

$$\frac{ml^3}{72EI} k^2 = z ,$$

получим алгебраическую систему:

$$\begin{aligned}
 122,2z - 2 A_1 + 1,114z - 3 A_2 - 6,874z - 2 lA_3 &= 0; \\
 1,114z - 3 A_1 + 97,67z - 11,5 A_2 - 0,7466z - 3 lA_3 &= 0; \quad (9.50) \\
 - 6,874z - 2 A_1 - 0,7466z - 3 A_2 + 17,45z - 9 lA_3 &= 0.
 \end{aligned}$$

Приравняв нулю определитель системы (9.50), получим частотное уравнение:

$$2077z^3 - 1342z^2 + 131,8z - 1 = 0. \quad (9.51)$$

Решение частотного уравнения (9.51):

$$z_1 = 0,008275; \quad z_2 = 0,1103; \quad z_3 = 0,5275.$$

Этим значениям параметра z соответствуют циклические частоты:

$$k_1 = 0,772\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}; \quad k_2 = 2,82\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}; \quad k_3 = 6,16\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}.$$

Заметим, что повышение инертности системы приводит к снижению частоты свободных колебаний.

10 Пример расчетно-графической работы

10.1 Задание

Для изображенной на рисунке (10.1) системы построить упрощенную модель, определить число степеней свободы, резонансные частоты и построить главные формы колебаний.

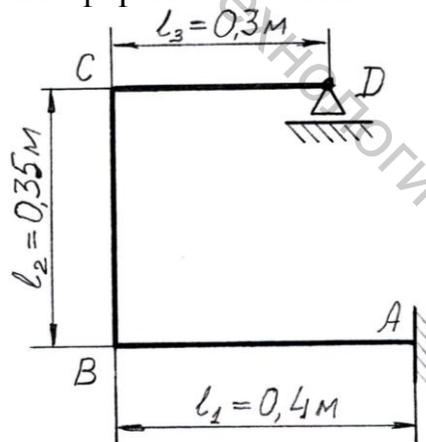


Рисунок 10.1 – Заданная стержневая система

Исходные данные:

$$l_1 = 0,4 \text{ м}; \quad l_2 = 0,35 \text{ м}; \quad l_3 = 0,3 \text{ м}.$$

Сечение стержней AB и CD (рисунок 10.2).

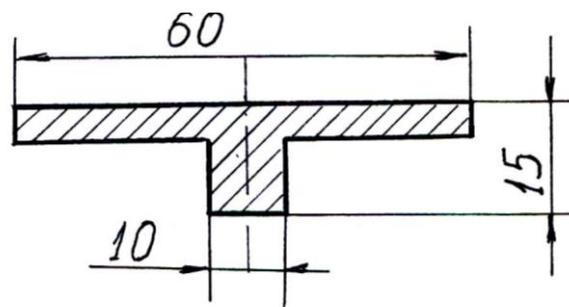


Рисунок 10.2 – Сечение стержней AB и CD

Сечение стержня BC (рисунок 10.3).

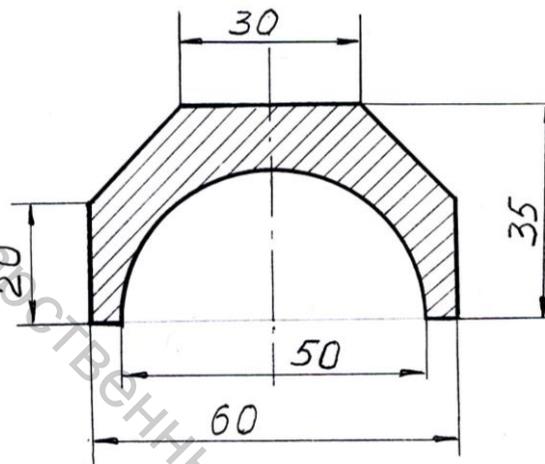


Рисунок 10.3 – Сечение стержня BC

Заданная трехстержневая система имеет бесконечно большое число степеней свободы.

Придав стержням простые деформированные формы, получим упрощенную расчетную модель, положение которой определяется линейными и угловыми перемещениями граничных сечений стержней.

Такая деформированная система изображена на рисунке 10.4.

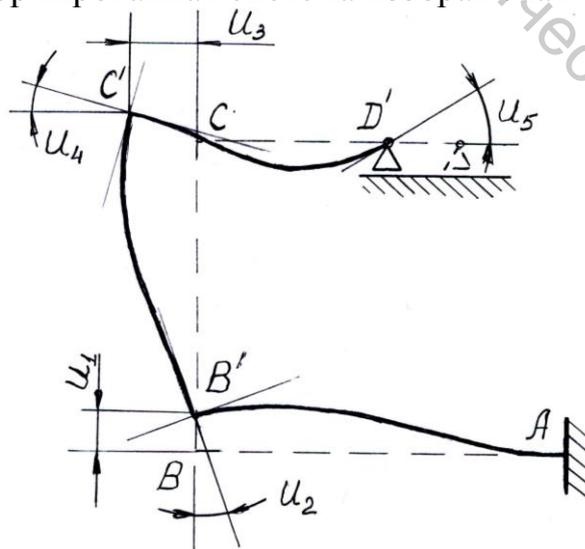


Рисунок 10.4 – Произвольная деформация рамы

Здесь учтены лишь изгибные деформации. То есть полагается, что вертикальное перемещение сечения C равно вертикальному перемещению сечения B . Так же равны горизонтальные перемещения сечений C и D . Дальнейшее упрощение системы и построение расчетной схемы возможно лишь при анализе инерционных характеристик заданной конструкции и характеристик жесткости ее элементов.

Решение задачи состоит из следующих этапов:

1. Определение геометрических характеристик сечений стержневой системы.
2. Определение инерционных характеристик элементов системы.
3. Построение упрощенной модели и введение обобщенных координат.
4. Построение уравнений упругой линии гибких элементов системы.
5. Определение потенциальной энергии упругой деформации.
6. Определение кинетической энергии системы.
7. Построение уравнений Лагранжа второго рода.
8. Построение и решение частотного уравнения.
9. Определение и построение главных форм колебаний.

10.2 Геометрические характеристики сечений

Сечение стержней AB и CD .

Вводим вспомогательную систему координат XOY (рисунок 10.5)

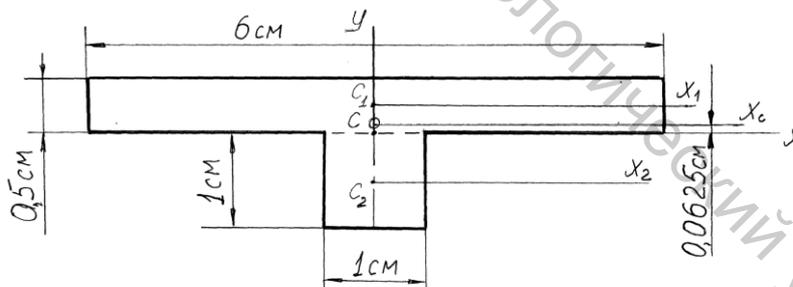


Рисунок 10.5 – Сечение гибкого стержня

Представим сечение совокупностью двух прямоугольников. Их площади

$$A_1 = 6 \cdot 0,5 = 3 \text{ см}^2;$$

$$A_2 = 1 \cdot 1 = 1 \text{ см}^2.$$

Площадь составной фигуры $A = 3 + 1 = 4 \text{ см}^2$.

Ордината центра тяжести составной фигуры (точки C)

$$y_c = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A} = \frac{3 \cdot 0,25 + 1 \cdot (-0,5)}{4} = 0,0625 \text{ см.}$$

Момент инерции фигуры относительно оси X_C

$$I_{xc} = \frac{6 \cdot 0,5^3}{12} + 3 \cdot 0,25 - 0,0625^2 + \frac{1 \cdot 1^3}{12} + 1 \cdot 0,0625 + 0,5^2 = 0,5677 \text{ см}^4$$

Сечение стержня BC (рисунок 10.6).

Вспомогательная ось X проходит через центр окружности.

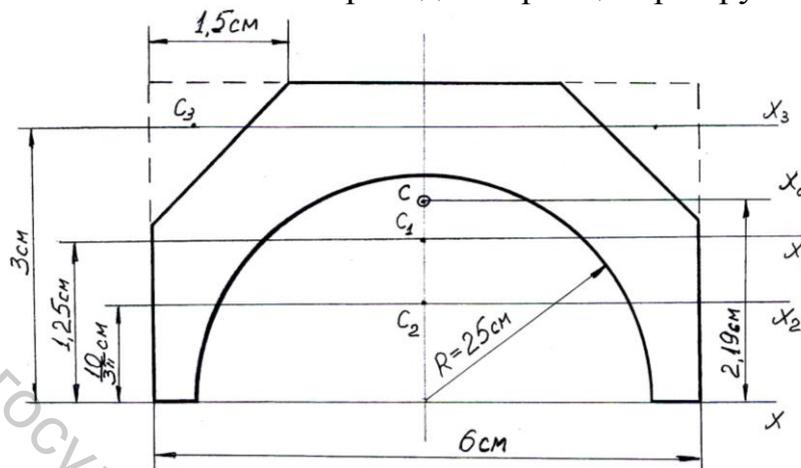


Рисунок 10.6 – Сечение жесткого стержня

Сечение представляется совокупностью прямоугольника с положительной площадью и полукруга и двух треугольников с отрицательной площадью.

$$A_1 = 6 \cdot 3,5 = 21 \text{ см}^2;$$

$$A_2 = -\frac{\pi 5^2}{8} = -3,125\pi = 9,817 \text{ см}^2;$$

$$A_3 = A_4 = -\frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 1,5 = -1,125 \text{ см}^2.$$

Площадь сечения $A = 21 - 3,125\pi - 2 \cdot 1,125 = 8,939 \text{ см}^2$. Центр тяжести полукруга удален от оси X на расстояние

$$y_2 = \frac{2d}{3} \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{10}{3\pi} \text{ см.}$$

Ордината центра тяжести составной фигуры

$$y_c = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + 2A_3 y_3}{A} = \frac{1}{8,933} \left(21 \frac{3,5}{2} - 3,125\pi \frac{10}{3\pi} - 2 \cdot 1,125 \cdot 3 \right) = 2,192 \text{ см.}$$

Момент инерции составной фигуры относительно центральной оси

$$I_{xc} = \left[\frac{6 \cdot 3,5^3}{12} + 21 \cdot 1,75 - 2,192^2 \right] - \left[\frac{\pi 5^4}{128} - \frac{\pi 5^2}{8} \left(\frac{10}{3\pi} \right)^2 + \frac{\pi 5^2}{8} \left(\frac{10}{3\pi} - 2,192 \right)^2 \right] - 2 \left[1,5 \frac{1,5^3}{36} + 1,125 \cdot 3 - 2,192^2 \right] = 6,946 \tilde{m}^4$$

10.3 Характеристики инертности стержней

Приняв плотность стали $\gamma = 7,8 \text{ г/см}^3$, получим массу стержней

$$m_{AB} = 7,8 \cdot 4 \cdot 40 = 1248 = 1,24 \text{ кг};$$

$$m_{BC} = 7,8 \cdot 8,933 \cdot 35 = 2439 = 2,439 \text{ кг}; \quad (10.1)$$

$$m_{CD} = 7,8 \cdot 4 \cdot 30 = 936 = 0,936 \text{ кг}.$$

10.4 Построение упрощенной модели

Момент инерции площади сечения стержня BC в 12,2 раза больше момента инерции сечения стержней AB и CD . При этом масса стержня BC почти в 2 раза больше массы стержня AB и в 2,5 раза больше массы стержня CD .

Пренебрегая деформацией стержня BC получим упрощенную модель системы, состоящей из абсолютно жесткого стержня BC и безмассовых стержней AB и CD . Такая система изображена на рисунке 10.7.

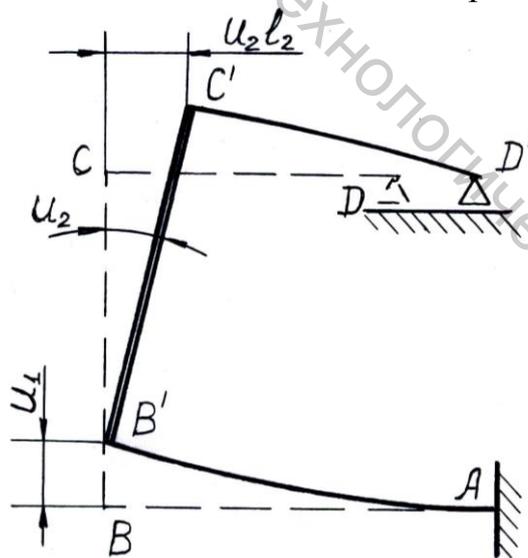


Рисунок 10.7 – Обобщенные координаты

Положение системы определим двумя координатами: вертикальным смещением узла $B - u_1$ и углом поворота стержня $B - u_2$.

Поскольку стержень BC участвует в плоско-параллельном движении, следует определить момент инерции его массы относительно центральной оси.

Момент инерции массы стержня относительно поперечной оси X

$$I_x^m = \int_m z^2 + y^2 dm.$$

Здесь элемент массы $dm = \gamma dV = \gamma dzdA$.

$$I_x^m = \gamma \int_V z^2 + y^2 dzdA = \gamma A \int_l z^2 dz + \gamma l \int_A y^2 dA. \quad (10.2)$$

Первое слагаемое суммы (10.2) представляет собой момент инерции массы бесконечно тонкого стержня относительно оси X . Масса его

$$m = \gamma V = \gamma Al.$$

Если ось X принадлежит конечному сечению стержня, то:

$$\gamma A \int_l z^2 dl = \frac{ml^2}{3}.$$

Если ось X проходит через центр массы стержня, то:

$$\gamma A \int_l z^2 dl = \frac{ml^2}{12}.$$

Второе слагаемое суммы (10.2) есть момент инерции массы m , распределенной по бесконечно тонкой пластине, имеющей форму поперечного сечения стержня:

$$\gamma l \int_A y^2 dA = \frac{\gamma V}{A} I_x = \frac{m}{A} I_x.$$

Для стержня BC

$$I_{BC}^m = \frac{m_{BC} l^2}{12} + \frac{m_{BC}}{A} I_{xc} = \frac{2,439}{12} 35^2 + \frac{2,439}{8,933} 6,946 = 250,9 = 0,2509 \cdot 10^{-1} \text{ кгм}^2 \quad (10.3)$$

10.5 Уравнения упругой линии стержней AB и CD

Деформация стержня AB вызывается действием на него инертного стержня BC .

Положим, что в процессе колебательного движения системы стержень AB принимает форму, совпадающую с формой стержня под статической нагрузкой, вызвавшей вертикальное перемещение сечения $B - u_1$ и поворот его на угол u_2 . Такая деформация показана на рисунке 10.8.

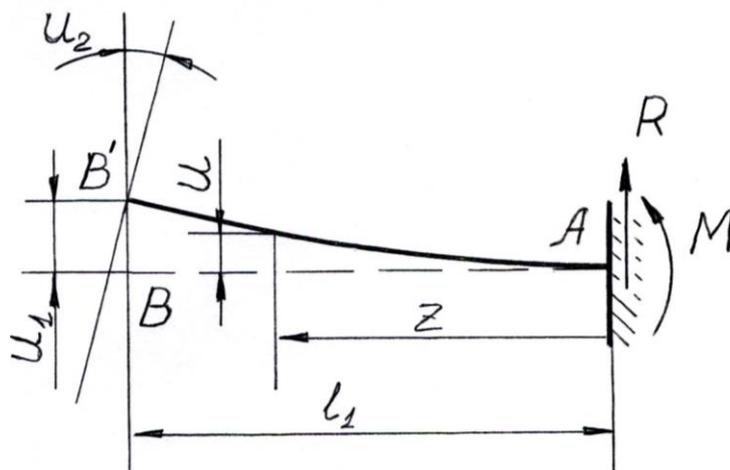


Рисунок 10.8 – Деформация стержня AB

Здесь же показана реакция опоры A. Воспользуемся методом начальных параметров, выбрав в качестве начального сечения A. Тогда $u_0 = 0$, $\theta_0 = 0$. Уравнение упругой линии запишется в виде

$$EIu = \frac{1}{2}Mz^2 + \frac{1}{6}Rz^3. \quad (10.4)$$

По условию

$$u|_{l_1} = u_1, \quad \theta|_{l_1} = u'|_{l_1} = u_2$$

составим уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}Ml_1^2 + \frac{1}{6}Rl_1^3 &= EIu_1; \\ Ml_1 + \frac{1}{2}Rl_1^2 &= EIu_2. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Решение системы (10.5):

$$\begin{aligned} M &= \frac{2EI}{l_1^2} (3u_1 - l_1u_2); \\ R &= \frac{6EI}{l_1^3} (-2u_1 + l_1u_2). \end{aligned} \quad (10.6)$$

На рисунке 10.9 изображен деформированный стержень CD.

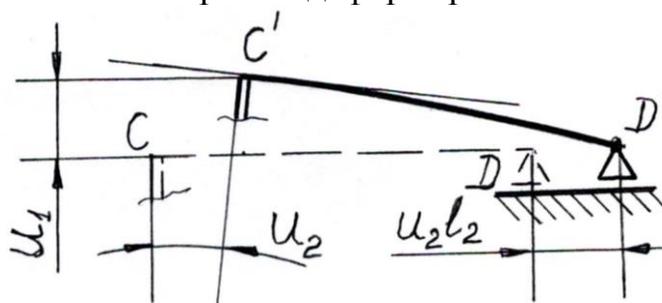


Рисунок 10.9 – Деформация стержня CD

Пренебрегая действием продольных сил, положим, что горизонтальные перемещения всех сечений стержня одинаковы и равны $u_2 l_2$. Поскольку эти перемещения не влияют на величину потенциальной энергии упругой деформации стержня CD , учтем лишь вертикальные перемещения сечений. Эти перемещения и статическая нагрузка, вызвавшая их, изображены на рисунке (10.10).

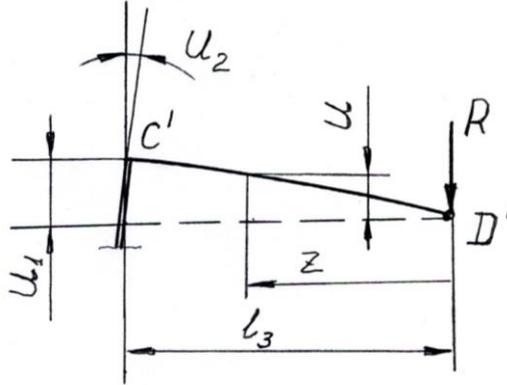


Рисунок 10.10 – Нагрузка, вызывающая деформацию стержня

Выбрав в качестве начального сечение D , запишем уравнение упругой линии

$$EIu = EI\theta_D z - \frac{R}{6} z^3. \quad (10.7)$$

По условию

$$u|_{l_3} = u_1, \quad u'|_{l_3} = u_2$$

составим уравнения:

$$EI\theta_D l_3 - \frac{1}{6} R l_3^3 = EIu_1; \quad (10.8)$$

$$EI\theta_D - \frac{1}{2} R l_3^2 = EIu_2.$$

Решение системы (10.8):

$$\theta_D = \frac{1}{2l_3} (3u_1 - l_3 u_2); \quad (10.9)$$

$$R = \frac{3EI}{l_3^3} (u_1 - l_3 u_2).$$

10.6 Потенциальная энергия упругой деформации

Потенциальная энергия изогнутой балки определяется по формуле

$$\Pi = \frac{EI}{2} \int_l u''^2 dz. \quad (10.10)$$

Стержень AB .

По уравнению (10.4)

$$u'' = \frac{1}{EI} M + Rz . \quad (10.11)$$

Подставив производную (10.11) в формулу (10.10), получим:

$$\Pi_{AB} = \frac{1}{2EI} \int_l M + Rz^2 dz = \frac{1}{2EI} \left(M^2 l_1 + MRl_1^2 + \frac{1}{3} R^2 l_1^3 \right).$$

С учетом найденных по формулам (10.6) значений M и R

$$\Pi_{AB} = \frac{2EI}{l_1^3} 3u_1^3 - 3l_1 u_1 u_2 + l_1^2 u_2^2 . \quad (10.12)$$

Стержень CD .

По уравнению (10.7) $u'' = -\frac{R}{EI} z$. Здесь значение R представлено формулой (10.9).

$$\Pi_{CD} = \frac{1}{2EI} \int_{l_3} R^2 z^2 dz = \frac{R^2 l_3^3}{6EI} = \frac{3EI}{2l_3^3} u_1 - l_3 u_2^2 . \quad (10.13)$$

Заметим, что потенциальную энергию деформации стержня CD можно найти, рассматривая его деформацию как деформацию консоли, изогнутой сосредоточенной силой, приложенной к сечению D . По рисунку 10.9 прогиб такой консоли равен:

$$f = u_1 - l_3 u_2 .$$

Потенциальная энергия деформации консоли:

$$\Pi = \frac{2EI}{2l_3^3} f^2 = \frac{3EI}{2l_3^3} u_1 - l_3 u_2^2 .$$

Найдем потенциальную энергию упругой деформации всей системы.

Жесткость сечений стержней AB и CD :

$$EI = 2 \cdot 10^4 \cdot 0,5677 = 1,135 \cdot 10^4 \text{ кНсм}^2 = 1,135 \cdot 10^4 \cdot 10^3 \cdot 10^{-4} = 1,135 \cdot 10^3 \text{ Нм}^2.$$

$$\begin{aligned} \dot{\Pi} &= \dot{\Pi}_{AB} + \dot{\Pi}_{CD} = \frac{2EI}{l_1^3} 3u_1^2 - 3l_1 u_1 u_2 + l_1^2 u_2^2 + \frac{3EI}{2l_3^3} u_1 - l_3 u_2^2 = \\ &= \frac{2 \cdot 1,135 \cdot 10^3}{0,4^3} 3u_1^2 - 3 \cdot 0,4 u_1 u_2 + 0,4^2 u_2^2 + \frac{3 \cdot 1,135 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,3^3} \cdot \\ &\cdot u_1^2 - 2 \cdot 0,3 u_1 u_2 + 0,3^2 u_2^2 = 16,95 u_1^2 - 8,042 u_1 u_2 + 1,135 u_2^2 \cdot 10^4. \end{aligned} \quad (10.14)$$

10.7 Кинетическая энергия системы

Кинетическая энергия системы – это кинетическая энергия жесткого стержня BC в плоскопараллельном движении.

В соответствии с теоремой Кенига:

$$T = T_{BC}^{nocm} + T_{BC}^{ep} = \frac{1}{2} m_{BC} \left(\dot{u}_1^2 + \frac{l_2^2}{4} \dot{u}_2^2 \right) + \frac{1}{2} I^m \dot{u}_2^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m_{BC} \dot{u}_1^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{m_{BC} l_2^2}{4} + I^m \right) \dot{u}_2^2. \quad (10.15)$$

Подставив в формулу (10.15) значений (10.1), (10.3) и l_2 получим:

$$T = \frac{1}{2} \cdot 2,439 \dot{u}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot 2,439 \cdot 0,35^2 + 0,02509 \dot{u}_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 2,439 \dot{u}_1^2 + 0,09978 \dot{u}_2^2. \quad (10.16)$$

10.8 Уравнения Лагранжа

По выражению (10.16)

$$\frac{\partial T}{\partial u_1} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial u_2} = 0;$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_1} \right) = 2,439 \ddot{u}_1; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_2} \right) = 0,09978 \ddot{u}_2.$$

По выражению (10.14)

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_1} = 33,9 u_1 - 8,042 u_2 \cdot 10^4;$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_2} = -8,042 u_1 + 2,27 u_2 \cdot 10^4.$$

Уравнения Лагранжа:

$$2,439 \ddot{u}_1 + 33,9 \cdot 10^4 u_1 - 8,042 \cdot 10^4 u_2 = 0;$$

$$0,09978 \ddot{u}_2 - 8,042 \cdot 10^4 u_1 + 2,27 \cdot 10^4 u_2 = 0. \quad (10.17)$$

10.9 Частотное уравнение

Решение уравнений (10.17) разыскивается в виде:

$$u_1 = A_1 \sin kt + B_1 \cos kt;$$

$$u_2 = A_2 \sin kt + B_2 \cos kt,$$

где k – циклическая частота свободных колебаний.

Поскольку оба слагаемых в представлении u_1 и u_2 приводят к идентичным алгебраическим уравнениям, можно ограничиться представлением решения уравнений Лагранжа в виде

$$u_1 = A_1 \sin kt, \quad u_2 = A_2 \sin kt. \quad (10.18)$$

Подстановкой выражений (10.18) в уравнения (10.17) получаем алгебраическую систему:

$$2,439 k^2 - 33,9 \cdot 10^4 A_1 + 8,042 \cdot 10^4 A_2 = 0;$$

$$8,042 \cdot 10^4 A_1 + 0,09978 k^2 - 2,27 \cdot 10^4 A_2 = 0. \quad (10.19)$$

Приравняв нулю определитель системы (10.19), получим частотное уравнение

$$0,2434k^4 - 8,919 \cdot 10^4 k^2 + 12,28 \cdot 10^8 = 0. \quad (10.20)$$

Решение уравнения (10.20):

$$\begin{aligned} k_1^2 &= 1,433 \cdot 10^4, & k_1 &= 120 \text{ с}^{-1}; \\ k_2^2 &= 35,21 \cdot 10^4, & k_2 &= 593 \text{ с}^{-2}. \end{aligned} \quad (10.21)$$

Здесь k_1 – частота основного тона.

По одному из уравнений (10.19), например, по первому, найдем соотношение горизонтального перемещения $u_2 l_2$ и вертикального перемещения u_1 сечения C при каждом значении k . Оно равно:

$$\frac{u_2 l_2}{u_1} = \frac{A_2 l_2}{A_1} = \frac{33,9 \cdot 10^4 - 2,439 k^2}{8,042 \cdot 10^4} = 0,35.$$

При $k_1 = 120 \text{ с}^{-1}$

$$\frac{A_2 l_2}{A_1} = \frac{33,9 \cdot 10^4 - 2,439 \cdot 1,433 \cdot 10^4}{8,042 \cdot 10^4} = 1,32.$$

При $k_2 = 593 \text{ с}^{-1}$

$$\frac{u_2 l_2}{u_1} = \frac{A_2 l_2}{A_1} = \frac{33,9 \cdot 10^4 - 2,439 \cdot 35,21 \cdot 10^4}{8,042 \cdot 10^4} = -2,26.$$

Показав на изображенной на рисунке 10.7 деформированной системе координаты u_1 и u_2 , мы тем самым ввели направления отсчета их положительных значений.

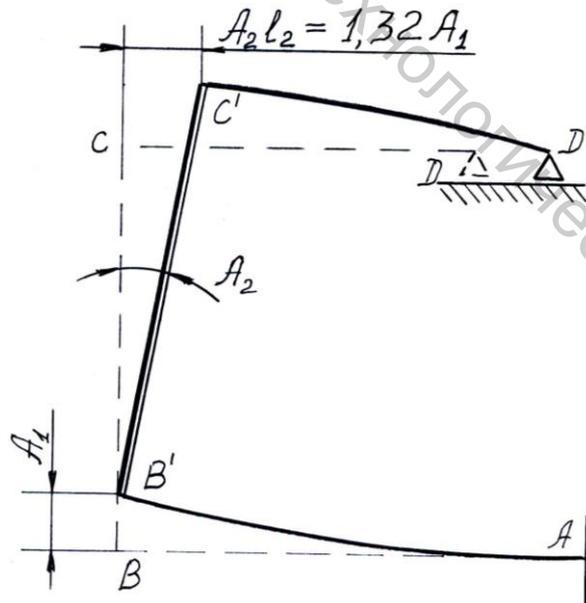


Рисунок 10.11 – Форма деформированной системы, соответствующая частоте k_1

При собственной частоте $k_1 = 120 \text{ с}^{-1}$ знаки перемещений $u_2 l_2$ и u_1 совпадают. Эта форма изображена на рисунке 10.11. При частоте $k_2 = 593 \text{ с}^{-1}$ положительной координате u_1 соответствует отрицательное зна-

чение u_2 . Значит при смещении сечения C вверх оно получит горизонтальное перемещение влево. Эта форма изображена на рисунке 10.12.

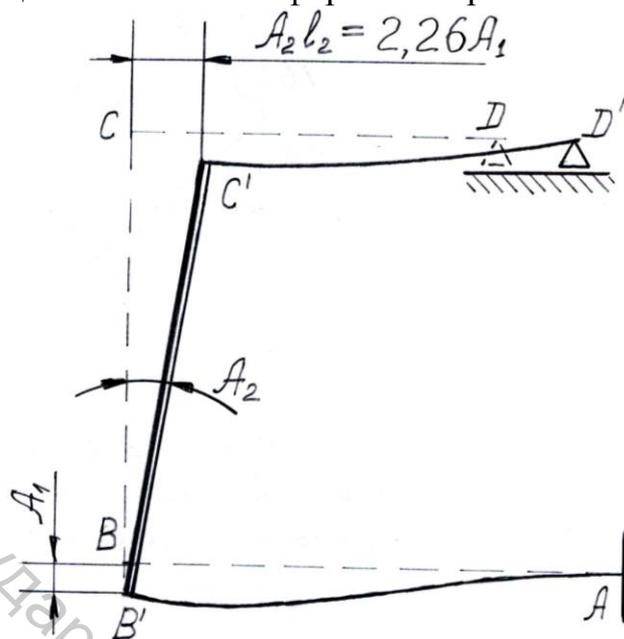


Рисунок 10.12 – Форма деформированной системы, соответствующая частоте k_2

Проверим ортогональность форм, то есть удовлетворение уравнения:

$$m_1 A_{11} A_{21} + m_2 A_{12} A_{22} = 0.$$

Здесь $m_1 = 26439$ кг, $m_2 = 0,09978$ кгм²,

$$A_{12} = \frac{33,9 \cdot 10^4 - 2,439 \cdot 1,433 \cdot 10^4}{8,042 \cdot 10^4} A_{11} = 3,78 A_{11},$$

$$A_{22} = \frac{33,9 \cdot 10^4 - 2,439 \cdot 35,21 \cdot 10^4}{8,042 \cdot 10^4} A_{21} = -6,463 A_{21}.$$

Скалярное произведение:

$$\begin{aligned} m_1 A_{11} A_{21} + m_2 A_{12} A_{22} &= 2,439 A_{11} A_{21} + 0,09978 \cdot 3,78 A_{11} \cdot -5,463 A_{21} = \\ &= 2,439 A_{11} A_{21} - 2,438 A_{11} A_{21} = 0,001 A_{11} A_{22}. \end{aligned}$$

10.10 Учет массы гибких стержней AB и CD

Пренебрегая массой гибких стержней ради упрощения решения задачи, мы несколько занизили кинетическую энергию системы. В результате полученные расчетные значения собственных частот получились завышенными.

Теперь учтем массы стержней AB и CD и найдем значения их кинетической энергии.

Стержень AB (рисунок 10.8).

По уравнению упругой линии (10.4)

$$\dot{u} = \frac{1}{6EI} 3\dot{M}z^2 + \dot{R}z^3 .$$

Кинетическая энергия

$$\begin{aligned} T_{AB} &= \frac{m_{AB}}{2l_{AB}} \int_0^{l_1} \dot{u}^2 dz = \frac{m_{AB}}{2 \cdot 36 EI^2 l} \int_0^{l_1} 9\dot{M}^2 z^4 + 6MRz^5 + R^2 z^6 = \\ &= \frac{m_{AB}}{72 EI^2} \left[\frac{9}{5} \dot{M}^2 l^4 + MRl^5 + \frac{1}{7} \dot{R}^2 l^6 \right]. \end{aligned} \quad (10.22)$$

В соответствии с формулами (10.6) производные \dot{M} и \dot{R} выражаются через обобщенные скорости \dot{u}_1 и \dot{u}_2 :

$$\begin{aligned} \dot{M} &= \frac{2EI}{l_1^2} \dot{u}_1 - l_1 \dot{u}_2 ; \\ \dot{R} &= \frac{6EI}{l_1^3} (-2\dot{u}_1 + l_1 \dot{u}_2) . \end{aligned} \quad (10.23)$$

После подстановки выражений (10.23), а также массы m_1 и длины l_1 в формулу (10.22) кинетическая энергия стержня AB

$$T_{AB} = 0,231\dot{u}_1^2 - 0,02615\dot{u}_1\dot{u}_2 + 0,0009509 .$$

Стержень CD .

По уравнению упругой линии (10.7):

$$\dot{u} = \frac{1}{6EI} 6EI\dot{\theta}_D z - \dot{R}z^3 .$$

Кинетическая энергия:

$$\begin{aligned} T_{CD} &= \frac{m_{CD}}{2l_3} \int_0^{l_3} \dot{u}^2 dz = \frac{m_{CD}}{2 \cdot 36 EI^2 l_3} \cdot \\ &\cdot \int_0^{l_3} \left[36 EI\dot{\theta}_D^2 z^2 - 12EI\dot{\theta}_D \dot{R}z^4 + \dot{R}^2 z^6 \right] dz. \end{aligned}$$

С учетом формул (10.9), значения массы m_3 и длины l_3 кинетическая энергия стержня CD :

$$T_{CD}^{perm} = 0,2273\dot{u}_1^2 - 0,02407\dot{u}_1\dot{u}_2 + 0,0008023\dot{u}_2^2 ;$$

$$T_{CD}^{zop} = \frac{1}{2} m_{CD} l_2^2 \dot{u}_2^2 = \frac{1}{2} 0,936 \cdot 0,35^2 \dot{u}_2^2 = 0,05733\dot{u}_2^2 .$$

Теперь кинетическая энергия системы:

$$T_{BC} + T_{AB} + T_{CD} = 1,679\dot{u}_1^2 - 0,05022\dot{u}_1\dot{u}_2 + 0,1090\dot{u}_2^2 .$$

Уравнения Лагранжа:

$$3,358\ddot{u}_1 - 0,05022\ddot{u}_2 + 33,9 \cdot 10^4 u_1 - 8,042 \cdot 10^4 u_2 = 0 ;$$

$$-0,5022\ddot{u}_1 + 0,2179\ddot{u}_2 - 8,042 \cdot 10^4 u_1 + 2,27 \cdot 10^4 u_2 = 0 .$$

Подстановкой в уравнения Лагранжа выражений (10.18) построим алгебраическую систему:

$$3,359k^2 - 33,9 \cdot 10^4 A_1 - 0,05022k^2 - 8,042 \cdot 10^4 A_2 = 0;$$

$$- 0,05022k^2 - 8,042 \cdot 10^4 A_1 + 0,2179k^2 - 2,27 \cdot 10^4 A_2 = 0.$$

Частотное уравнение:

$$3,359k^2 - 33,9 \cdot 10^4 \quad 0,2179k^2 - 2,27 \cdot 10^4 \quad - 0,05022k^2 - 8,042 \cdot 10^4 \quad ^2 = 0,$$

или

$$0,7294k^4 - 14,204 \cdot 10^4 k^2 + 12,279 \cdot 10^8 = 0. \quad (10.24)$$

Решения уравнения (10.24):

$$k^2 = \frac{1}{0,7294} \left[7,102 \cdot 10^4 \pm \sqrt{7,102^2 \cdot 10^8 - 0,7294 \cdot 12,279 \cdot 10^8} \right].$$

$$k_1^2 = 0,9067 \cdot 10^4 \quad k_1 = 95,2 c^{-1}$$

$$k_2^2 = 18,57 \cdot 10^4 \quad k_2 = 431 c^{-1}$$

Сравним эти значения со значениями собственных частот, полученных без учета масс гибких стержней ($k_1 = 120 c^{-1}$, $k_2 = 593 c^{-1}$). Расхождение составляет 26 % и 37,5 %.

11 Вынужденные колебания стержневой системы

Пусть к сечению B рассмотренной в задании системы приложена вертикальная возмущающая сила, меняющаяся по закону: $P = P_0 \sin \omega t$ (рисунок 11.1).

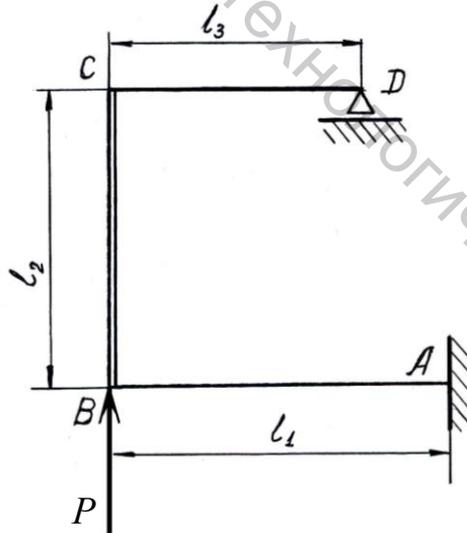


Рисунок 11.1 – Возмущающая сила

Уравнения Лагранжа принимают вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial u_1} + \frac{\partial \Pi}{\partial u_1} = P_0 \sin \omega t;$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial u_2} + \frac{\partial \Pi}{\partial u_2} = 0.$$

Пользуясь найденными выражениями (10.16) и (10.18) потенциальной и кинетической энергии, получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} 2,439\ddot{u}_1 + 33,9 \cdot 10^4 u_1 - 8,042 \cdot 10^4 u_2 &= P_0 \sin \omega t; \\ 0,09978\ddot{u}_2 - 8,042 \cdot 10^4 u_1 + 2,27 \cdot 10^4 u_2 &= 0. \end{aligned} \quad (11.1)$$

Установившееся движение описывается частным решением системы:

$$u_1 = B_1 \sin \omega t, \quad u_2 = B_2 \sin \omega t. \quad (11.2)$$

Подстановка частного решения (11.2) в дифференциальные уравнения (11.1) приводит к алгебраической системе:

$$\begin{aligned} 2,439\omega^2 + 33,9 \cdot 10^4 B_1 - 8,042 \cdot 10^4 B_2 &= -P_0; \\ 8,042 \cdot 10^4 B_1 + 0,09978\omega^2 - 2,27 \cdot 10^4 B_2 &= 0. \end{aligned} \quad (11.3)$$

Определитель системы (11.3)

$$\Delta = 0,2434\omega^4 - 8,919 \cdot 10^4 \omega^2 + 12,28 \cdot 10^8. \quad (11.4)$$

Решая систему (10.27) относительно амплитуд вынужденных колебаний B_1 и B_2 , получим:

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{P_0}{\Delta} (2,27 \cdot 10^4 - 0,09978\omega^2); \\ B_2 &= \frac{P_0}{\Delta} 8,042 \cdot 10^4. \end{aligned} \quad (11.5)$$

По этим формулам строится частотно-амплитудная диаграмма.

Заметим, что при частоте возмущения ω , совпадающей с собственной частотой k_1 или k_2 , определитель (11.4) алгебраической системы (11.3) совпадает с левой частью частотного уравнения (10.22). То есть при $\omega = k_1$ или $\omega = k_2$ $\Delta = 0$.

В этом случае амплитуды (11.5) становятся неограниченными, то есть имеет место резонанс.

Поэтому собственные частоты упругой системы называются резонансными.

Амплитуда B_1 при определенном значении частоты возмущения ω может оказаться равной нулю, что говорит об отсутствии колебания по координате u_1 . Это явление называется антирезонансом.

Приравняв нулю амплитуду B_1 решения (11.5):

$$2,27 \cdot 10^4 - 0,09978\omega^2 = 0,$$

найдем частоту антирезонанса:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2,27 \cdot 10^4}{0,09978}} = 477 \text{ с}^{-1}.$$

Равенство нулю амплитуды B_1 позволяет рассматривать сечение B как закрепленное шарнирно подвижной опорой. Значит, вынужденные колебания исследуемой рамы при частоте антирезонанса аналогич-

ны свободным колебаниям рамы с одной степенью свободы, изображенной на рисунке 11.2.

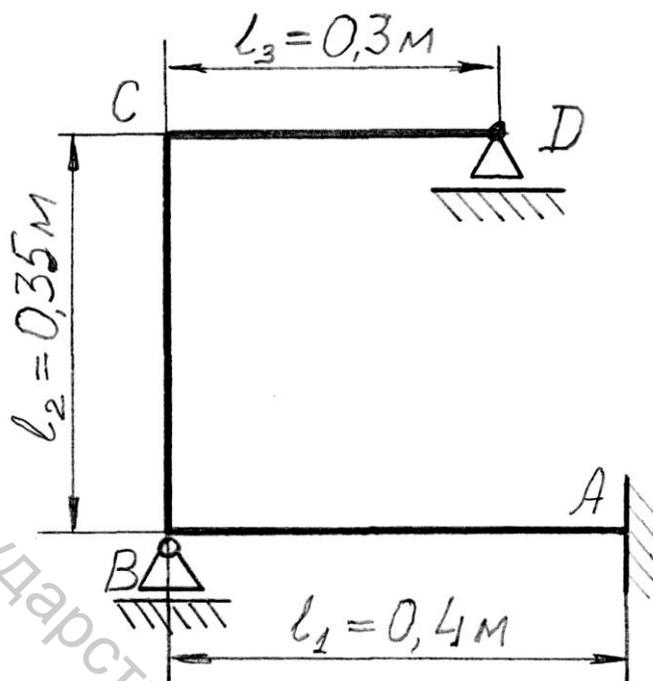


Рисунок 11.2 – Аналог рамы при антирезонансе

Подстановкой в формулы (11.5) значения $\omega = 0$, получим перемещения u_1 и u_2 при статической нагрузке, равной P_0 .

$$u_{1cm} = \frac{2,27 \cdot 10^4 P_0}{12,28 \cdot 10^8} = 0,1849 \cdot 10^{-4} P_0;$$

$$u_{2cm} = \frac{8,042 \cdot 10^4 P_0}{12,28 \cdot 10^8} = 0,6549 \cdot 10^{-4} P_0.$$

Как и в случае системы с одной степенью свободы найдем динамические коэффициенты:

$$\beta_1 = \frac{B_1}{u_{1cm}} = \frac{P_0 (2,27 \cdot 10^4 - 0,09978\omega^2)}{\Delta 0,1849 \cdot 10^{-4} P_0} = \frac{12,28 \cdot 10^4 - 0,5396\omega^2}{\Delta} 10^4; \quad (11.6)$$

$$\beta_2 = \frac{B_2}{u_{2cm}} = \frac{P_0 8,042 \cdot 10^4}{\Delta 0,6549 \cdot 10^{-4} P_0} = \frac{12,28 \cdot 10^8}{\Delta}.$$

Формулы (11.6) позволяют построить диаграмму, аналогичную частотно-амплитудной. Она изображена на рисунке 11.3.

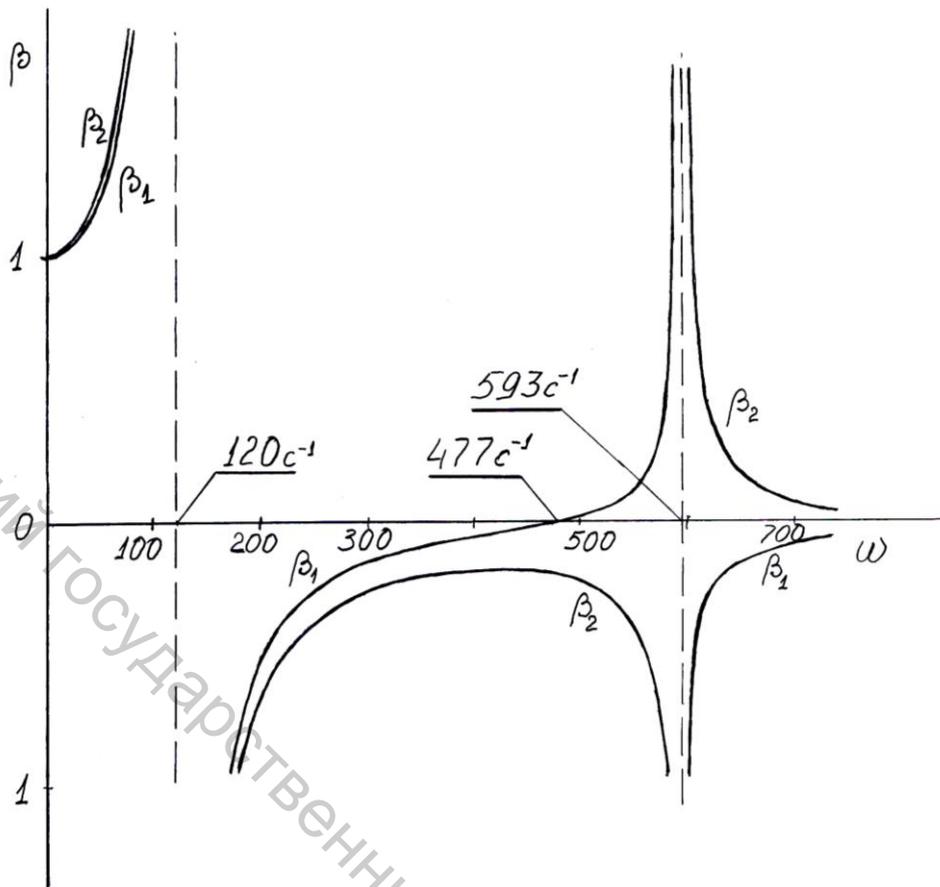


Рисунок 11.3 – Частотно-амплитудная диаграмма

Покажем форму деформированной системы при различных значениях частоты возмущения. Напомним, что направления отсчета положительных значений координат u_1 и u_2 и возмущающей силы P при $\sin \omega t > 0$ показаны на рисунках 10.13 и 11.1. Соотношение перемещений $u_2 l_2$ и u_1 найдем по формулам (11.5).

$$\frac{u_2 l_2}{u_1} = \frac{B_2 l_2}{B_1} = \frac{8,042 \cdot 10^4 \cdot 0,35}{2,27 \cdot 10^4 - 0,9978 \cdot 10^2}. \quad (11.7)$$

При $0 < \omega < k_1 = 120 \text{ с}^{-1}$ оба значения β_1 и β_2 положительные. Значит при $P > 0$ $u_1 > 0$ и $u_2 > 0$. Взяв для примера $\omega = 60 \text{ с}^{-1}$, получим (рисунок 11.4):

$$\frac{u_2 l}{u_1} = \frac{8,042 \cdot 10^4 \cdot 0,35}{2,27 \cdot 10^4 - 0,9978 \cdot 60^2} = 1,3$$

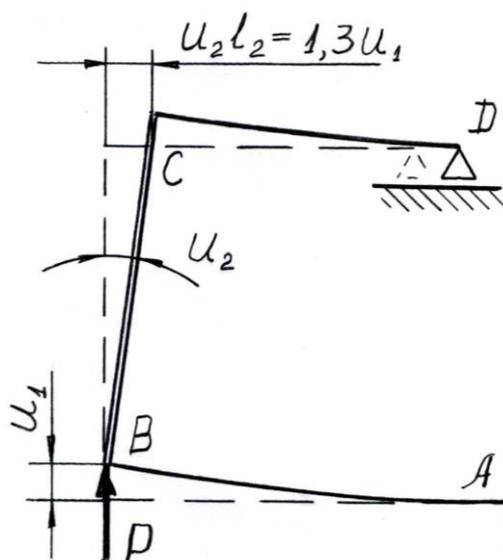


Рисунок 11.4 – Форма рамы при $\omega = 60 \text{ c}^{-1}$

При $k_1 < \omega < \omega_0$, где ω_0 – частота антирезонанса, равная 477 c^{-1} , $\beta_1 < 0$ и $\beta_2 < 0$.

Значит при $P > 0$ $u_1 < 0$ и $u_2 < 0$.

Например, при $\omega = 240 \text{ c}^{-1}$ (рисунок 11.5):

$$\frac{u_2 l}{u_1} = \frac{8,042 \cdot 10^4 \cdot 0,35}{2,27 \cdot 10^4 - 0,9978 \cdot 240^2} = 1,66.$$

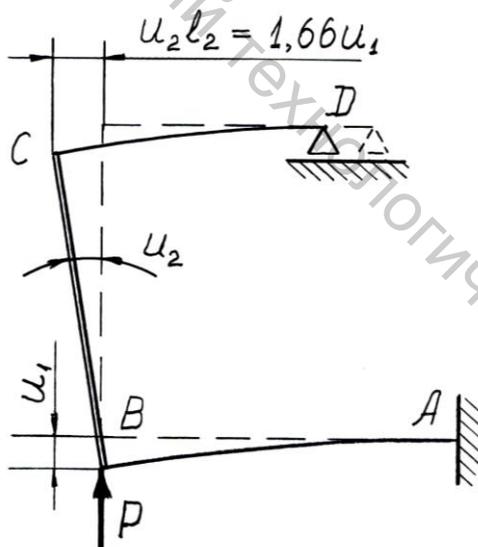


Рисунок 11.5 – Форма рамы при $\omega = 240 \text{ c}^{-1}$

При $\omega_0 < \omega < k_2$, $\beta_1 > 0$ и $\beta_2 < 0$. Значит при $P > 0$, $u_1 > 0$ и $u_2 < 0$. Возьмем для примера $\omega = 560 \text{ c}^{-1}$ (рисунок 11.6):

$$\frac{u_2 l}{u_1} = \frac{8,042 \cdot 10^4 \cdot 0,35}{2,27 \cdot 10^4 - 0,9978 \cdot 560^2} = -3,28.$$

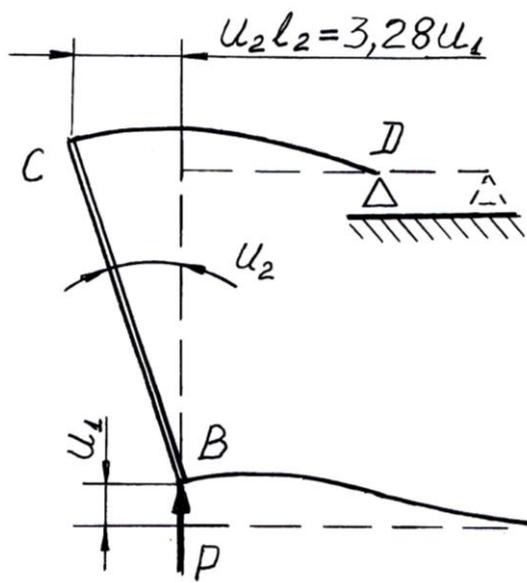


Рисунок 11.6 – Форма рамы при $\omega = 560 \text{ с}^{-1}$

При $k_2 < \omega < \infty$, $\beta_1 < 0$ и $\beta_2 > 0$. При $P > 0$, $u_1 < 0$ и $u_2 > 0$. При $\omega = 680 \text{ с}^{-1}$ (рисунок 11.7):

$$\frac{u_2 l}{u_1} = \frac{8,042 \cdot 10^4 \cdot 0,35}{2,27 \cdot 10^4 - 0,9978 \cdot 680^2} = -1,20.$$

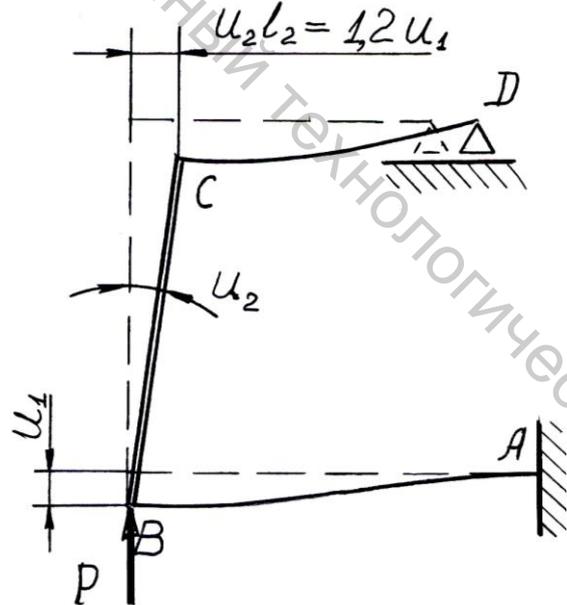


Рисунок 11.7 – Форма рамы при $\omega = 680 \text{ с}^{-1}$

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий, С. Г. Теория упругости анизотропного тела / С. Г. Лехницкий. – Москва: Наука, 1977. – 416 с.
2. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – Москва: Наука, 1964. – 540 с.
3. Беляев, Н. М. Сопротивление материалов / Н. М. Беляев. – Москва: Физматгиз, 1976. – 856 с.
4. Смирнов, В. И. Курс высшей математики. Том 1 / В. И. Смирнов. – Москва: Наука, 1974. – 480 с.
5. Жирнов, Н. И. Классическая механика / Н. И. Жинов. - Москва: Просвещение, 1980. – 303 с.
6. Кац, А. М. Теория упругости / А. М. Кац. – Москва: Гос-техтеориздат, 1956. – 208 с.

Учебное издание

Калинин Александр Анатольевич
Посканная Екатерина Сергеевна

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Курс лекций

Редактор *Г.Н. Федосеев*
Технический редактор *Е.С. Посканная*
Корректор *Е.М. Богачева*
Компьютерная верстка *А.А. Калинин*

Подписано к печати _____ Формат _____ Уч.-изд.лист. _____
Усл. печ. Листов _____ Тираж _____ экз. Заказ № _____

Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет» 210035, г. Витебск, Московский пр., 72.

Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский государственный технологический университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя научных изданий № 1 / 172 от 12 февраля 2014 г.