УДК 539.3/.6(0.75.8)

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В РАСТЯЖЕНИИ И КРУЧЕНИИ СТУПЕНЧАТОГО СТЕРЖНЯ

Федосеев Г.Н., к. т. н., доц., Маркович Д.А., студ., Чернявский Д.А., студ.
Витебский государственный технологический университет,
г. Витебск, Республика Беларусь

Реферат. *В работе сделан вывод универсального уравнения для перемещений ступенчатого стержня с кусочно-постоянной жесткостью. Введены коэффициенты-отношения жесткостей сечений к жесткости стержня (постоянной, принятой за основную). Это позволит в стержне-модели ввести фиктивные силы (моменты).*

Ключевые слова: растяжение, кручение, жесткость, сечение, ступенчатый стержень, фиктивные силы (моменты).

Рассмотрим (рис. 1) стержень с постоянной по длине жесткостью.

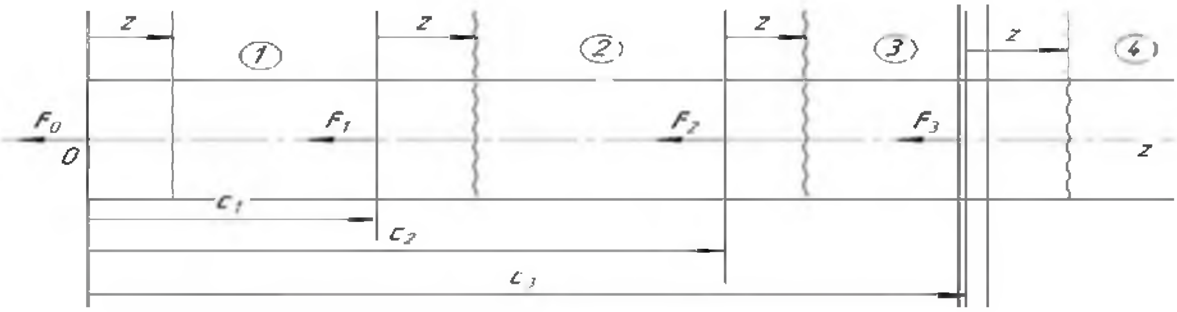

Рисунок 1 – Растянутый стержень с жесткостью сечения EA

Перемещение произвольного сечения первого участка:

$$u = \frac{(N_z z)}{EA} + u_0 = \frac{(F_0 z)}{EA} + u_0 |_1$$

В пределах второго участка:

$$u = u_0 + \frac{F_0 c_1}{EA} + \frac{(F_0 + F_1)(z - c_1)}{EA} + [\frac{F_0 z}{EA} - \frac{F_0 z}{EA}] = u_0 + \frac{F_0 z}{EA}|_1 + \frac{F_0 (z - c_1)}{EA}|_2$$

В пределах третьего участка:

$$u = u_0 + \frac{F_0 c_2}{EA} + \frac{F_1 (c_2 - c_1)}{EA} + \frac{(F_0 + F_1 + F_2)(z - c_2)}{EA} + [(\frac{F_0 z}{EA} + \frac{F_0 (z - c_1)}{EA}) -$$
$$- (\frac{F_0 z}{EA} + \frac{F_0 (z - c_1)}{EA})] = u_0 + \frac{F_0 z}{EA}|_1 + \frac{F_0 (z - c_1)}{EA}|_2 + \frac{F_0 (z - c_2)}{EA}|_3 .$$

Напишем универсальное уравнение:

$$EAu = EAu_0 + F_0 z|_1 + F_1 (z - c_1)|_2 + ... + F_n (z - c_n)|_{n+1} .$$

$$N_z = F_0|_1 + F_1|_2 + ... + F_n|_{n+1} .$$

Граничные условия (рис. 2) позволят найти или перемещение u_0 и реакции заделки N_z при заданной силе F_0, либо силы F_0 и N_z при заданном $u_0 = 0$ (статически неопределимый стержень).

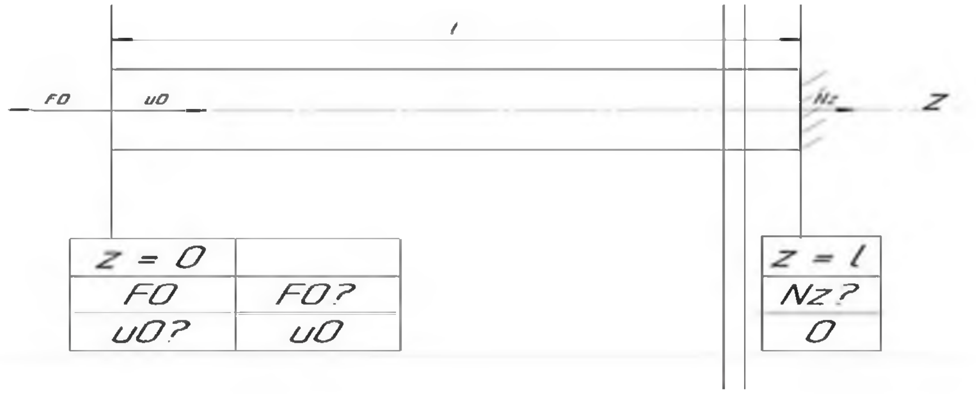

Рисунок 2 – Граничные условия

Построим аналогичным уравнение для растянутого ступенчатого стержня (рис. 3).

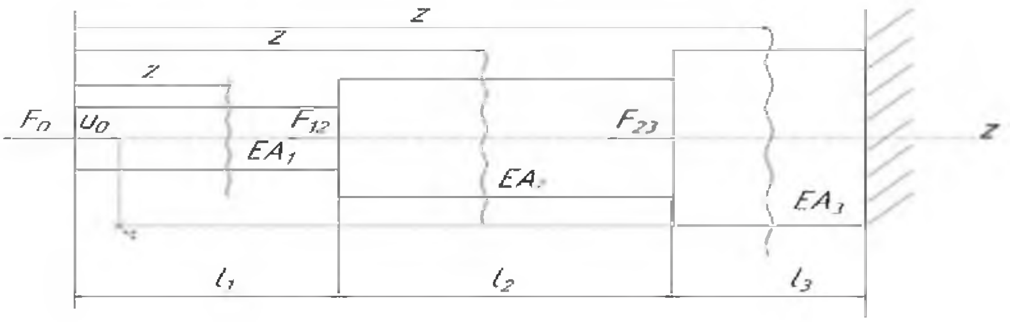

Рисунок 3 – Растяжение ступенчатого стержня

В пределах первого участка $u = u_0 + \frac{F_0 z}{EA_1}|_1$.

В пределах второго участка напишем выражение, аналогичное выражению (1) [используя в третьем сечении жестком EA_2]. Добавляем в выражение группу в квадратных скобках. В итоге получаем уравнение:

$$u = u_0 + \frac{F_0}{EA_1} z|_1 + \frac{F_{12}}{EA_1}(z - l_1)|_2, F_{12} = F_0(\frac{EA_1}{EA_2} - \frac{EA_1}{EA_1}),$$

где F_{12} – фиктивная сила, прикладываемая к первой границе, разделяющей площади A_1 и A_2.

Рассматривая следующим образом – смотреть выражение (2) – третий участок, напишем универсальное уравнение, аналогично уравнению (3):

$$EA_1 u = EA_1 u_0 + F_0\, z|_1 + F_{12}(z - l)|_2 + F_{23}(z - [l_1 + l_2])|_3 + ...,$$

где следующая (3) фиктивная сила $F_{23} = F_0(a_3 - a_2)$, $a_3 = EA_1 / EA_3$.

Положим, уравнение (4) в эквивалентной модели стержня с постоянной моделью стержня и жесткостью сечения EA_1 (рис. 4).

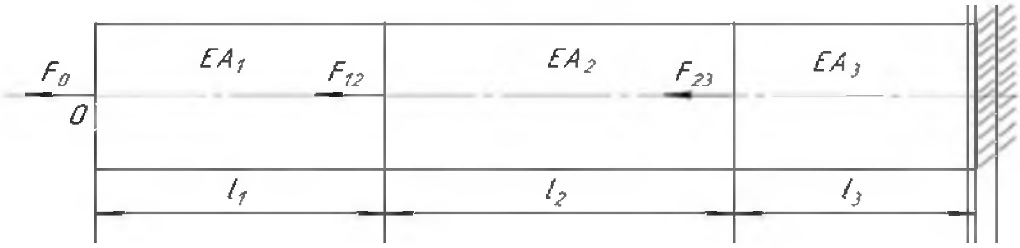

Рисунок 4 — Эквивалентная модель ступенчатого стержня

Вклад силы P_2 в примере на рисунке 5.

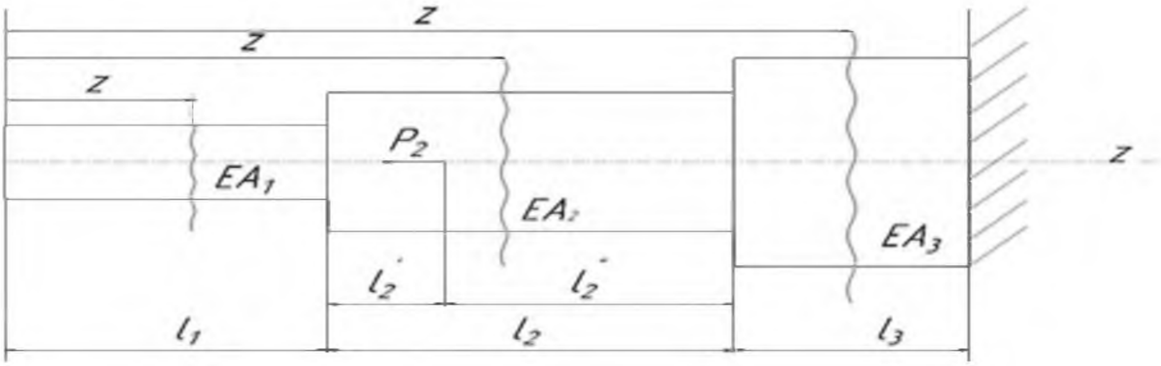

Рисунок 5 — Заданная сила на втором участке

$$EA_1\Delta l_{p_2} = a_2P_2(z - l_1 - l_2') + (a_3 - a_2)P_2(z - l_1 - l_2).$$

Перемещение от нескольких сил может быть найдено суммированием перемещений от каждой из них по отдельности.

Универсальное уравнение для закрученного ступенчатого стержня могут быть написано на основе только что выведенных формул для удлинения растянутого стержня $Nzl\ /\ EA$ и угла закручивания $M_z l\ /\ GI_p$.

Получаем уравнения:

$$GI_{p_1} = GI_{p_1}u_0 + M_0\, z|_1 + M_{12}(z - l_1)|_2 + M_{23}(z - [l_1 + l_2])|_3 + \ldots$$

где фиктивные моменты $M_{mn} = M_0(i_n - i_m)$, $i_n = GI_{p1}/(GI_{pn})$, $i_m = GI_{p1}/(GI_{pm})$.

Список использованный источников

1. Федосеев, Г. Н. Механика материалов: курс лекций / В. Н. Сакевич. – Витебск: УО «ВГТУ», 2012. – 181 с

УДК 539.3/.6(075.8)

К ПРИБЛИЖЁННОМУ ОПРЕДЕЛЕНИЮ ЭЙЛЕРОВОЙ СИЛЫ

Федосеев Г.Н., к.т.н., доц., Ильючёнок В.М., студ., Петров А.О., студ.

Витебский государственный технологический университет,
г. Витебск, Республика Беларусь

Реферат. *В работе предложен приблизительный метод определения Эйлеровой силы. Рассмотрены «параболические» приближения, учитывающие только нулевые прогибы на концах шарнирно закреплённого стержня, нулевые прогибы и нулевые вторые производные; рассмотрен в качестве модели шарнирно опёртый стержень, нагруженный равномерно распределённой нагрузкой. В последнем случае найден максимальный прогиб (интегрированием по Мору – Верещягину) и соответствующая вторая производная (изгибающий момент) в точке максимума. Получены результаты, отличающиеся от точных значений на Эйлеровой силы на 2,7 %.*

Ключевые слова: сжатый стержень, упругая кривая, Эйлерова сила, максимальный прогиб, вторая производная прогиба.

При силе равной критической, с прямолинейной формой равновесия (рис. 1), показанной штрихами, сосуществуют при малых отклонениях искривленные формы.