УДК 517(075.8)

# ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ КРУГЛОЙ МЕМБРАНЫ

***Шкурко И.К., студ., Капник Е.С., студ., Никонова Т.В., к.ф-м.н., доц.***

*Витебский государственный технологический университет,
г. Витебск, Республика Беларусь*

Реферат. *В статье рассмотрены параметрические колебания круглой мембраны и возникновение параметрического резонанса. Для решения данной задачи используется метод многих масштабов. Предполагается, что коэффициент а представим в виде ряда по степеням малого параметра $\varepsilon$.*

Ключевые слова: параметрические колебания, круглая мембрана, параметрический резонанс, метод многих масштабов.

Рассмотрим уравнение параметрических колебаний круглой мембраны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \tag{1}$$

с граничными условиями:

$$u(R)=0, \quad |u(0)|<\infty . \tag{2}$$

Для решения данной задачи воспользуемся методом многих масштабов [1]. Пусть

$$t=t_0,\ t_1=\varepsilon t_0,\ \ t_2=\varepsilon^2 t_0,\ \ \ldots \tag{3}$$

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial t_0}+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t_1}+\ldots,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t_0^2}+2\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial t_0\partial t_1}+\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}+\ldots \tag{4}$$

Предположим, что коэффициент $a^2$ раскладывается следующим образом:

$$a^2=a_0^2+\varepsilon f\cos\Omega t_0, \tag{5}$$

где $a_0$, $f$ – константы; $\varepsilon$ – малый параметр; $\Omega$ – частота воздействия, представимая следующим образом:

$$\Omega=2\omega_0+\varepsilon\sigma, \tag{6}$$

где $\sigma \sim 1$ – расстройка собственной частоты; $\omega_0$ – собственная частота.

Разложим $u(r,\ \varphi,\ t_0,\ t_1)$ по степеням малого параметра $\varepsilon$:

$$u(r,\ \varphi,\ t_0,\ t_1) = u0(r,\ \varphi,\ t_0,\ t_1) + \varepsilon u_1(r,\ \varphi,\ t_0,\ t_1) + \varepsilon^2 u_2(r,\ \varphi,\ t_0,\ t_1)+\ldots \tag{7}$$

Подставив разложения (7) в (1) и (2), с учетом (4) и (5) и, приравняв нулю коэффициенты при $\varepsilon_0$, получим уравнения:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_0}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial \varphi^2}-a_0^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial t_0^2}=0 \tag{8}$$

с граничными условиями:

$$u_0(R)=0, \quad |u_0(0)|<\infty . \tag{9}$$

Будем искать $u_0(r,\ \varphi,\ t_0,\ t_1)$ в виде:

$$u_0(r,\varphi,t_0,t_1)=U_0(r)\sin n\varphi(\tilde{A}_c(t_1)\cos\omega_0 t_0+\tilde{A}_s(t_1)\sin\omega_0 t_0) . \tag{10}$$

Подставляя (10) в (8)–(9) и сократив на $\sin n\varphi(\tilde{A}_c(t_1)\cos\omega_0 t_0+\tilde{A}_s(t_1)\sin\omega_0 t_0)$, получим:

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U_0}{\partial r}-\frac{n^2}{r^2}U_0+a_0^2\omega_0^2 U_0=0 \tag{11}$$

с граничными условиями:

$$U_0(R)=0, \quad |U_0(0)|<\infty. \tag{12}$$

Получим, что

$$U_0(r)=AJ_n(a_0\omega_0 r), \tag{13}$$

$$u_0(r,\varphi,t_0,t_1)=J_n(a_0\omega_0 r)\sin n\varphi(A_c(t_1)\cos\omega_0 t_0+A_s(t_1)\sin\omega_0 t_0) \tag{14}$$

и $\omega_{0n}$ – корни уравнения

$$J_n(a_0\Omega r)=0. \tag{15}$$

Подставив разложения (7) в (1) и (2) с учетом (4) и (5), приравняв нулю коэффициенты при $\varepsilon_1$, получим уравнение:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial\varphi^2}-a_0^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial t_0^2}-2a_0^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial t_0\partial t_1}-f\cos\Omega t_0\frac{\partial^2 u_0}{\partial t_0^2}=0. \tag{16}$$

С учетом (15) из (16) получим:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial\varphi^2}-a_0^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial t_0^2}+2a_0^2(\dot{A}_c(t_1)\omega_0\sin\omega_0 t_0-\dot{A}_s(t_1)\omega_0\cos\omega_0 t_0)J_n(a_0\omega_0 r)\sin n\varphi+$$
$$+f\cos(2\omega_0 t_0+\varepsilon\sigma t_0)\cdot(A_c(t_1)\omega_0^2\cos\omega_0 t_0+A_s(t_1)\omega_0^2\sin\omega_0 t_0)J_n(a_0\omega_0 r)\sin n\varphi=0 \tag{17}$$

с граничными условиями:

$$u_1(R)=0, \quad |u_1(0)|<\infty. \tag{18}$$

Будем искать $u_1(r,\ \varphi,\ t_0,\ t_1)$ в виде:

$$u_1(r,\varphi,t_0,t_1)=U_1(r,t_0,t_1)\sin n\varphi. \tag{19}$$

Подставляя (19) в (17) и (18) и разделив обе части уравнения на $\sin n\varphi$, получим:

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U_1}{\partial r}-\frac{n^2}{r^2}U_1-a_0^2\frac{\partial^2 U_1}{\partial t_0^2}=[2\omega_0 a_0^2(-\dot{A}_c(t_1)\omega_0\sin\omega_0 t_0+\dot{A}_s(t_1)\omega_0\cos\omega_0 t_0)+$$
$$+f\cos(2\omega_0 t_0+\sigma t_1)\omega_0^2\cdot(A_c(t_1)\cos\omega_0 t_0+A_s(t_1)\sin\omega_0 t_0)]J_n(a_0\omega_0 r) \tag{20}$$

с граничными условиями:

$$U_1(R)=0, \quad |U_1(0)|<\infty. \tag{21}$$

Частное решение непериодической задачи будем искать в виде:

$$U_{1ч}=T(t_0)J_n(a_0\omega 0r). \tag{22}$$

С учетом того, что $J_n(a_0\omega_0 r)$ является решением уравнения Бесселя $n$-го порядка, можно записать, что

$$\frac{\partial^2 J_n}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial J_n}{\partial r}-\frac{n^2}{r^2}J_n=-a_0^2\omega_0^2 J_n. \tag{23}$$

Подставляя (23), (22) в (20) и, разделив обе части уравнения на $J_n$, получим:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t_0^2}+T\omega_0^2=2\dot{A}_c\omega_0\sin(\omega_0 t_0)-2\dot{A}_s\omega_0\cos(\omega_0 t_0)+\frac{f\omega_0^2}{a_0^2}\cdot\left(\frac{A_c}{2}\cos(\omega_0 t_0)\cos(\sigma t_1)-\right.$$
$$-\frac{A_c}{2}\sin(\omega_0 t_0)\sin(\sigma t_1)+\frac{A_c}{2}\cos(3\omega_0 t_0)\cos(\sigma t_1)-\frac{A_c}{2}\sin(3\omega_0 t_0)\sin(\sigma t_1)-$$
$$\left.-\frac{A_s}{2}\sin(\omega_0 t_0)\cos(\sigma t_1)-\frac{A_s}{2}\cos(\omega_0 t_0)\sin(\sigma t_1)+\frac{A_s}{2}\sin(3\omega_0 t_0)\cos(\sigma t_1)+\frac{A_s}{2}\cos(3\omega_0 t_0)\sin(\sigma t_1)\right). \tag{24}$$

Обозначим $\tilde{f}=f\omega_0/(4a_0^2)$. Так как слагаемые содержащие $\cos(\omega_0 t_0)$ и $\sin(\omega_0 t_0)$ порождают вековые члены, для их отсутствия приравняем нулю соответствующие коэффициенты. Получим систему уравнений для амплитуд:

$$\dot{A}_c - \tilde{f}A_c\sin(\sigma t_1) - \tilde{f}A_s\cos(\sigma t_1) = 0, \quad \dot{A}_s - \tilde{f}A_c\cos(\sigma t_1) + \tilde{f}A_s\sin(\sigma t_1) = 0. \qquad (25)$$

Решая систему (25), получаем выражения для $A_c(t_1)$ и $A_s(t_1)$ и находим выражения для $u_1(r, \varphi, t_0, t_1)$.Из полученного следует, что при слабом параметрическом возбуждении, когда частота воздействия $\Omega \approx 2\omega_0$, вид системы амплитуд (25), не зависит от способа возбуждения (силового или температурного) [2]. При некотором соотношении входящих в нее параметров $\sigma, \tilde{f}$ нулевое решение может оказаться не устойчивым по Ляпунову.

Область неустойчивости удобно изобразить непосредственно в переменных $\sigma, \tilde{f}$. Воспользовавшись результатом, полученными в [3], получим область неустойчивости *K* для данной системы. Область неустойчивости представляет собой клиновидную область *K*, лежащую выше прямых $\tilde{f} = \pm\frac{1}{2}\sigma$, включая сами эти прямые. Таким образом, рассмотрен случай параметрического резонанса. Используя результаты работ [2, 3], получена область устойчивости для рассматриваемого случая.


Список использованных источников

1. Смирнов, В. И. Курс высшей математики. Том II / Пред. Л. Д. Фаддеева, пред. и прим. Е. А. Грининой: 24-е изд. – СПб.: БХВ-Петербург, 2008. – 848 с.
2. Mikhasev, G. I., Kuntsevich, S. P. Thermoparametric vibrations of noncircular cylindrical shell in nonstationary temperature field // Technische Mechanik. – 1997. – Band 17, Heft 2. – P. 113–120.
3. Михасев, Г. И. Волновые пакеты в тонких оболочках : автореферат дис. ... доктора физико-математических наук : 01.02.04. – Санкт-Петербург, 1998. – 32 с.



УДК 004. 43:004.9:004.738.1:001.83:005.86


# ИНСТРУМЕНТЫ ОБРАБОТКИ И АНАЛИЗА ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ


***Янкевич Е.М., ст. преп., к.э.н., Карпович А.О., студ.***

*Витебский государственный университет имени П. М. Машерова, г. Витебск, Республика Беларусь*



**Исследование проводится в рамках темы № 20213684 от 19.10.2021 г. ГУ «БелИСА»*



Реферат. *В статье рассмотрены инструменты и продемонстрирован алгоритм обработки информационных ресурсов с целью анализа отраслевой направленности диссертационных исследований на примере сайта Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь.*



Ключевые слова: информационные технологии, веб-скрапинг, язык программирования Python, библиотека Selenium WebDriver.


Сбор необходимых данных для проведения исследования какого-либо явления или анализа определенной ситуации, зачастую связан со значительными затратами как усилий, так и времени человека, производящего процесс накопления таких данных. При этом, существует немалая вероятность возникновения ошибки из-за влияния так называемого «человеческого фактора». С момента появления информационных технологий, постоянно происходит их внедрение во все сферы жизни общества. В свою очередь, применение информационных технологий позволяет значительно (в несколько крат раз) сократить время на обработку имеющихся сведений и свести вероятность ошибки их обработки к минимуму [1]. Цель – разработка алгоритма и определение количества заявленных авторефератов по направлениям научных исследований соискателями на сайте ВАК.

Источником исходных данных, необходимых для подсчета количества лиц, которые представили свои диссертации с целью дальнейшей их защиты, был использован раздел «Объявления о защите» официального сайта Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь (ВАК). Процесс извлечения исходных данных связан с применением