int(expression,x=a..b, options) – вычисления определенных интегралов;
plot(f, x=x0..x1) – построение двумерных графиков.

Использование этих функций значительно упрощает процесс исследования и анализа, так как избавляет специалиста-аналитика от рутинных вычислений.

В целом, применение интеграла и производной в экономике является необходимым инструментом для анализа различных финансово-экономических процессов и явлений и принятия обоснованных экономических решений. Без использования этих инструментов экономисты не смогут достичь высокой точности в анализе экономических данных и разработке экономических моделей. Таким образом, умение применять дифференциальное и интегральное исчисление на практике является необходимым условием успешной работы современного экономиста и позволяет принимать взвешенные решения.

Список использованных источников

1. Минюк, С. А. Высшая математика для экономистов: учебник / С. А. Минюк, С. А. Самаль, Л. И. Шевченко. – 2-е изд., испр. – Минск: Элайда, 2007. – 512 с

УДК 512.542

ИЗОМОРФИЗМ СОПРЯЖЁННЫХ ГРУПП

Коваленко А.В., ст. преп., Мицкевич К.А., студ.

Витебский государственный технологический университет,
г. Витебск, Республика Беларусь

Реферат. *В статье рассмотрены свойства бинарного отношения сопряжённости групп. Проведено исследование изоморфизма сопряжённых подгрупп. Построена математическая модель нормализатора, который сопряжён с заданным элементом группы. С использованием математической модели проведено исследование сопряжённых подгрупп.*

Ключевые слова: группы, подгруппы, сопряжённость групп, изоморфизм групп, сопряжённые множества, индексы в группе, порядок группы.

Одним из направлений в теории групп является исследование класса групп, которые обладают тем или иным свойством. В данной статье рассматриваются сопряжённые группы на основе их изоморфизма. Сопряжённые группы широко применяются на практике. Они используются в теории графов, математической логике, а также играют большую роль в алгебраических системах. Поэтому возникает необходимость исследовать свойства сопряжённых групп.

Рассмотрим два множества M_1 и M_2, элементы которых являются объектами группы G. Множества M_1 и M_2 являются сопряжёнными, если для любых $m \in M_2$ найдётся такой элемент $x \in G$, что $M_1 = x^{-1}M_2x$, то есть множество M_1 имеет вид: $M_1 = \left\{x^{-1}M_2x \middle| m \in M_2\right\}$. Аналогично определим сопряжённость элементов группы. Элементы a_1 и a_2 группы G являются сопряжёнными, если существует такой элемент x, для которого выполняется равенство $a_1 = x^{-1}a_2x$.

Пусть заданы две изоморфные группы G_1 и G_2, тогда существует изоморфное отображение $f: G_1 \to G_2$, при котором эти группы можно отождествить между собой. Следовательно, если задана подгруппа $H_1 \subseteq G_1$, то отображение $f: H_1 \to H_2 \subseteq G_2$ переводит эту подгруппу в изоморфную ей подгруппу.

В частном случае, если $G_1 = G_2 = G$, то получаем изоморфизм группы G на группу G. При этом соответствующие части будут похожи, то есть подгруппа G будет изоморфна некоторой другой подгруппе.

Рассмотрим некоторый фиксированный элемент x группы G. Построим отображение $f: a \to x^{-1}ax$ для любого элемента a группы G. Покажем, что преобразование f является изоморфизмом группы G на группу G. Так как $x^{-1}G = G$ и $Gx = G$, то $x^{-1}Gx = G$, а, следовательно, преобразование f является подстановкой в группе G. Проверим условие изоморфизма. Действительно, справедливо равенство

$$f(a_1a_2) = x^{-1}a_1a_2x = x^{-1}a_1xx^{-1}a_2x = f(a_1)f(a_2),$$

то есть операция сохранена и отображение f является изоморфизмом.

Проведём исследование введённого бинарного отношения сопряжённости групп на множестве произвольных групп.

Покажем, что сопряжённые подгруппы изоморфны.

Рассмотрим две подгруппы H и $H_1 = x^{-1}Hx$. Докажем, что эти подгруппы изоморфны. Рассмотрим отображение $f: g \to x^{-1}gx$, для любого элемента $g \in G$, которое представляет собой изоморфизм группы G на группу G. Тогда отображение $f: H \to x^{-1}Hx$ является взаимно-однозначным отображением подгруппы H на подгруппу H_1. Кроме того для любых элементов $h_1, h_2 \in H$ справедливо равенство

$$f(h_1 \cdot h_2) = f(h_1) \cdot f(h_2).$$

Поэтому отображение f каждую подгруппу, в частности подгруппу H, переводит в изоморфную подгруппу, в частности в подгруппу $H_1 = x^{-1}Hx$. Следовательно, сопряжённые подгруппы являются изоморфными между собой.

Рассмотрим произвольное множество M элементов из группы G, которое сопряженно с подгруппой из этого множества M. Покажем, что заданное множество является подгруппой этой группы.

Пусть M – подмножество элементов группы G, а $H \subseteq G$. Предположим, что подгруппы H и G сопряжены. Тогда существует элемент $x \in G$ такой, что выполняется равенство

$$M = x^{-1}Hx.$$

Следовательно, подгруппа M является образом подгруппы H при отображении $f: G \to x^{-1}Gx$, которое является изоморфизмом, а изоморфным образом множество является подгруппой данной группы.

Докажем теперь, что если множества M и $x^{-1}Mx$ являются сопряжёнными подмножествами, то нормализаторы этих подмножеств сопряжены с помощью этого заданного элемента x, то есть $N_G(x^{-1}Mx) = x^{-1}N_G(M)x$.

Пусть заданы два подмножества M и $x^{-1}Mx$. Необходимо доказать, что справедливо равенство $N_G(x^{-1}Mx) = x^{-1}N_G(M)x$.

Пусть $n \in N_G(x^{-1}Mx)$. По определению имеем:

$$n^{-1}\left(x^{-1}Mx\right)n = x^{-1}Mx$$

или

$$n^{-1}x^{-1}Mxn = x^{-1}Mx.$$

Умножая обе части равенства слева на элемент x, а справа на элемент x^{-1}, получаем

$$xn^{-1}x^{-1}Mxnx^{-1} = M.$$

По определению нормализатора, получаем принадлежность: $xnx^{-1} \in N_G(M)$. Умножим последнее включение слева на элемент x^{-1}, справа на элемент x:

$$n \in x^{-1}N_G(M)x.$$

Таким образом, выбрав произвольный элемент $n \in N_G(x^{-1}Mx)$, мы показали, что этот элемент $n \in x^{-1}N_G(M)x$, а, следовательно, справедливо включение

$$N_G\left(x^{-1}Mx\right) \subseteq x^{-1}N_G\left(M\right)x. \qquad (1)$$

Аналогичными рассуждениями доказываем обратное включение

$$x^{-1}N_G\left(M\right)x \subseteq N_G\left(x^{-1}Mx\right). \qquad (2)$$

Из включений (1) и (2) получаем искомое равенство. Таким образом, что нормализаторы являются сопряженными с помощью заданного элемента.

Сопряжённые группы обладают многими важными свойствами, которые применяются в практических исследованиях.

Покажем, что сопряжённые подгруппы имеют одинаковые индексы в группе.

Допустим, имеем две сопряжённые подгруппы: H и $H_1 = x^{-1}Hx$. Рассмотрим правостороннее разложение группы G по подгруппе H:

$$G = Hx_1 + Hx_2 + \ldots$$

Протрансформируем обе части равенства с помощью элемента x:

$$x^{-1}Gx = G = x^{-1}Hx_1x + x^{-1}Hx_2x + \ldots$$

или

$$G = \left(x^{-1}Hx\right)x_1x + \left(x^{-1}Hx\right)x^{-1}x_2x + \ldots$$

Введя обозначение $x^{-1}x_ix = y_i$, получаем

$$G = H_1y_1 + H_1y_2 + \ldots .$$

В результате преобразований имеем правостороннее разложение группы G по подгруппе H_1, причём порядки разложений равны $\left|G:H\right| = \left|G:H_1\right|$, что следует из равносильности $Hx_i = H_1y_i$. Следовательно, индексы сопряжённых подгрупп совпадают.

Докажем теперь, что сопряжённые элементы в произвольных группах имеют одинаковый порядок.

Пусть g и $x^{-1}gx$ – сопряжённые элементы. Допустим $g^r = e$ (3), то есть порядок g равен r. Проведём преобразования

$$\left(x^{-1}gx\right)^r = x^{-1}gx \cdot \ldots \cdot x^{-1}gx = \left(x^{-1}x\right)^r g^r = e^r \cdot e = e. \qquad (4)$$

В результате преобразования приходим к выводу: если порядок элемента g равен r, то и порядок сопряжённого элемента $x^{-1}gx$ делит r. Таким образом, из (3) следует равенства (4), и обратно из (4) следует равенство (3).

Из этого следует утверждение для элементов конечного порядка: сопряжённые элементы в группе имеют одинаковый порядок. Для элементов бесконечного порядка данное утверждение будет также справедливо. Если элемент g – элемент бесконечного порядка, то $x^{-1}gx$ – также элемент бесконечного порядка, ибо предположив обратное, придём к противоречию. Следовательно, доказано, что сопряжённые элементы имеют одинаковый порядок в произвольных группах.

Таким образом, в статье построена математическая модель сопряжённых групп и рассмотрены их основные свойства на основе изоморфизма.

Список использованных источников

1. Андерсон, Дж. Дискретная математика и комбинаторика / Дж. Андерсон. – М. : Диалектика, 2019. – 960 с.
2. Спирина, М. С. Дискретная математика / М. С. Спирина. – М. : Academia, 2018. – 576 с.
3. Хаггарти, Р. Дискретная математика для программистов / Р. Хаггарти. – М. : Техносфера, 2016. – 400 с.