

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«Витебский государственный технологический университет»

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Курс лекций

для студентов специальности 1-50 01 01
«Технология пряжи, тканей, трикотажа и нетканых материалов»

ВИТЕБСК
2014

УДК 510 (075.8)

ББК 22.1

П 75

Рецензент:

кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой
«Информатика» УО «ВГТУ» Казаков В.Е.

Рекомендовано к опубликованию редакционно-издательским
советом УО «ВГТУ», протокол № 5 от 16.06.2014.

Прикладная математика: курс лекций / сост.: Н. С. Статковский и др. –
П 75 Витебск : УО «ВГТУ», 2014. – 54 с.

ISBN 978-985-481-355-4

Курс лекций состоит из трех разделов: введение в систему
компьютерной математики Maple, операционное исчисление, теория
массового обслуживания.

В каждом разделе теоретический материал сопровождается примерами и
задачами, для решения которых применяются программы пакета Maple.

Предлагаемый курс лекций дополняет изданные ранее методические
указания к практическим занятиям по прикладной математике и
полностью соответствуют тем индивидуальным заданиям, которые
студент должен выполнить на практических занятиях.

УДК 510 (075.8)

ББК 22.1

ISBN 978-985-481-355-4

© УО «ВГТУ», 2014

СОДЕРЖАНИЕ

Тема 1. Введение в систему компьютерной математики Maple	4
1.1 Введение	4
1.2 Синтаксис команд	5
1.3 Некоторые особенности применения операторов и команд	9
1.4 Заключение	12
Тема 2. Операционное исчисление	14
2.1 Определение функции-оригинала	14
2.2 Изображение функции-оригинала по Лапласу. Свойства преобразования Лапласа	17
2.3 Применение операционного исчисления к решению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и их систем	26
Тема 3. Теория массового обслуживания	31
3.1 Марковские процессы с конечным числом состояний и непрерывным временем	31
3.2 Процессы рождения и гибели	39
3.3 Основные понятия и классификация систем массового обслуживания. Простейший поток заявок	41
3.4 Многоканальная СМО с отказами	45
Литература	53

ТЕМА 1. ВВЕДЕНИЕ В СИСТЕМУ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ MAPLE

1.1 Введение

Данный раздел посвящен обзору основных возможностей системы **Maple** и анализу типичных вопросов и ошибок, возникающих при практической работе в данной программе.

Важно: к сожалению, в классическом Maple не поддерживается функция авто скроллинга мышки (движение по экрану при помощи колесика). Поэтому для движения по документу надо либо зацепить скроллинг левой кнопкой мыши, либо двигать курсором (вверх–вниз) стрелками на клавиатуре.

Работа в Maple проходит в режиме сессии: пользователь вводит предложения (команды, выражения, процедуры), которые воспринимаются условно и обрабатываются Maple. Рабочее поле разделяется на три части:

1) область ввода – состоит из командных строк. Каждая командная строка начинается с красного символа **[>]**;

2) область вывода – содержит результаты обработки введенных команд в виде аналитических выражений, графических объектов или сообщений об ошибке. Область вывода появляется автоматически, если вы нажмете клавишу «Enter» (клавиша ввода). При этом результат, отображаемый в области вывода окрашен в другой цвет: $x := 11$;

3) область текстовых комментариев – содержит любую текстовую информацию, которая может пояснить выполняемые процедуры. Текстовые строки не воспринимаются Maple и никак не обрабатываются. Начинается текстовое поле символом **(I)**. Для того, чтобы переключить командную строку в текстовую, следует на **Панели инструментов** нажать мышью на кнопку . Обратное переключение текстовой строки в командную осуществляется нажатием на **Панели инструментов** кнопки . Область текстовых комментариев удобна для систематизации ваших расчетов.

Пример. Вы делаете несколько задач в одном документе. Практично вычисления как-то озаглавить. Делается это так:

1. Вставляете текстовый комментарий и после него опять командная строка.

2. После проведения одних вычислений вновь вставляется текстовый комментарий и после него опять командная строка. И так далее.

Пример:

> **restart;**

Найдем значение x

> **x:=5+6;**

$x := 11$

Найдем значение y

> **y:=7+8;**

y := 15

Найдем значение x+y

> x+y;

26

1.2 Синтаксис команд

В конце каждой команды должен быть знак (;) или (:). Разделитель (;) означает, что в области вывода после выполнения этой команды будет сразу виден результат. Разделитель (:) используется для отмены вывода, то есть когда команда выполняется, но ее результат на экран не выводится.

Пример.

> restart;

x:=5:

y:=7;

y := 7

В данном примере после переменной x стоит символ (:), поэтому значение x не выводится.

Символ процента (%) служит для вызова предыдущей команды. Для присвоения переменной заданного значения используется знак присвоить (:=).

Знак равенства (=) не присваивает значение переменной.

Важно: даже если вы не выводите значения переменной, после ее присвоения она сохраняется в памяти. Об этом надо помнить при проведении нескольких разных расчетов с одними и теми же переменными.

Пример.

> restart;

x:=5:

y:=7;

y := 7

> x=4;

5 = 4

В последней строке ввода использован символ (=), а не присвоить (:=), поэтому в памяти осталось старое значение x равное 5.

Для того чтобы обнулить значения переменных в документе, имеется команда (>restart;).

Символ процента (%) служит для вызова предыдущей команды. Для присвоения переменной заданного значения используется знак присвоить (:=).

Вычисления, которые используют множественные значения переменных, удобно записывать в одном блоке. Это можно сделать, записывая операторы в одну строку.

Пример.

> restart; x:=5; y:=6; x+y;

x := 5

$y := 6$
11

Однако при большом объеме исходных данных теряется их структурность, поэтому можно в одном блоке вычислений записывать каждый оператор в отдельной строке. Для этого достаточно в конце нажимать не клавишу ввода, а сначала удерживать клавишу «Shift», а затем «Enter». Это даст возможность быстрее найти значение, которое надо исправить или изменить.

Пример. Предыдущий пример будет выглядеть так:

> **restart;**
x:=5;
y:=6;
x+y;

$x := 5$
 $y := 6$
11

Система Maple является пакетом символьных вычислений. Это значит, что числа выводятся в том виде, в котором вы их задали. Например, если вы задали числа в виде обыкновенных дробей, то и результат будет представлен в таком же виде.

Пример.

> **restart;**
x:=5/6;
y:=6;
x+y;

$x := \frac{5}{6}$
 $y := 6$
 $\frac{41}{6}$

Если вы хотите представить результат в виде десятичной дроби, то достаточно одно из чисел записать в виде десятичной дроби.

> **restart;**
x:=5/6;
y:=6.0;
x+y;

$x := \frac{5}{6}$
 $y := 6.0$
6.833333333

Важно: по умолчанию отделение дробной части от целой производится с помощью **точки**! Поэтому десятичные числа лучше набирать с помощью цифровой клавиатуры компьютера.

Пример.

```
> restart;  
x:=5,6;  
y:=2;  
x+y;
```

```
x := 5, 6  
y := 2  
(5, 6) + 2
```

Вот что происходит, если поставить запятую в переменной x : система посчитала, что вы задали два числа, перечислив значения x как 5 и 6.

Система Maple очень чувствительна к буквам, с которыми вы работаете. Каждая буква, большая или маленькая, русская или английская, воспринимается по своему (т.е. это **разные буквы!**).

Типичные ошибки, которые при этом возникают, – это запись в разных местах блока вычислений букв при разной раскладке клавиатуры (русская или английская). К сожалению, в алфавитах есть буквы, которые пишутся одинаково.

Пример.

```
> restart;  
x:=5;  
y:=2;  
x+y;
```

```
õ := 5  
y := 2  
x + 2
```

Вопрос: «почему не посчиталось значение $x+y$?».

Ответ до банальности прост: «при записи либо оператора **$x:=5$** ; либо **$x+y$** ; буква была случайно набрана в другой раскладке».

Все вычисления в системе Maple по умолчанию производятся символьно, то есть результат будет содержать в явном виде иррациональные константы, такие как e , π и другие. Чтобы получить приближенное значение в виде числа с плавающей запятой, следует использовать команду `evalf(expr,t)`, где `expr` – выражение, `t` – точность, выраженная в числах после запятой.

Пример.

```
> restart;  
x:=Pi;  
y:=3;  
x+y;  
evalf(%)  
evalf(%,4);
```

```

x := π
y := 3
π + 3
6.141592654
6.142

```

Здесь использован символ (%) для вызова предыдущей команды. В предпоследней строке получен точный результат (в смысле точности самой программы), а в последней этот же результат с тремя знаками «после запятой».

Важно: как отмечалось выше, важны даже регистры, в которых набраны переменные. В частности, число (Pi) – это численное значение, а запись (pi) означает только символ.

Пример.

```

> restart;
pi:
evalf(%);
Pi:
evalf(%);

```

```

π
3.141592654

```

При записи громоздких вычислений очень часто надо записывать выражения, содержащие множество скобок. При стандартном вводе это осуществляется в одной строке и очень часто непонятно их достаточность. Если выражение математически некорректно, то Maple не будет вычислять выражения, переместив курсор в ошибочную точку ввода.

Пример.

```

> restart;
x:=1;
y:=2;
(x+y)^2/(x-y));
Error, `)` unexpected

```

Для просмотра выражения в математическом виде можно на блоке вычислений кликнуть правой кнопкой мыши и выбрать (Standart Math).

Пример.

```

> restart; x := 1; y := 2; (x+y)^2
x-y
Error, `)` unexpected

```

Увидев, как на самом деле воспринимается формула, делаем обратное действие: кликаем правой кнопкой мыши и убираем галочку (Standart Math), далее исправляем неправильный вариант скобок.

Пример.

```

> restart;
x:=1;
y:=2;

```


$$(x+y)^2/(x-y);$$

$$x := 1$$

$$y := 2$$

$$-9$$

1.3 Некоторые особенности применения операторов и команд

В системе Maple для некоторых математических операций существует по две команды: одна прямого, а другая отложенного исполнения. Имена команд состоят из одинаковых букв, за исключением первой: команды прямого исполнения начинаются со строчной буквы, а команды отложенного исполнения – с заглавной. После обращения к команде отложенного действия математические операции выводятся на экран в виде стандартной аналитической записи этой операции. Вычисление в этом случае сразу не производится. Команда прямого исполнения выдает результат сразу.

Например, для *вычисления пределов* имеются две команды: **прямого исполнения** – `limit(функция, x = a, par)`, где *a* – значение точки, для которой вычисляется предел, *par* – необязательный параметр для поиска односторонних пределов (*left* – слева, *right* – справа); **отложенного исполнения** – `Limit(expr, x = a, par)`, где параметры команды такие же, как и в предыдущем случае.

Пример (обратите внимание на первые буквы: слева начинаем с большой (заглавной), а справа первая буква маленькая).

> **restart;**

Limit(sin(x)/x, x=0)=limit(sin(x)/x, x=0);

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Это достаточно удобно (в совокупности с текстовыми комментариями) для оформления своих решений.

Пример.

Вычислим интеграл

> **restart;**

Int(x+sin(x), x=0..1)=int(x+sin(x), x=0..1);

$$\int_0^1 x + \sin(x) dx = \frac{3}{2} - \cos(1)$$

Систему Maple удобно использовать для решений всяческих уравнений: алгебраических, дифференциальных, матричных и т.д.

Для решения алгебраических уравнений можно использовать оператор `solve(equations, variables)`, где вместо параметра **equations** пишется ваше уравнение или функция (тогда находится корень функции), а параметр **variables** показывает относительно какой переменной решается уравнение. Это, кстати, означает, что можно решать и уравнения с параметрами.

Пример.

```
> restart;  
solve(a*x+3*x-4*(x-a)=0, x);  
solve(a*x+3*x-4*(x-a)=0, a);
```

$$-\frac{4a}{a-1}$$
$$\frac{x}{x+4}$$

В этом примере в первом случае оно решено относительно x , а во втором – относительно параметра a .

Пример.

```
> restart;  
solve(x^2+x+4=0, x);
```

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{15}, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}I\sqrt{15}$$

В рассмотренном примере дискриминант квадратного уравнения отрицательный, поэтому система Maple выдала решение в комплексных числах (символ I в решении соответствует мнимой комплексной единице).

Хочется обратить внимания еще на одну особенность. При решении уравнений часто имеется несколько корней, которые потом надо использовать при вычислении.

Пример.

```
> restart;  
solve(x^2+3*x-4=0, x);
```

$$1, -4$$

Решенное квадратное уравнение имеет два корня.

Чтобы не вписывать их вручную в дальнейшие вычисления, можно решению присвоить какое-то значение переменной, например, y (это особенно важно, если корни, например, иррациональные). Тогда при нескольких решениях эта переменная будет формироваться в виде массива, и корни будут соответствовать элементам массива. Т.е. $y[1]$ – это будет первое решение, а $y[2]$ – второе решение.

Пример.

```
> restart;  
y:=solve(x^2+x-4=0, x);  
y[1];  
y[2];
```

$$y := -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}$$
$$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}$$

найдем сумму корней

```
> y[1]+y[2];
```

-1

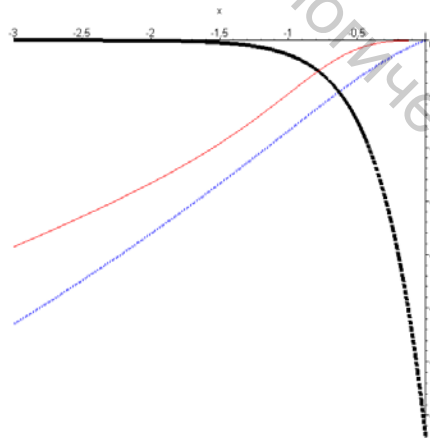
Отметим также некоторые графические возможности системы.

Для построения графиков $f(x)$ используется команда `plot(f(x), x=a..b, y=c..d, parameters)`, где `parameters` параметры управления изображением. Настройка изображения также может осуществляться с панели инструментов.

Основные параметры команды `plot`: **title**="text", где `text` заголовок рисунка; **coords**=polar - в полярных координатах; **axes** - установка типа осей: `axes=NORMAL`; `axes=BOXED`; `axes=FRAME`; `axes=NONE`; **scaling** - установка масштаба рисунка: `scaling=CONSTRAINED` одинаковый масштаб; `scaling=UNCONSTRAINED` - график масштабируется; **style**=LINE(PPOINT); **numpoints** = n - число точек графика.

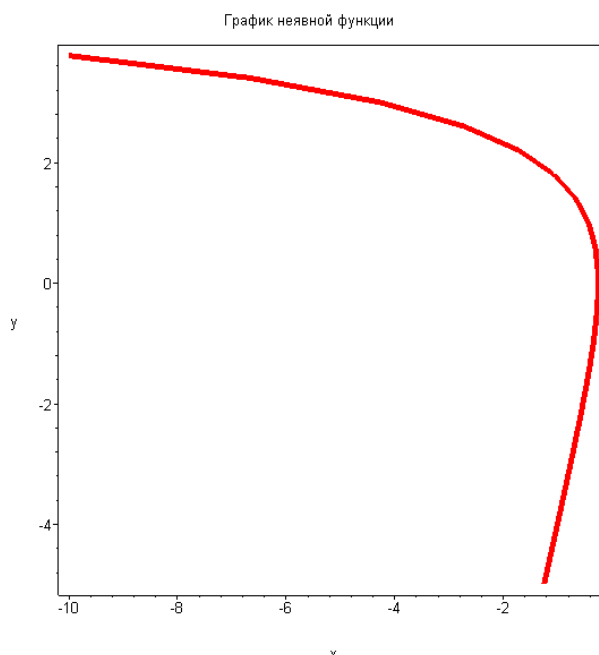
Пример (в данном примере на одном графике построены сразу три функции с различными окрасками, разными стилями линий и различной толщиной).

```
> restart;
f1:=x-ln(1+x^2):
f2:=x^3/(x^2+x+1):
f3:=(x-1)*exp(4*x+2):
plot({f1,f2,f3}, x=-
3..0, color=[red,black,blue], linestyle=
[0,3,10], thickness=[1,5,3]);
```



Для использования некоторых операторов в Maple иногда приходится подключать так называемые библиотеки. Это делается с помощью оператора `(with)`. В частности построим неявную кривую с помощью оператора `implicitplot`, который находится в одноименной библиотеке:

```
> restart; with(plots,implicitplot):
implicitplot(y=exp(y)+4*x, x=-10..10, y=-5..5, color=red,
axes=box, thickness=5, caption="График неявной функции");
```



1.4 Заключение

Изучить полностью систему Maple и все его возможности, конечно, нереально. Однако если в процессе работы у вас возникли трудности в написании оператора или другой вопрос по системе, существует система помощи. К сожалению, она на английском языке, но требует минимального знания основных слов. Вызов помощи можно осуществить либо непосредственно на панели инструментов, на вкладке (Help), либо клавишей (F1). В системе Maple существует также контекстная справка. Для ее вызова надо выделить мышкой (удерживая левую кнопку) слово или оператор, который вы хотите рассмотреть, и нажать комбинацию клавиш (Ctrl+F1).

В системе справки всегда имеются примеры, соответствующие рассматриваемому оператору или функции.

Эти примеры находятся в разделе (Examples) для открытой страницы справки.

Важно: в последних версиях системы Maple справка даже в классическом варианте открывается для новой стандартной системы. Это означает, что будет работать скроллинг мыши, и продвигаться по разделу справки уже удобнее, листая страницы колесиком мышки.

Выделив мышкой, их можно скопировать и вставить в ваш документ. После этого пример можно подправить под ваши вычисления. Копировать достаточно удобно при помощи горячей комбинации клавиш:

(Ctrl+C) – для копирования;

(Ctrl+V) – для вставки.

В заключение раздела приведем синтаксис основных математических функций.

Стандартные функции <i>Maple</i>		Стандартные функции <i>Maple</i>	
Математическая запись	Запись в <i>Maple</i>	Математическая запись	Запись в <i>Maple</i>
e^x	exp(x)	ctgx	cot(x)
x^m	x^m	Secx	sec(x)
$\sqrt[m]{x}$	x^(1/m)	Cosecx	csc(x)
lnx	Ln(x)	Arcsinx	arcsin(x)
lgx	log10(x)	Arccosx	arccos(x)
$\log_a x$	log[a](x)	Arctgx	arctan(x)
$\sqrt{a}$	sqrt(x)	Arcctgx	arccot(x)
a	abs(a)	Shx	sinh(x)
sinx	sin(x)	Chx	cosh(x)
cosx	cos(x)	Thx	tanh(x)
tgx	tan(x)	Cthx	coth(x)

ТЕМА 2. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Рассмотрим операционное исчисление как один из методов решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и систем таких уравнений. Каких-либо решающих преимуществ этот метод перед другими не имеет; в то же время его простота сделала его основным инструментом при решении задачи Коши в целом ряде прикладных наук (механике, радиотехнике, электротехнике и т.д.).

Идея операционного исчисления состоит в следующем. Пространство функций, удовлетворяющих некоторым достаточно общим условиям (пространство функций-оригиналов), взаимно однозначно отображается в другое пространство функций (пространство функций-изображений) так, что операциям дифференцирования и интегрирования в пространстве функций-оригиналов соответствуют более простые операции (операции умножения и деления) в пространстве функций-изображений. В результате, дифференциальное уравнение в пространстве функций-оригиналов преобразуется в линейное алгебраическое уравнение в пространстве функций-изображений, решение которого находится без проблем. Последнее действие – восстановление решения уравнения по его изображению.

Таким образом, необходимо изучить следующие вопросы:

1. Какие функции могут быть функциями-оригиналами и каковы свойства функций-изображений?
2. Каковы правила перевода оригиналов в изображения и обратно?
3. Какие изображения имеют основные элементарные функции (таблица стандартных изображений)?

И, наконец, рассмотрим применение программной системы Maple к нахождению прямого и обратного преобразования Лапласа, а также к решению дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений с помощью преобразования Лапласа.

2.1 Определение функции-оригинала

Определение. Комплексная функция $f(t)$ действительной переменной t называется оригиналом, если она удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $f(t) = 0$ при $t < 0$;
- 2) для всех $t \geq 0$ функция $f(t)$ непрерывна или имеет точки разрыва первого рода, причем на каждом конечном интервале оси Ot таких точек имеется лишь конечное число;
- 3) $f(t)$ возрастает не быстрее показательной функции, т.е. существуют такие постоянные $M > 0$ и $s_0 \geq 0$, что для всех $t > 0$ выполняется

$$|f(t)| \leq Me^{s_0 t}.$$

При этом число s_0 называется показателем роста функции $f(t)$.

Простейшей функцией-оригиналом является единичная функция Хевисайда

$$1(t) = \begin{cases} 0, t < 0; \\ 1, t \geq 0. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$\varphi(t) \cdot 1(t) = \begin{cases} 0, t < 0; \\ \varphi(t), t \geq 0. \end{cases}$$

Следовательно, если $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям 2 и 3, то $\varphi(t) \cdot 1(t)$ удовлетворяет всем условиям, налагаемым на функции-оригиналы. Для простоты записи будем в дальнейшем опускать множитель $1(t)$, условившись, что все рассматриваемые функции равны нулю для отрицательных значений t (например, вместо $1(t)$ будем писать 1, вместо $\sin t \cdot 1(t)$ просто $\sin t$ и т.д.); значит условие 1) определения функции-оригинала всегда будет для них выполняться. Таким образом, для проверки, может ли указанная функция быть оригиналом, надо проверить выполнение только условий 2) и 3).

Задание 1. Установить, являются ли оригиналами следующие функции:

$$a) f(t) = \frac{10}{t-1}, \quad б) f(t) = \cos 2t \sin^4 t, \quad в) f(t) = 6t^7, \quad г) f(t) = \frac{5}{t+4}.$$

Решение.

а) функция $f(t) = \frac{10}{t-1}$ определена и непрерывна для всех $t \geq 0$, кроме точки $t=1$, где она терпит разрыв. Выясним характер разрыва. Для этого найдем односторонние пределы $f(1-0)$ и $f(1+0)$:

$$f(1-0) = \lim_{t \rightarrow 1-0} \frac{10}{t-1} = \frac{10}{1-0-1} = \frac{10}{-0} = \left[C > 0 \Rightarrow \frac{C}{-0} = -\infty \right] = -\infty,$$

$$f(1+0) = \lim_{t \rightarrow 1+0} \frac{10}{t-1} = \frac{10}{1+0-1} = \frac{10}{+0} = \left[C > 0 \Rightarrow \frac{C}{+0} = +\infty \right] = +\infty.$$

Поскольку оба односторонних предела равны бесконечности, то $t=1$ — точка разрыва второго рода.

Таким образом, в точке $t=1$, принадлежащей промежутку $[0, +\infty)$, функция $f(t) = \frac{10}{t-1}$ имеет разрыв второго рода, а, значит, условие 2) не выполняется и функция оригиналом быть не может.

б) условие 2) выполнено, поскольку для всех $t \geq 0$ $f(t) = \cos 2t \sin^4 t$ — непрерывная функция.

Проверим выполнение условия 3). При $\forall t$ получаем

$$|f(t)| = |\cos 2t \sin^4 t| = |\cos 2t| \cdot |\cos^4 t| \leq 1 \cdot 1 = 1 = e^{0 \cdot t} \leq M \cdot e^{0 \cdot t}$$

или

$$|f(t)| = |\cos 2t \sin^4 t| \leq M \cdot e^{0 \cdot t},$$

где M – любое действительное число, большее или равное 1. Таким образом, условие 3) выполнено, и показатель роста для данной функции $s_0 = 0$. Вывод: данная функция является оригиналом.

в) условие 2) выполнено, поскольку для всех $t \geq 0$ $f(t) = 6t^7$ – непрерывная функция.

Проверим выполнение условия 3). Для этого рассмотрим графики функций $f(t) = t^7$ и $f(t) = e^{7t}$ (см. рис. 2.1).

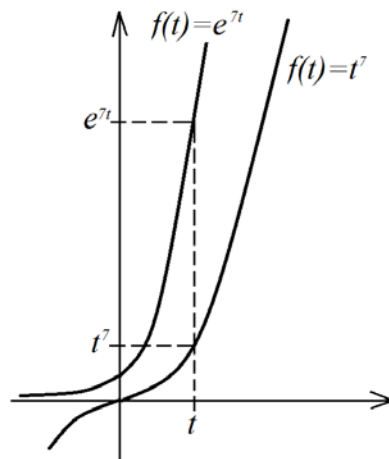


Рисунок 2.1

Очевидно, что при $t \geq 0$ получаем

$$t^7 < e^{7t}.$$

Тогда

$$|f(t)| = |6t^7| = 6|t^7| < 6e^{7t} \leq M \cdot e^{7t},$$

где M – любое действительное число, большее или равное 6. Таким образом, условие 3) выполнено, и показатель роста для данной функции $s_0 = 7$. Вывод: данная функция является оригиналом.

з) функция $f(t) = \frac{5}{t+4}$ терпит разрыв второго рода только в точке $t = -4$,

но $t = -4 \notin [0; +\infty)$, а значит, для всех $t \geq 0$ $f(t) = \frac{5}{t+4}$ – непрерывная функция и, следовательно, условие 2) выполнено.

Проверим выполнение условия 3). При $t \geq 0$ получаем

$$\frac{5}{t+4} \leq \frac{5}{4}.$$

Тогда

$$|f(t)| = \left| \frac{5}{t+4} \right| \leq \frac{5}{4} = \frac{5}{4} \cdot 1 = \frac{5}{4} \cdot e^0 = \frac{5}{4} \cdot e^{0 \cdot t} \leq M \cdot e^{0 \cdot t}$$

или

$$|f(t)| \leq M \cdot e^{0 \cdot t},$$

где M – любое действительное число, большее или равное $5/4$. Таким образом, условие 3) выполнено, и показатель роста для данной функции $s_0 = 0$. Вывод: данная функция является оригиналом.

2.2 Изображение функции-оригинала по Лапласу. Свойства преобразования Лапласа

Определение. Изображением по Лапласу функции-оригинала $f(t)$ называется функция комплексной переменной $p = s + i\omega$, определяемая равенством

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt.$$

Операцию перехода от оригинала $f(t)$ к изображению $F(p)$ называют преобразованием Лапласа. Соответствие между $f(t)$ и $F(p)$ обозначается $f(t) \xrightarrow{\text{Л}} F(p)$ или $F(p) \xleftarrow{\text{Л}} f(t)$.

Теорема. Для всякого оригинала $f(t)$ изображение $F(p)$ определено в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$, где s_0 – показатель роста $f(t)$, и является в этой полуплоскости аналитической функцией.

Задание 2. Пользуясь определением, найти изображения следующих функций:

а) $f(t) = 1$, б) $f(t) = 2t + 1$.

Решение.

а) при вычислении интеграла будут использованы формулы:

$$d(f(t)) = f'(t)dt, \quad \int_a^b f(t)dt = F(t)|_a^b = F(b) - F(a).$$

Тогда

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{\frac{u}{-pt}} d\left(\frac{u}{-pt}\right) = \\ &= \left[\int e^u du = e^u + C \right] = -\frac{1}{p} \lim_{b \rightarrow +\infty} (e^{-pt}|_0^b) = -\frac{1}{p} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^{pt}} \Big|_0^b \right) = \\ &= -\frac{1}{p} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^{pb}} - \frac{1}{e^0} \right) = -\frac{1}{p} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^{pb}} - 1 \right) = \left[\operatorname{Re} p > 0 \Rightarrow pb \xrightarrow{b \rightarrow +\infty} +\infty \right] = \\ &= -\frac{1}{p} \left(\frac{1}{e^{+\infty}} - 1 \right) = -\frac{1}{p} \left(\frac{1}{+\infty} - 1 \right) = -\frac{1}{p} (0 - 1) = \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

б) при вычислении интеграла понадобится формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du.$$

Тогда

$$F(p) = \int_0^{+\infty} (2t + 1) \cdot e^{-pt} dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \underbrace{(2t + 1)}_u \underbrace{e^{-pt}}_{dv} dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\begin{array}{l} u = 2t + 1 \Rightarrow du = d(2t + 1) = (2t + 1)' dt = 2dt \\ dv = e^{-pt} dt \Rightarrow v = \int e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \end{array} \right] = \\
&= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{(2t + 1)}_u \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{p} e^{-pt}\right)}_v \bigg|_0^b - \int_0^b \underbrace{\left(-\frac{1}{p} e^{-pt}\right)}_v \cdot \underbrace{2dt}_{du} \right) = \\
&= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2t + 1}{pe^{pt}} \bigg|_0^b + \frac{2}{p} \int_0^b e^{-pt} dt \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2b + 1}{pe^{pb}} + \frac{1}{p} \right) + \\
&+ \frac{2}{p} \lim_{b \rightarrow +\infty} \underbrace{\int_0^b e^{-pt} dt}_{= \frac{1}{p} \text{ (см. пример а)}} = - \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{(2b + 1)'_b}{(pe^{pb})'_b} + \frac{1}{p} + \frac{2}{p} \cdot \frac{1}{p} = - \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{2}{p^2 e^{pb}} + \frac{1}{p} + \frac{2}{p^2} = \\
&= - \underbrace{\frac{2}{+\infty}}_{=0} + \frac{1}{p} + \frac{2}{p^2} = \frac{1}{p} + \frac{2}{p^2}.
\end{aligned}$$

Примечание. При вычислении предела применялись свойства пределов:

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} (f(b) \pm g(b)) = \lim_{b \rightarrow +\infty} f(b) \pm \lim_{b \rightarrow +\infty} g(b),$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} (C \cdot f(b)) = C \cdot \lim_{b \rightarrow +\infty} f(b), \quad (C - const)$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} C = C \quad (C - const)$$

и правило Лопиталя:

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{f(b)}{g(b)} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{f'(b)}{g'(b)}.$$

Таким образом, используя определение преобразования Лапласа, можно доказать справедливость операционных соотношений, приведенных в таблице 2.1.

Таблица 2.1

№	Оригинал	Изображение	№	Оригинал	Изображение
1	$f(t) = 1$	$F(p) = \frac{1}{p}$	5	$f(t) = \sin \beta t$	$F(p) = \frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$
2	$f(t) = t$	$F(p) = \frac{1}{p^2}$	6	$f(t) = \cos \beta t$	$F(p) = \frac{p}{p^2 + \beta^2}$
3	$f(t) = t^n$	$F(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$	7	$f(t) = sh \beta t$	$F(p) = \frac{\beta}{p^2 - \beta^2}$
4	$f(t) = e^{\alpha t}$	$F(p) = \frac{1}{p - \alpha}$	8	$f(t) = ch \beta t$	$F(p) = \frac{p}{p^2 - \beta^2}$

Преобразование Лапласа обладает следующими свойствами.

1. Линейность. Если

$$f(t) \stackrel{*}{=} F(p), \quad g(t) \stackrel{*}{=} G(p),$$

а c_1 и c_2 – произвольные постоянные числа, то

$$c_1 f(t) \pm c_2 g(t) \stackrel{*}{=} c_1 F(p) \pm c_2 G(p).$$

Пример. Найдем изображение следующего оригинала:

$$5t - 7e^{2t}.$$

Поскольку (см. таблицу 2.1)

$$f(t) = t \stackrel{*}{=} \frac{1}{p^2} = F(p), \quad g(t) = e^{2t} \stackrel{*}{=} \frac{1}{p-2} = G(p),$$

то, согласно свойству линейности

$$\underbrace{5}_{c_1} \cdot \underbrace{t}_{f(t)} - \underbrace{7}_{c_2} \cdot \underbrace{e^{2t}}_{g(t)} \stackrel{*}{=} \underbrace{5}_{c_1} \cdot \underbrace{\frac{1}{p^2}}_{F(p)} - \underbrace{7}_{c_2} \cdot \underbrace{\frac{1}{p-2}}_{G(p)}.$$

2. Подобие. Если

$$f(t) \stackrel{*}{=} F(p),$$

и λ – любое положительное число, то

$$f(\lambda t) \stackrel{*}{=} \frac{1}{\lambda} \cdot F\left(\frac{p}{\lambda}\right).$$

Пример. Найдем изображение следующего оригинала:

$$(3t)^2.$$

Поскольку (см. таблицу 2.1)

$$f(t) = t^2 \stackrel{*}{=} \frac{2!}{p^{2+1}} = \frac{2}{p^3} = F(p),$$

то, согласно свойству подобия

$$f(3t) = (3t)^2 \stackrel{*}{=} \frac{1}{3} F\left(\frac{p}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{\left(\frac{p}{3}\right)^3} = \frac{2}{3 \cdot \frac{p^3}{9}} = \frac{2}{\frac{p^3}{3}} = \frac{2 \cdot 3}{p^3} = \frac{6}{p^3}.$$

3. Смещение. Если $f(t) \stackrel{*}{=} F(p)$, то для любого комплексного числа α

$$e^{\alpha t} f(t) \stackrel{*}{=} F(p - \alpha),$$

т.е. «смещение» изображения на α равносильно умножению оригинала на $e^{\alpha t}$.

Пример. Найдем изображение следующего оригинала

$$e^{2t} \cos 3t.$$

Поскольку (см. таблицу 2.1)

$$f(t) = \cos 3t \stackrel{*}{=} \frac{p}{p^2 + 9} = F(p),$$

то, согласно свойству смещения

$$e^{\frac{\alpha}{2}t} \cdot f(t) = e^{2t} \cdot \cos 3t \stackrel{*}{=} F\left(p - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{p - 2}{(p - 2)^2 + 9}$$

4. Запаздывание. Если $f(t) \stackrel{\cdot}{=} F(p)$ и θ – любое положительное число, то

$$f(t - \theta) \stackrel{\cdot}{=} e^{-p\theta} F(p),$$

т.е. запаздывание оригинала на положительную величину θ равносильно умножению изображения на $e^{-p\theta}$. Свойство запаздывания удобно применять для отыскания изображений функций, которые на разных интервалах задаются различными аналитическими выражениями.

Пример. Найдём изображение следующего оригинала

$$(t - 5)^3.$$

Поскольку (см. таблицу 2.1)

$$f(t) = t^3 \stackrel{\cdot}{=} \frac{3!}{p^{3+1}} = \frac{6}{p^4} = F(p),$$

то, согласно свойству запаздывания

$$f\left(t - \overset{\theta}{5}\right) = (t - 5)^3 \stackrel{\cdot}{=} e^{-p\overset{\theta}{5}} \cdot F(p) = e^{-5p} \frac{6}{p^4}.$$

5. Дифференцирование оригинала. Если $f(t) \stackrel{\cdot}{=} F(p)$ и существуют $f'(t), f''(t), \dots, f^{(n)}(t)$, и все они тоже являются оригиналами, то

$$f'(t) \stackrel{\cdot}{=} F(p) - f(0),$$

$$f''(t) \stackrel{\cdot}{=} p^2 F(p) - pf(0) - f'(0),$$

$$f'''(t) \stackrel{\cdot}{=} p^3 F(p) - p^2 f(0) - pf'(0) - f''(0),$$

$$f^{(n)}(t) \stackrel{\cdot}{=} p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

6. Дифференцирование изображения. Если $f(t) \stackrel{\cdot}{=} F(p)$, то

$$F'(p) \stackrel{\cdot}{=} -tf(t),$$

$$F''(p) \stackrel{\cdot}{=} (-1)^2 t^2 f(t),$$

...

$$F^n(p) \stackrel{\cdot}{=} (-1)^n t^n f(t),$$

т.е. дифференцирование изображения приводит к умножению оригинала на величину $(-t)$.

Примечание. Иногда свойство дифференцирования изображения более удобно применять в виде следующих соотношений:

$$tf(t) \stackrel{\cdot}{=} -F'(p),$$

$$t^2 f(t) \stackrel{\cdot}{=} (-1)^2 F''(p),$$

...

$$t^n f(t) \stackrel{\cdot}{=} (-1)^n F^{(n)}(p).$$

Пример. Найдём изображение следующего оригинала

$$t \cos t.$$

Поскольку (см. таблицу 2.1)

$$f(t) = \cos t \Leftrightarrow \frac{p}{p^2 + 1} = F(p),$$

то, согласно свойству дифференцирования изображения

$$\begin{aligned} tf(t) = t \cos t &\Leftrightarrow -F'(p) = -\left(\frac{p}{p^2 + 1}\right)' = \left[\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}\right] = \\ &= -\frac{p' \cdot (p^2 + 1) - p \cdot (p^2 + 1)'}{(p^2 + 1)^2} = -\frac{1 \cdot (p^2 + 1) - p \cdot 2p}{(p^2 + 1)^2} = \\ &= -\frac{p^2 + 1 - 2p^2}{(p^2 + 1)^2} = -\frac{1 - p^2}{(p^2 + 1)^2} = \frac{p^2 - 1}{(p^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

Задание 3. Найти изображения следующих оригиналов, используя

1) свойства преобразования Лапласа;

2) средства системы Maple (только пункты а), б) и в)).

а) $f(t) = 2 - 3t^2 + 4\cos t$; б) $f(t) = e^t t$; в) $f(t) = 5(t - 7)^4$; г) $f(t) = t \sin 2t$.

Решение.

1. Найдем изображения, используя свойства преобразования Лапласа.

а) используя табличные соотношения

$$1 \Leftrightarrow \frac{1}{p}, \quad t^2 \Leftrightarrow \frac{2}{p^3}, \quad \cos t \Leftrightarrow \frac{p}{p^2 + 1}$$

и свойство линейности, получаем

$$\begin{aligned} 2 - 3t^2 + 4\cos t &\Leftrightarrow 2 \cdot 1 - 3 \cdot \frac{2}{p^3} + 4 \cdot \frac{p}{p^2 + 1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{p} - 3 \cdot \frac{2}{p^3} + 4 \cdot \frac{p}{p^2 + 1} = \frac{2}{p} - \frac{6}{p^3} + \frac{4p}{p^2 + 1}. \end{aligned}$$

б) используя табличное соотношение $f(t) = t \Leftrightarrow \frac{1}{p^2} = F(p)$ и свойство смещения ($\alpha = 1$), получаем

$$e^t t = e^{\frac{\alpha}{1} t} \cdot \hat{t} \Leftrightarrow F\left(p - \frac{\alpha}{1}\right) = \frac{1}{(p - 1)^2}$$

в) используя табличное соотношение

$$f(t) = t^4 \Leftrightarrow \frac{4!}{p^{4+1}} = \frac{24}{p^5} = F(p),$$

свойство запаздывания ($\theta = 7$)

$$f(t - 7) = (t - 7)^4 \Leftrightarrow e^{-7p} F(p) = e^{-7p} \cdot \frac{24}{p^5}$$

и свойство линейности, получаем

$$5(t - 7)^4 \Leftrightarrow 5e^{-7p} \frac{24}{p^5} = e^{-7p} \frac{120}{p^5}.$$

2) используя табличное соотношение

$$f(t) = \sin 2t, \quad \frac{2}{p^2 + 2^2} = \frac{2}{p^2 + 4} = F(p)$$

и свойство дифференцирования изображения

$$tf(t) \stackrel{*}{=} -F'(p),$$

получаем

$$\begin{aligned} tf(t) = t \sin 2t &\stackrel{*}{=} -F'(p) = -\left(\frac{2}{p^2 + 4}\right)' = \left[\left(\frac{C}{u}\right)' = -\frac{Cu'}{u^2}\right] = \\ &= -\left(-\frac{2(p^2 + 4)'}{(p^2 + 4)^2}\right) = \frac{2 \cdot 2p}{(p^2 + 4)^2} = \frac{4p}{(p^2 + 4)^2}. \end{aligned}$$

2. Найдём изображения, используя средства системы Maple.

> with(inttrans);

> f(t) := 2 - 3*t^2 + 4*cos(t);

$$f(t) := 2 - 3t^2 + \cos t$$

> F := laplace(f(t), t, p);

$$F := \frac{2}{p} - \frac{6}{p^3} + \frac{4p}{p^2 + 1}$$

> g(t) := exp(t)*t;

$$g(t) := e^t t$$

> G := laplace(g(t), t, p);

$$G := \frac{1}{(p-1)^2}$$

> h(t) := t*sin(2*t) ;

$$h(t) := t \sin 2t$$

> H := laplace(h(t), t, p);

$$H := \frac{4p}{(p^2 + 4)^2}$$

Задание 4. Найти оригиналы по их изображениям, используя

1) свойства преобразования Лапласа;

2) средства системы Maple (только пункты а), в), г)).

$$а) F(p) = \frac{p-7}{p^2-2p-3}; \quad б) F(p) = \frac{p+4}{p^2+5};$$

$$в) F(p) = \frac{p+1}{p^2-p+2}; \quad г) F(p) = e^{-3p} \frac{1}{p^2+7}.$$

Решение.

1. Найдём оригиналы, используя свойства преобразования Лапласа.

а) действие первое. Квадратный трехчлен в знаменателе следует разложить на множители (если это возможно). Для этого нужно найти его корни, решив следующее квадратное уравнение.

$$p^2 - 2p - 3 = 0$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16, \quad \sqrt{D} = 4$$

$$p_1 = \frac{-(-2) - 4}{2} = \frac{2 - 4}{2} = -1, \quad p_2 = \frac{-(-2) + 4}{2} = \frac{2 + 4}{2} = 3$$

Воспользуемся формулой:

$$p^2 \pm bp \pm c = (p - p_1)(p - p_2),$$

где p_1 и p_2 – корни. Получим:

$$p^2 - 2p - 3 = (p + 1)(p - 3).$$

Таким образом, имеем:

$$\frac{p - 7}{p^2 - 2p - 3} = \frac{p - 7}{(p + 1)(p - 3)}.$$

б) действие второе. Используя метод неопределенных коэффициентов, представим изображение в виде суммы простых дробей:

$$\frac{p - 7}{(p + 1)(p - 3)} = \frac{A}{p + 1} + \frac{B}{p - 3},$$

где A и B – пока неизвестные коэффициенты. Для их нахождения дроби в правой части последнего равенства приведем к общему знаменателю:

$$\frac{p - 7}{(p + 1)(p - 3)} = \frac{A}{p + 1} + \frac{B}{p - 3} = \frac{A(p - 3) + B(p + 1)}{(p + 1)(p - 3)}$$

Поскольку знаменатель дроби, стоящей в левой части последнего равенства, равен знаменателю дроби, стоящей в правой части, то, следовательно, должны быть равны и числители:

$$p - 7 = A(p - 3) + B(p + 1).$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов надо в последнее равенство последовательно подставить столько произвольных значений переменной p , сколько этих неизвестных коэффициентов. В данном случае неизвестными являются A и B , поэтому необходимо взять два значения, например $p = -1$ и $p = 3$. Получим два линейных уравнения, которые объединим в систему.

$$\left. \begin{array}{l} p = -1: -4A = -8 \\ p = 3: 4B = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A = 2 \\ B = -1 \end{array} \right\}$$

Таким образом,

$$\frac{p - 7}{p^2 - 2p - 3} = \frac{2}{p + 1} + \frac{-1}{p - 3} = \frac{2}{p + 1} - \frac{1}{p - 3}.$$

Используя табличные соотношения

$$\frac{1}{p + 1} \stackrel{.}{=} e^{-t}, \quad \frac{1}{p - 3} \stackrel{.}{=} e^{3t}$$

и свойство линейности, получаем

$$\frac{2}{p + 1} - \frac{1}{p - 3} = 2 \cdot \frac{1}{p + 1} - \frac{1}{p - 3} \stackrel{.}{=} 2e^{-t} - e^{3t}.$$

в) дробь преобразуем для «подгонки» под операционные соотношения №5 и №6:

$$\begin{aligned}\frac{p+4}{p^2+5} &= \frac{p}{p^2+5} + \frac{4}{p^2+5} = \frac{p}{p^2+(\sqrt{5})^2} + 4 \cdot \frac{1}{p^2+(\sqrt{5})^2} = \\ &= \frac{p}{p^2+(\sqrt{5})^2} + 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{p^2+(\sqrt{5})^2} = \frac{p}{p^2+(\sqrt{5})^2} + \frac{4}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{p^2+(\sqrt{5})^2}.\end{aligned}$$

Используя табличные соотношения

$$\frac{p}{p^2+(\sqrt{5})^2} = \cos\sqrt{5}t, \quad \frac{\sqrt{5}}{p^2+(\sqrt{5})^2} = \sin\sqrt{5}t$$

и свойство линейности, получим:

$$\frac{p}{p^2+(\sqrt{5})^2} + \frac{4}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{p^2+(\sqrt{5})^2} = \cos\sqrt{5}t + \frac{4}{\sqrt{5}} \sin\sqrt{5}t.$$

2) в данном примере квадратный трехчлен в знаменателе дроби невозможно разложить на множители, поскольку дискриминант соответствующего квадратного уравнения меньше нуля:

$$D = (-1)^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 = 1 - 4 < 0.$$

В таком случае, нужно в знаменателе выделить полный квадрат. Для этого воспользуемся формулой

$$p^2 \pm bp + c = \left(p \pm \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c.$$

Получим:

$$\begin{aligned}p^2 - p + 2 &= p^2 - 1 \cdot p + 2 = [b=1, c=2] = \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 = \\ &= \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 2 = \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{-1+8}{4} = \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} = \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2.\end{aligned}$$

Представим изображение в виде:

$$\frac{p+1}{p^2-p+2} = \frac{p+1}{\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}.$$

Последнюю дробь преобразуем для «подгонки» под операционные соотношения №5 и №6 таблицы. Для этого воспользуемся формулой

$$\begin{aligned}\frac{p \pm k}{(p \pm \alpha)^2 + \beta^2} &= \frac{(p \pm \alpha) + (\overbrace{\mp \alpha \pm k}^c)}{(p \pm \alpha)^2 + \beta^2} = \frac{(p \pm \alpha)}{(p \pm \alpha)^2 + \beta^2} + \frac{c}{(p \pm \alpha)^2 + \beta^2} = \\ &= \frac{(p \pm \alpha)}{(p \pm \alpha)^2 + \beta^2} + c \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\beta}{(p \pm \alpha)^2 + \beta^2}.\end{aligned}$$

Получим:

$$\begin{aligned} \frac{p+1}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} &= \frac{\left(p-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}+1\right)}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = \frac{\left(p-\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = \\ &= \frac{p-\frac{1}{2}}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} + \frac{\frac{3}{2}}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = \frac{p-\frac{1}{2}}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} + \\ &+ \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = \frac{p-\frac{1}{2}}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} + \frac{3}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}. \end{aligned}$$

Используя табличные соотношения №5 и №6

$$\frac{p}{p^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = \cos \frac{\sqrt{7}}{2} t, \quad \frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{p^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = \sin \frac{\sqrt{7}}{2} t,$$

свойства смещения $\left(\alpha = \frac{1}{2}\right)$

$$\frac{p-\frac{1}{2}}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = e^{\frac{1}{2}t} \cdot \cos \frac{\sqrt{7}}{2} t, \quad \frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = e^{\frac{1}{2}t} \cdot \sin \frac{\sqrt{7}}{2} t$$

и свойство линейности, получаем

$$f(t) = e^{\frac{1}{2}t} \cdot \cos \frac{\sqrt{7}}{2} t + \frac{3}{\sqrt{7}} \cdot e^{\frac{1}{2}t} \cdot \sin \frac{\sqrt{7}}{2} t.$$

д) так, как

$$F(p) = \frac{1}{p^2 + 7} = \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{p^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \sin \sqrt{7} t = f(t),$$

то, используя свойство запаздывания ($\theta = 3$), получаем

$$e^{-\frac{\theta}{3}p} F(p) = e^{-3p} \cdot \frac{1}{p^2 + 7} = f\left(t - \frac{\theta}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \sin \sqrt{7}(t - 3).$$

2. Найдем оригиналы, используя средства системы Maple.

> with(inttrans);

> F(p):=(p-7)/(p^2-2*p-3);

$$F(p) = \frac{p-7}{p^2-2p-3}$$

> f:=invlaplace(F(p),p,t);

$$f := -e^{(3t)} + 2e^{(-t)}$$

> G(p):=(p+1)/(p^2-p+2);

$$G(p) = \frac{p+1}{p^2-p+2}$$

> g:=invlaplace(G(p),p,t);

$$g := e^{\left(\frac{1}{2}t\right)} \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}t\right) + \frac{3}{7}\sqrt{7}e^{\left(\frac{1}{2}t\right)} \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}t\right)$$

> H(p) := exp(-3*p)*(1/(p^2+7));

$$H(p) = e^{-3p} \frac{1}{p^2 + 7}$$

> h:=invlaplace(H(p),p,t);

$$h := \frac{1}{7} \text{Heaviside}(t-3) \sin(\sqrt{7}(t-3)) \sqrt{7}$$

Здесь $\text{Heaviside}(t-3)$ - это функция Хевисайда (см. выше)

$$\text{Heaviside}(t-3) = \begin{cases} 0, & t-3 < 0 \\ t-3, & t-3 \geq 0. \end{cases}$$

2.3 Применение операционного исчисления к решению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и их систем

Пусть дано линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t) \quad (2.1)$$

и начальные условия:

$$y(0) = C_0, y'(0) = C_1. \quad (2.2)$$

На первом шаге перейдем от оригиналов к соответствующим изображениям. Поэтому будем считать, что искомая функция $y(t)$, ее производные $y'(t), y''(t)$ и функция $f(t)$ являются оригиналами и

$$y(t) \cdot = Y(p), f(t) \cdot = F(p).$$

Тогда по свойству дифференцирования оригинала

$$y'(t) \cdot = pY(p) - y(0) = pY(p) - C_0,$$

$$y''(t) \cdot = p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2 Y(p) - pC_0 - C_1.$$

Далее, воспользовавшись свойством линейности оригинала, вместо дифференциального уравнения (2.1) с начальными условиями (2.2) получим операторное уравнение

$$a_2 (p^2 Y(p) - pC_0 - C_1) + a_1 (pY(p) - C_0) + a_0 Y(p) = F(p).$$

Разрешим его относительно $Y(p)$:

$$Y(p)(a_2 p^2 + a_1 p + a_0) = F(p) + C_0(a_2 p + a_1) + C_1 a_2,$$

$$Y(p) = \frac{F(p) + C_0(a_2 p + a_1) + C_1 a_2}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}.$$

Если теперь по изображению $Y(p)$ найдем оригинал $y(t)$, то это и будет искомое частное решение.

Задание 5. Найти решение дифференциального уравнения

$$y'' - 2y' + y = 4e^t,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = 0, y'(0) = 2,$$

используя

1) свойства преобразования Лапласа;

2) средства системы Maple.

Решение.

1) составим соответствующее операторное уравнение.

Пусть искомое решение $y(t)$ – оригинал и $Y(p)$ – его изображение, то есть

$$y(t) \stackrel{.}{=} Y(p).$$

Тогда по свойству дифференцирования оригинала имеем:

$$y'(t) \stackrel{.}{=} pY(p) - y(0) = pY(p),$$

$$y''(t) \stackrel{.}{=} p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - 2.$$

Воспользовавшись свойством линейности, получим:

$$y'' - 2y' + y \stackrel{.}{=} p^2Y(p) - 2 - 2pY(p) + Y(p) = Y(p)(p^2 - 2p + 1) - 2.$$

Найдем изображение правой части ДУ:

$$4e^t \stackrel{.}{=} \frac{4}{p-1},$$

то операторное уравнение имеет вид

$$Y(p)(p^2 - 2p + 1) - 2 = \frac{4}{p-1}$$

Из полученного уравнения найдем $Y(p)$:

$$Y(p)(p-1)^2 = \frac{4}{p-1} + 2,$$

$$Y(p)(p-1)^2 = \frac{2p+2}{p-1}.$$

$$Y(p) = \frac{2p+2}{(p-1)^3}.$$

Представим $Y(p)$ в виде суммы простых дробей:

$$\frac{2p+2}{(p-1)^3} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{(p-1)^2} + \frac{C}{(p-1)^3} = \frac{A(p-1)^2 + B(p-1) + C}{(p-1)^3} \Rightarrow$$

$$2p+2 = A(p-1)^2 + B(p-1) + C.$$

Для нахождения A, B и C составим систему:

$$\left. \begin{array}{l} p=1: C=4 \\ p=0: A-B+C=2 \\ p=2: A+B+C=6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A=0 \\ B=2 \\ C=4 \end{array} \right\}.$$

Таким образом,

$$Y(p) = \frac{2p+2}{(p-1)^3} = \frac{2}{(p-1)^2} + \frac{4}{(p-1)^3}.$$

Но

$$\frac{1}{p^2} \cdot = t, \quad \frac{2}{p^3} \cdot = t^2,$$

поэтому по свойству смещения

$$\frac{1}{(p-1)^2} \cdot = e^t t, \quad \frac{2}{(p-1)^3} \cdot = e^t t^2.$$

Осталось воспользоваться свойством линейности:

$$Y(p) = \frac{2}{(p-1)^2} + \frac{4}{(p-1)^3} = 2 \cdot \frac{1}{(p-1)^2} + 2 \cdot \frac{2}{(p-1)^3} \cdot = 2e^t t + 2e^t t^2 = y(t).$$

Следовательно, искомое решение

$$y(t) = 2e^t t + 2e^t t^2 = 2e^t (t + t^2).$$

2) данное дифференциальное уравнение можно решить средствами системы Maple с использованием преобразования Лапласа.

> ur:=diff(y(t),t\$2)-2*diff(y(t),t)+y(t)=4*exp(t);

$$ur := \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) - 2 \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + y(t) = 4e^t$$

> dsolve({ur,y(0)=0,D(y)(0)=2},y(t),method=laplace);

$$y(t) = 2(t + t^2)e^t$$

Решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами операционным методом проводится по той же схеме, что и решение одного дифференциального уравнения.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y \\ y' = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \quad x(0) = c_1, y(0) = c_2,$$

где a_{ij}, c_1, c_2 - постоянные.

Пусть искомые функции $x(t)$ и $y(t)$ являются оригиналами и $X(p), Y(p)$ - их изображения. Тогда

$$x'(t) \cdot = pX(p) - x(0) = pX(p) - c_1, \quad y'(t) \cdot = pY(p) - y(0) = pY(p) - c_2$$

и система операторных уравнений примет вид

$$\begin{cases} pX(p) - c_1 = a_{11}X(p) + a_{12}Y(p) \\ pY(p) - c_2 = a_{21}X(p) + a_{22}Y(p) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (p - a_{11})X(p) - a_{12}Y(p) = c_1 \\ -a_{21}X(p) + (p - a_{22})Y(p) = c_2. \end{cases}$$

Таким образом, для изображений $X(p)$ и $Y(p)$ получили систему линейных алгебраических уравнений, которую можно решить, например, по формулам Крамера. Для этого надо составить и вычислить три определителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & p - a_{22} \end{vmatrix} = (p - a_{11})(p - a_{22}) - a_{12}a_{21},$$

$$\Delta_X = \begin{vmatrix} c_1 & -a_{12} \\ c_2 & p - a_{22} \end{vmatrix} = c_1(p - a_{22}) + c_2a_{12},$$

$$\Delta_Y = \begin{vmatrix} p - a_{11} & c_1 \\ -a_{21} & c_2 \end{vmatrix} = c_2(p - a_{11}) + c_1a_{21}.$$

По формулам Крамера получаем

$$X(p) = \frac{\Delta_X}{\Delta}, Y(p) = \frac{\Delta_Y}{\Delta}.$$

Осталось найти соответствующие оригиналы для $X(p)$ и $Y(p)$.

Задание 6. Решить систему дифференциальных уравнений, удовлетворяющую заданным начальным условиям:

$$\begin{cases} x' = 5x + 8y, \\ y' = 3x + 3y, \end{cases} \quad x(0) = 0, y(0) = 5.$$

Решение. Пусть искомые функции $x(t)$ и $y(t)$ – оригиналы и $X(p), Y(p)$ – их изображения. Тогда

$$x'(t) \cdot = pX(p) - x(0) = pX(p),$$

$$y'(t) \cdot = pY(p) - y(0) = pY(p) - 5$$

и система операторных уравнений примет вид

$$\begin{cases} pX(p) = 5X(p) + 8Y(p), \\ pY(p) - 5 = 3X(p) + 3Y(p), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (p - 5)X(p) - 8Y(p) = 0, \\ -3X(p) + (p - 3)Y(p) = 5. \end{cases}$$

Решим последнюю систему по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p - 5 & -8 \\ -3 & p - 3 \end{vmatrix} = (p - 5)(p - 3) - 24 = p^2 - 8p - 9,$$

$$\Delta_X = \begin{vmatrix} 0 & -8 \\ 5 & p - 3 \end{vmatrix} = 40,$$

$$\Delta_Y = \begin{vmatrix} p - 5 & 0 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 5(p - 5).$$

Тогда

$$X(p) = \frac{\Delta_X}{\Delta} = \frac{40}{p^2 - 8p - 9},$$

$$Y(p) = \frac{\Delta_Y}{\Delta} = \frac{5p - 25}{p^2 - 8p - 9}.$$

Представим $X(p)$ в виде суммы простейших дробей.

$$X(p) = \frac{40}{p^2 - 8p - 9} = \left[D = 100 \Rightarrow p_1 = 9, p_2 = -1 \right] = \frac{40}{(p - 9)(p + 1)},$$

$$\frac{40}{(p-9)(p+1)} = \frac{A}{p-9} + \frac{B}{p+1} = \frac{A(p+1) + B(p-9)}{(p-9)(p+1)} \Rightarrow$$

$$40 = A(p+1) + B(p-9).$$

Для нахождения A и B составим систему, подставив поочередно любые два значения переменной p в левую и правую части последнего равенства:

$$\left. \begin{array}{l} p = -1: 40 = -10B \\ p = 9: 40 = 10A \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} B = -4 \\ A = 4 \end{array} \right\}.$$

Получим:

$$X(p) = \frac{4}{p-9} + \frac{-4}{p+1} = 4 \cdot \frac{1}{p-9} - 4 \cdot \frac{1}{p+1}.$$

Представим $Y(p)$ в виде суммы простейших дробей.

$$Y(p) = \frac{5p-25}{p^2-8p-9} = \frac{C}{p-9} + \frac{D}{p+1} = \frac{C(p+1) + D(p-9)}{(p-9)(p+1)} \Rightarrow$$

$$5p-25 = C(p+1) + D(p-9).$$

Для нахождения C и D составим систему, подставив поочередно любые два значения переменной p в левую и правую части последнего равенства:

$$\left. \begin{array}{l} p = -1: -30 = -10D \\ p = 9: 20 = 10C \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} D = 3 \\ C = 2 \end{array} \right\}.$$

Получим:

$$Y(p) = \frac{2}{p-9} + \frac{3}{p+1} = 2 \cdot \frac{1}{p-9} + 3 \cdot \frac{1}{p+1}.$$

Осталось найти соответствующие оригиналы для $X(p)$ и $Y(p)$. Для этого воспользуемся табличным соотношением №4 и свойством линейности.

$$X(p) = 4 \cdot \frac{1}{p-9} - 4 \cdot \frac{1}{p+1} \Rightarrow 4e^{9t} - 4e^{-t},$$

$$Y(p) = 2 \cdot \frac{1}{p-9} + 3 \cdot \frac{1}{p+1} \Rightarrow 2e^{9t} + 3e^{-t}.$$

Таким образом,

$$x(t) = 4e^{9t} - 4e^{-t}, y(t) = 2e^{9t} + 3e^{-t}.$$

Данную систему дифференциальных уравнений можно решить средствами системы Maple с использованием преобразования Лапласа.

```
> with(inttrans);
```

```
> sys:=diff(x(t),t)=5*x(t)+8*y(t),diff(y(t),t)=3*x(t)+3*y(t);
```

$$\text{sys} := \frac{d}{dt} x(t) = 5x(t) + 8y(t), \frac{d}{dt} y(t) = 3x(t) + 3y(t)$$

```
> fcns:={x(t), y(t)};
```

$$fcns := \{x(t), y(t)\}$$

```
> dsolve({sys, x(0)=0, y(0)=5}, fcns, laplace);
```

$$\{x(t) = 4e^{(9t)} - 4e^{(-t)}, y(t) = 2e^{(9t)} + 3e^{(-t)}\}$$

ТЕМА 3. ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

3.1 Марковские процессы с конечным числом состояний и непрерывным временем

Пусть S – некоторая система, которая может находиться в одном из состояний $S_1, S_2, \dots, S_n$, а переход из одних состояний в другие может происходить случайным образом в произвольные моменты времени. В таком случае говорят о случайном процессе с непрерывным временем.

Говорят, что в системе S отсутствует последствие, если вероятность перехода из любого состояния S_i в любое состояние S_j не зависит от того, в каких состояниях система находилась до того, как попала в состояние S_i . Непрерывный случайный процесс с отсутствием последствия называют непрерывной марковской цепью.

Плотностью вероятности перехода из состояния S_i в состояние S_j называется функция $\lambda_{ij}(t) = p'_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t + \Delta t) - p_{ij}(t)}{\Delta t}$, где $p_{ij}(t)$ – вероятность того, что до момента времени t произойдет переход из S_i в S_j . Если величины $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(t)$ не зависят от t , то марковский процесс называется однородным. Величину λ_{ij} называют интенсивностью перехода системы из S_i в S_j . Величины λ_{ij} определяют экспериментальным образом или из условия решаемой задачи.

Переходы системы S в различные состояния удобно обозначать с помощью графа состояний (см. рис. 3.1).

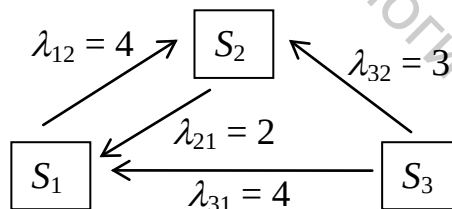


Рисунок 3.1 – Пример записи однородной марковской цепи с помощью графа.

На рис. 3.1 вершины графа S_1, S_2, S_3 обозначают три различных возможных состояния системы S . Стрелка, направленная из вершины S_i в вершину S_j , обозначает переход $S_i \rightarrow S_j$. Рядом со стрелками ставят численные значения интенсивности перехода λ_{ij} .

Состояния S_i и S_j называются сообщающимися, если возможны переходы как из S_i в S_j , так и из S_j в S_i . На рис. 3.1 сообщающимися являются состояния S_1 и S_2 . Пары состояний S_1, S_3 и S_2 и S_3 сообщающимися не являются.

Состояние S_i называется существенным, если всякое S_j , достижимое из S_i является сообщаемым с S_i . Состояние S_i называется несущественным, если оно не является существенным. На рис. 3.1 существенными являются S_1 и S_2 .

Пусть $p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)$ – вероятности нахождения системы S соответственно в состояниях $S_1, S_2, \dots, S_n$ в момент времени t . Из теоремы сложения несовместных событий для каждого фиксированного момента времени следует, что

$$p_1(t) + p_2(t) + \dots + p_n(t) = 1$$

Говорят, что при $t \rightarrow \infty$ в системе устанавливается стационарный режим, если существуют конечные пределы. Заметим, что реальные системы достаточно быстро входят в стационарный режим функционирования.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_1(t) = p_1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p_2(t) = p_2, \quad \dots, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p_n(t) = p_n \quad (3.1)$$

Числа $p_1, p_2, \dots, p_n$ называются предельными (финальными) вероятностями.

Теорема 1. Если S_k – несущественное состояние, то $\lim_{t \rightarrow \infty} p_k(t) = 0$, то есть при $t \rightarrow \infty$ система выходит из любого несущественного состояния.

Теорема 2. Система с конечным числом состояний имеет единственное предельное распределение вероятностей состояний $p_1, p_2, \dots, p_n$ тогда и только тогда, когда все ее существенные состояния являются сообщаемыми между собой.

Система на рис.3.1 удовлетворяет этой теореме, так как существенные состояния S_1 и S_2 сообщаются между собой.

Вероятности $p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)$ можно вычислить по заданным интенсивностям перехода λ_{ij} с помощью системы дифференциальных уравнений, называемых уравнениями Колмогорова. Для составления уравнений Колмогорова используют граф состояний системы и руководствуются следующим правилом.

Правило записи j -го уравнения, ($j = 1, \dots, n$):

1) в левой части уравнения записываем производную $p_j'(t)$;

2) в правой части уравнения:

а) для каждой стрелки $S_k \xrightarrow{\lambda_{kj}} S_j$, входящей в S_j , записываем со знаком (+) слагаемое $\lambda_{kj} \cdot p_k$;

б) для каждой стрелки $S_j \xrightarrow{\lambda_{jk}} S_k$, выходящей из S_j , записываем со знаком (–) слагаемое $\lambda_{jk} \cdot p_j$.

Обратим внимание на то, что в пунктах а) и б) первый индекс переменной λ совпадает с индексом величины p .

К построенным по указанному правилу n уравнениям нужно добавить нормирующее уравнение

$$p_1(t) + p_2(t) + \dots + p_n(t) = 1$$

Получим систему дифференциальных уравнений первого порядка относительно неизвестных функций $p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)$ с постоянными коэффициентами λ_{ij} . Далее применяются равенства (3.1) и записывается система линейных уравнений относительно финальных вероятностей $p_1, p_2, \dots, p_n$ (в предположении, что система входит в стационарный режим).

Для иллюстрации метода найдем вероятности перехода p_1, p_2, p_3 для системы S , изображенной графом на рис.3.1. Система Колмогорова для нее запишется следующим образом:

$$\begin{cases} p_1'(t) = -\lambda_{12}p_1(t) + \lambda_{21}p_2(t) + \lambda_{31}p_3(t) \\ p_2'(t) = \lambda_{12}p_1(t) - \lambda_{21}p_2(t) + \lambda_{32}p_3(t) \\ p_3'(t) = -(\lambda_{31} + \lambda_{32})p_3(t) \\ p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) = 1 \end{cases} \quad (3.2)$$

Решение системы (3.2) сложно и громоздко и во многих случаях не является необходимым, поскольку реальные системы достаточно быстро входят в стационарный режим функционирования.

Предположим, что при $t \rightarrow \infty$ в системе S устанавливается стационарный режим. Следовательно, можно применить равенства (3.1):

$\lim_{t \rightarrow \infty} p_k(t) = p_k, k = 1, 2, 3$. В систему (3.2) вместо функций $p_1(t), p_2(t), p_3(t)$

подставим финальные вероятности p_1, p_2, p_3 . При этом также выполним замены

$p_1'(t) = (p_1)' = 0, p_2'(t) = (p_2)' = 0, p_3'(t) = (p_3)' = 0$, то есть в систему (3.2)

вместо производных $p_1'(t), p_2'(t), \dots, p_n'(t)$ запишем нули.

Получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 0 = -\lambda_{12}p_1 + \lambda_{21}p_2 + \lambda_{31}p_3 \\ 0 = \lambda_{12}p_1 - \lambda_{21}p_2 + \lambda_{32}p_3 \\ 0 = -(\lambda_{31} + \lambda_{32})p_3 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases} \quad (3.3)$$

Подставим в систему (3.3) значения коэффициентов λ_{ij} из графа

на рис. 1 и получим линейную систему относительно неизвестных p_1, p_2, p_3 .

$$\begin{cases} -p_1 + 2p_2 + 4p_3 = 0 \\ p_1 - 2p_2 + 3p_3 = 0 \\ -7p_3 = 0 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases} \quad (3.4)$$

Решим систему (3.4) методом Гаусса. Получим

$$p_1 = \frac{2}{3}, \quad p_2 = \frac{1}{3}, \quad p_3 = 0$$

– вероятности нахождения системы S в состояниях S_1, S_2, S_3 после вхождения ее в стационарный режим.

Найденные вероятности показывают, что в после входа в стационарный режим система не может находиться в состоянии S_3 , так $p_3 = 0$. В состояние S_1 она будет входить в два раза чаще, чем во состоянии S_2 .

Далее разберем типовое задание 3.1, индивидуальный вариант которого необходимо выполнить на практическом занятии.

Задание 3.1. Задана система S с дискретными состояниями S_1, S_2, S_3, S_4 и непрерывным временем. Задан размеченный граф состояний и заданы интенсивности переходов

$$\lambda_{14} = 4, \quad \lambda_{21} = 1, \quad \lambda_{24} = 2, \quad \lambda_{31} = 2, \quad \lambda_{34} = 3, \quad \lambda_{42} = 3, \quad \lambda_{43} = 1. \quad (\text{см. рис. 2})$$

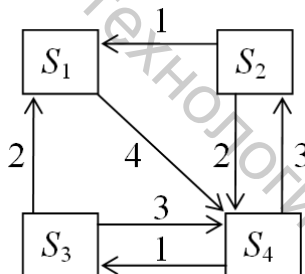


Рисунок 3.2 – Граф состояний системы S к заданию 1

Требуется:

- 1) записать систему уравнений Колмогорова для вероятностей $p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t)$;
- 2) записать систему линейных уравнений относительно неизвестных p_1, p_2, p_3, p_4 – финальных вероятностей;
- 3) записать расширенную матрицу A полученной линейной системы, с помощью команд Maple привести матрицу A к простейшему виду, записать решение системы – финальные вероятности p_1, p_2, p_3, p_4 .
- 4) указать процентное распределение времени нахождения системы S в состояниях S_1, S_2, S_3, S_4 после вхождения ее в стационарный режим.

Решение задания 3.1.

1) запишем систему уравнений Колмогорова, используя правило записи j -го уравнения.

Составим **первое уравнение** ($j = 1$), соответствующее вершине S_1 .

В левой части уравнения записываем производную $p_1'(t)$.

Для стрелок, **входящих в** S_1 со знаком (+), записываем слагаемые

$$S_2 \xrightarrow{\lambda_{21}=1} S_1 \Rightarrow \lambda_{21} \cdot p_2(t) = 1 \cdot p_2(t)$$

$$S_3 \xrightarrow{\lambda_{31}=2} S_1 \Rightarrow \lambda_{31} \cdot p_3(t) = 2 \cdot p_3(t)$$

Для стрелки, **выходящей из** S_1 со знаком (-), записываем слагаемое

$$S_1 \xrightarrow{\lambda_{14}=4} S_4 \Rightarrow (-1) \cdot \lambda_{14} \cdot p_1(t) = -4 \cdot p_1(t)$$

В результате получим первое уравнение системы

$$p_1'(t) = -4 p_1(t) + p_2(t) + 2 p_3(t) \quad (3.5)$$

Составим **второе уравнение** ($j = 2$), соответствующее вершине S_2 .

В левой части уравнения записываем производную $p_2'(t)$.

Для стрелки, **входящей в** S_2 со знаком (+), записываем слагаемое

$$S_4 \xrightarrow{\lambda_{42}=3} S_2 \Rightarrow \lambda_{42} \cdot p_4(t) = 3 \cdot p_4(t)$$

Для стрелок, **выходящих из** S_2 со знаком (-), записываем слагаемые

$$S_2 \xrightarrow{\lambda_{21}=1} S_1 \Rightarrow (-1) \cdot \lambda_{21} \cdot p_2(t) = -1 \cdot p_2(t)$$

$$S_2 \xrightarrow{\lambda_{24}=2} S_4 \Rightarrow (-1) \cdot \lambda_{24} \cdot p_2(t) = -2 \cdot p_2(t)$$

В результате получим второе уравнение системы

$$\begin{aligned} p_2'(t) &= -p_2(t) - 2p_2(t) + 3 p_4(t) \\ \text{или} \quad p_2'(t) &= -3p_2(t) + 3 p_4(t) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Составим **третье уравнение** ($j = 3$), соответствующее вершине S_3 .

В левой части уравнения записываем производную $p_3'(t)$.

Для стрелки, **входящей в** S_3 со знаком (+), записываем слагаемое

$$S_4 \xrightarrow{\lambda_{43}=1} S_3 \Rightarrow \lambda_{43} \cdot p_4(t) = 1 \cdot p_4(t)$$

Для стрелок, **выходящих из** S_3 со знаком (-), записываем слагаемые

$$S_3 \xrightarrow{\lambda_{31}=2} S_1 \Rightarrow (-1) \cdot \lambda_{31} \cdot p_3(t) = -2 \cdot p_3(t)$$

$$S_3 \xrightarrow{\lambda_{34}=3} S_4 \Rightarrow (-1) \cdot \lambda_{34} \cdot p_3(t) = -3 \cdot p_3(t)$$

В результате получим второе уравнение системы

$$\begin{aligned} p_3'(t) &= -2p_3(t) - 3p_3(t) + p_4(t) \\ \text{или} \quad p_3'(t) &= -5p_3(t) + p_4(t) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Составим **четвертое уравнение** ($j = 4$), соответствующее вершине S_4 .

В левой части уравнения записываем производную $p_4'(t)$.

Для стрелки, **входящей в** S_4 со знаком (+), записываем слагаемое

$$S_1 \xrightarrow{\lambda_{14}=4} S_4 \Rightarrow \lambda_{14} \cdot p_1(t) = 4 \cdot p_1(t)$$

$$S_2 \xrightarrow{\lambda_{24}=2} S_4 \Rightarrow \lambda_{24} \cdot p_2(t) = 2 \cdot p_2(t)$$

$$S_3 \xrightarrow{\lambda_{34}=3} S_4 \Rightarrow \lambda_{34} \cdot p_3(t) = 3 \cdot p_3(t)$$

Для стрелок, **выходящих из** S_4 со знаком $(-)$, записываем слагаемые

$$S_4 \xrightarrow{\lambda_{42}=3} S_2 \Rightarrow (-1) \cdot \lambda_{42} \cdot p_4(t) = -3 \cdot p_4(t)$$

$$S_4 \xrightarrow{\lambda_{43}=1} S_3 \Rightarrow (-1) \cdot \lambda_{43} \cdot p_4(t) = -1 \cdot p_4(t)$$

В результате получим четвертое уравнение системы

$$p_4'(t) = 4p_1(t) + 2p_2(t) + 3p_3(t) - 3p_4(t) - p_4(t)$$

или
$$p_4'(t) = 4p_1(t) + 2p_2(t) + 3p_3(t) - 4p_4(t)$$

(3.8)

К построенным четырем уравнениям добавим нормирующее уравнение

$$p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) + p_4(t) = 1$$

(3.9)

Уравнения (3.5) – (3.9) запишем в систему. Получим систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases} p_1'(t) = -4p_1(t) + p_2(t) + 2p_3(t) \\ p_2'(t) = -3p_2(t) + 3p_4(t) \\ p_3'(t) = -5p_3(t) + p_4(t) \\ p_4'(t) = 4p_1(t) + 2p_2(t) + 3p_3(t) - 4p_4(t) \\ 1 = p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) + p_4(t) \end{cases} \quad (3.10)$$

2) запишем систему линейных уравнений относительно неизвестных p_1, p_2, p_3, p_4 – финальных вероятностей.

При $t \rightarrow \infty$ в системе устанавливается стационарный режим (см. упражнение для самостоятельной работы в конце решения этого задания).

Следовательно, равенства (3.1) дают право записать

$$p_1(t) \rightarrow p_1, \quad p_2(t) \rightarrow p_2, \quad p_3(t) \rightarrow p_3, \quad p_4(t) \rightarrow p_4$$

$$p_1'(t) \rightarrow 0, \quad p_2'(t) \rightarrow 0, \quad p_3'(t) \rightarrow 0, \quad p_4'(t) \rightarrow 0.$$

Подставим в систему (3.10) постоянные (пока неизвестные) величины p_k вместо функций $p_k(t)$ и нули вместо производных $p_k'(t)$.

Получим систему линейных уравнений для финальных вероятностей:

$$\begin{cases} 0 = -4p_1 + p_2 + 2p_3 \\ 0 = -3p_2 + 3p_4 \\ 0 = -5p_3 + p_4 \\ 0 = 4p_1 + 2p_2 + 3p_3 - 4p_4 \\ 1 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \end{cases}$$

Приведем ее к стандартному виду

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \\ -4p_1 + p_2 + 2p_3 = 0 \\ -3p_2 + 3p_4 = 0 \\ -5p_3 + p_4 = 0 \\ 4p_1 + 2p_2 + 3p_3 - 4p_4 = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

3) запишем расширенную матрицу A полученной линейной системы, с помощью команд Maple приведем ее к простейшему виду и решим систему.

По системе (3.11) составляем матрицу

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & -4 & 0 \end{array} \right)$$

В пакете Maple записываем команды

```
> restart: with(linalg):
> A:=matrix(5,5,[[ 1, 1, 1, 1,1],
                  [-4, 1, 2, 0,0],
                  [ 0,-3, 0, 3,0],
                  [ 0, 0,-5, 1,0],
                  [ 4, 2, 3,-4,0]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> rangA:=rank(A);
```

$\text{rangA} := 4$

Если получим ранг матрицы не равным 4, то это значит, что система составлена неверно или матрица записана с ошибкой.

Далее приводим матрицу A к виду Жордана.

> Q:=rref(A);

$$Q := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{51} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{20}{51} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{4}{51} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{20}{51} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Полученной матрице Q соответствует система

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = \frac{7}{51} \\ p_2 = \frac{20}{51} \\ p_3 = \frac{4}{51} \\ p_4 = \frac{20}{51} \end{array} \right., \quad (3.12)$$

которая равносильна системе (3.11).

Решение $(p_1, p_2, p_3, p_4) = \left(\frac{7}{51}, \frac{20}{51}, \frac{4}{51}, \frac{20}{51} \right)$ можно выделить и записать в

десятичном виде с помощью команд:

> P:=col(Q, 5);

$$P := \left[\frac{7}{51}, \frac{20}{51}, \frac{4}{51}, \frac{20}{51}, 0 \right]$$

$\text{> for i from 1 to rangA do print(p[i]=P[i]*1.0) od;}$

$$p_1 = 0.1372549020$$

$$p_2 = 0.3921568627$$

$$p_3 = 0.07843137255$$

$$p_4 = 0.3921568627$$

Числа p_1, p_2, p_3, p_4 равны вероятностям того, что система S после вхождения ее в стационарный режим находится в состояниях соответственно S_1, S_2, S_3, S_4 .

4) укажем процентное распределение времени нахождения системы S в состояниях S_1, S_2, S_3, S_4 после вхождения ее в стационарный режим.

Полученные в решения предыдущего пункта вероятности

$p_1 = 0.1372549020$, $p_2 = 0.3921568627$, $p_3 = 0.07843137255$, $p_4 = 0.3921568627$ округлим до сотых

$$p_1 \approx 0.14, \quad p_2 \approx 0.39, \quad p_3 \approx 0.08, \quad p_4 \approx 0.39.$$

Запишем процентное распределение времени нахождения системы S в состояниях S_1, S_2, S_3, S_4 . После вхождения в стационарный режим система S будет находиться в состояниях S_1, S_2, S_3, S_4 в среднем соответственно

$$14 \%, \quad 39 \%, \quad 8 \%, \quad 39 \%$$

времени. **Задание 3.1 выполнено.**

Упражнение для самостоятельной работы.

Проверить, что системы S , граф состояний которой изображен на рисунке 3.2, удовлетворяет теореме 2, то есть при $t \rightarrow \infty$ в ней устанавливается стационарный режим.

3.2 Процессы рождения и гибели

В теории массового обслуживания широко распространен специальный класс случайных процессов – процессы рождения и гибели. Название это связано с рядом биологических задач, где этот процесс служит математической моделью изменения численности биологических популяций. Граф состояний системы, в которой происходит такой процесс, изображен на рис. 3.3.,

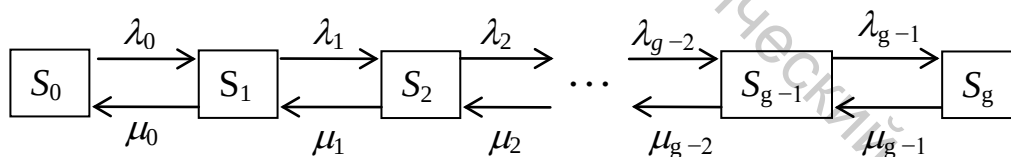


Рисунок 3.3 – Граф состояния системы рождения и гибели

где $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{g-1}$ – интенсивности переходов системы из состояния в состояние в направлении рождения (возникновения заявок),

$\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{g-1}$ – интенсивности переходов системы в направлении гибели (выполнения заявок).

Очевидно, что все состояния являются сообщающимися и существенными, следовательно, система удовлетворяет теореме 2 и имеет предельное (финальное) распределение вероятностей состояний $p_0, p_1, \dots, p_g$.

По графу состояний системы S (рис.3.3) легко выписывается система уравнений Колмогорова, а из нее для финальных вероятностей составляется система

$$\begin{cases} \lambda_0 p_0 = \mu_0 p_1 \\ \lambda_1 p_1 = \mu_1 p_2 \\ \dots\dots\dots \\ \lambda_{g-1} p_{g-1} = \mu_{g-1} p_g \\ p_0 + p_1 + \dots + p_g = 1 \end{cases} \quad (3.13)$$

Систему (3.13) легко решить, записывая через переменную p_0 все остальные переменные, начиная с первого уравнения. После подстановки всех равенств в последнее нормирующее уравнение системы найдем значение переменной p_0 . В результате получим решение системы (3.13):

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda_0}{\mu_0} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_0 \mu_1} + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2}{\mu_0 \mu_1 \mu_2} + \dots + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{g-1}}{\mu_0 \mu_1 \dots \mu_{g-1}} \right)^{-1} \quad (3.14)$$

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_0} p_0; \quad p_2 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_0 \mu_1} p_0; \quad p_3 = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2}{\mu_0 \mu_1 \mu_2} p_0; \quad \dots; \quad p_g = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{g-1}}{\mu_0 \mu_1 \dots \mu_{g-1}} p_0 \quad (3.15)$$

Формулы (3.13), (3.14) будут использованы далее для исследования конкретных систем.

Пример 3.1. Один мастер обслуживает два станка. Пусть λ – среднее число остановок станка в единицу времени, μ – среднее число станков, обслуживаемых мастером в единицу времени. Требуется:

- 1) определить состояния S_k заданной системы обслуживания станков;
- 2) построить размеченный граф состояний системы обслуживания;
- 3) найти финальные вероятности.

Решение.

Введем обозначения всех возможных состояний системы обслуживания S :

S_0 – в системе обслуживания нет заявок: оба станка работают, нет станков, требующих обслуживания, мастер свободен;

S_1 – в системе обслуживания одна заявка: один станок работает и один на обслуживании, мастер занят;

S_2 – в системе обслуживания две заявки: оба станка не работают, один на обслуживании мастером, а второй в очереди, мастер занят.

Пусть система находится в состоянии S_0 . Тогда каждый из двух работающих станков может потребовать обслуживание в среднем λ раз в единицу времени, следовательно, два станка могут потребовать обслуживание 2λ раз. Таким образом, в системе может появиться одна заявка на обслуживание с интенсивностью $\lambda_0 = 2\lambda$. То есть переход из состояния S_0 в состояние S_1 происходит с интенсивностью $\lambda_0 = 2\lambda$: $S_0 \xrightarrow{2\lambda} S_1$.

Аналогично рассуждая получим, что переход из состояния S_1 в состояние S_2 происходит с интенсивностью $\lambda_1 = \lambda$: $S_1 \xrightarrow{\lambda} S_2$.

Так как мастер обслуживает в среднем μ станков в единицу времени, то уменьшение количества обслуживаемых станков на единицу (уменьшение на одну заявку в СМО) происходит с интенсивностью μ . Отсюда получаем два обратных перехода по стрелкам: $S_0 \xleftarrow{\mu} S_1$, $S_1 \xleftarrow{\mu} S_2$.

В результате можем построить граф состояний системы обслуживания (см. рис. 3.4).

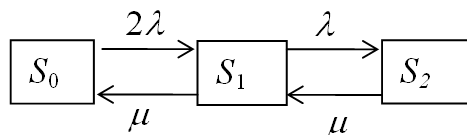


Рисунок 3.4 – Граф состояний СМО к примеру 3.1

Построена СМО типа рождения и гибели (см. см. рис. 3.3).

Запишем интенсивности в общих обозначениях: $\lambda_0 = 2\lambda$, $\lambda_1 = \lambda$, $\mu_0 = \mu$, $\mu_1 = \mu$.

Тогда система (3.13) примет вид

$$\begin{cases} \lambda_0 p_0 = \mu_0 p_1 \\ \lambda_1 p_1 = \mu_1 p_2 \\ p_0 + p_1 + p_2 = 1 \end{cases} \quad (3.16)$$

решение которой получим из формул (3.14), (3.15):

$$p_0 = \left(1 + \frac{2\lambda}{\mu} + \frac{2\lambda^2}{\mu^2} \right)^{-1} = \frac{1}{1 + 2 \cdot \frac{\lambda}{\mu} + 2 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^2}, \quad (3.17)$$

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_0} p_0 = 2 \cdot \frac{\lambda}{\mu} \cdot p_0; \quad p_1 = 2 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^2 \cdot p_0 \quad (3.18)$$

3.3 Основные понятия и классификация систем массового обслуживания. Простейший поток заявок

Во многих областях производства и экономики важную роль играют системы специального вида, в которых имеется поток требований (заявок), подлежащих обслуживанию, но ограниченность обслуживающих средств приводит к образованию очереди. Та часть системы, в которой возникают заявки, называется **обслуживаемой системой**, а та, которая принимает заявки и удовлетворяет их, – **обслуживающей**. Совокупность обслуживаемой и обслуживающей систем составляют систему массового обслуживания.

Таким образом, **системы массового обслуживания (СМО)** – это такие процессы, в которых имеется поток заявок (требований), подлежащих обслуживанию, и происходит постоянное обслуживание этих заявок.

Теория массового обслуживания (ТМО) – это прикладная математическая дисциплина, которая изучает системы массового обслуживания.

Целью теории массового обслуживания является выработка рекомендаций по рациональному построению работы СМО для обеспечения высокой эффективности ее работы.

Основоположителем ТМО считается датский ученый А.К. Эрланг, который в 1909 году опубликовал работу “Теория вероятностей и телефонные переговоры”.

Примерами СМО могут служить: системы связи (в частности, телефонные станции), погрузочно-разгрузочные комплексы (порты, товарные станции), совокупность станков-автоматов (наладка и регулирование, загрузка заготовками и т.д.), автозаправочные станции, магазины, билетные кассы, ремонтные мастерские, больницы и т.д.

Рассмотрим основные элементы СМО (см. рис 3.5):

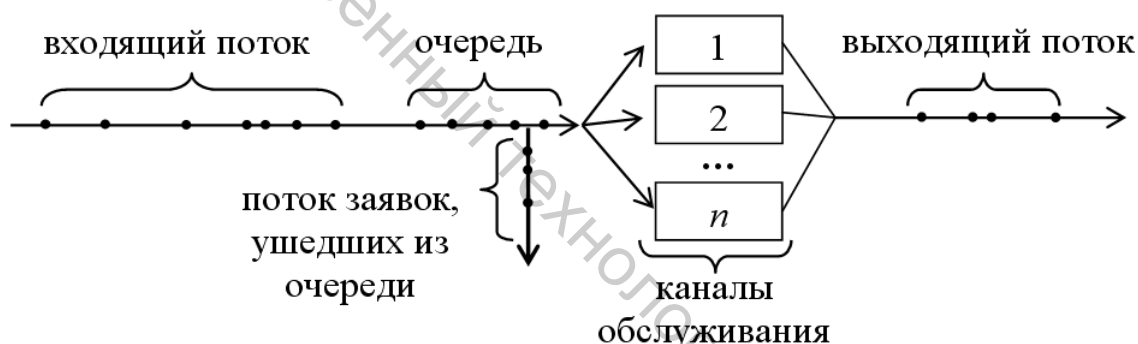


Рисунок 3.5 – Основные элементы системы массового обслуживания

- 1) входящий поток заявок;
- 2) очередь;
- 3) поток необслуженных заявок, ушедших из очереди;
- 4) каналы обслуживания;
- 5) выходящий поток обслуженных заявок.

Входящий поток будем рассматривать как последовательность событий. Одно событие – это поступление заявки.

Поток заявок называется **простейшим**, если он удовлетворяет условиям:

- 1) отсутствие последствия, то есть заявки поступают независимо друг от друга (поступление очередной заявки не зависит от того, сколько и когда заявок поступило прежде);

2) стационарность, то есть вероятность появления ровно k заявок на отрезке времени $[t_0, t_0 + \Delta t]$ зависит лишь от длины отрезка Δt и не зависит от начального момента t_0 ;

3) ординарность, то есть в любой момент времени в СМО поступает лишь одна заявка, а поступление двух и более заявок одновременно практически невозможно.

Название "простейший" объясняется тем, что СМО с простейшими потоками имеет наиболее простое математическое описание. С другой стороны, очень часто потоки заявок в реальных СМО близки к простейшим.

Пусть $p_k(t)$ – вероятность поступления в СМО ровно k заявок за время t . Для простейшего потока эта вероятность равна $p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$, то есть подчиняется закону Пуассона. По этой причине простейший поток называют также пуассоновским потоком.

Пусть T – случайный интервал времени между двумя последовательными заявками в простейшем потоке. Функция распределения величины T равна $F(t) = P(T < t)$.

С другой стороны, $P(T < t) + P(T \geq t) = 1$. Следовательно, $F(t) = 1 - P(T \geq t) = 1 - p_0 = 1 - e^{-\lambda t}$. Таким образом, $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ и время T между соседними заявками в простейшем потоке распределено по показательному закону с параметром λ .

Параметр λ называется интенсивностью потока заявок. Число λ равно среднему числу поступающих заявок за единицу времени.

Канал обслуживания – устройство в СМО, обслуживающее заявку.

Выходящий поток – это последовательность обслуженных заявок, покидающих систему обслуживания. Время обслуживания заявки $T_{\text{обсл}}$ чаще всего также подчиняется показательному закону с параметром μ , который называется интенсивностью обслуживания заявок. Число μ равно среднему числу обслуженных заявок за единицу времени.

Для оценки эффективности функционирования СМО разработана система показателей (параметров, характеристик), которые для заданной реальной СМО требуется вычислить. По вычисленным значениям формулируются выводы о качестве работы системы и возможностях увеличения эффективности её работы.

Приведем основные характеристики эффективности функционирования СМО.

λ – интенсивность входного потока (для стационарного потока – это среднее число заявок, поступающих в СМО за единицу времени);

n – число каналов обслуживания заявок;

μ – интенсивность выходного потока (для стационарного потока – это среднее

число заявок, обслуживаемых за единицу времени одним каналом);

$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ – коэффициент загрузки СМО (среднее число заявок, приходящих в

СМО за время обслуживания одной заявки);

$\bar{t}_{OBSL} = \frac{1}{\mu}$ – среднее время обслуживания одной заявки в системе обслуживания;

m – число мест в очереди (если рассматривается СМО с очередью);

p_{otk} – вероятность того, что новая заявка получит отказ (при ограничениях на длину очереди эта вероятность может быть меньше 1);

$Q = 1 - p_{otk}$ – относительная пропускная способность (вероятность того, что новая заявка будет обслужена);

$A = \lambda Q = \lambda(1 - p_{otk})$ – абсолютная пропускная способность (среднее число заявок, обслуживаемых в СМО за единицу времени);

L_{OCHER} – среднее число заявок, находящихся в очереди;

L_{OBSL} – среднее число заявок, обслуживаемых в СМО в единицу времени;

$L_{CMO} = L_{OCHER} + L_{OBSL}$ – среднее число заявок, находящихся в СМО;

$\bar{n}_{z_kan}$ – среднее число занятых каналов;

$\bar{t}_{OCHER} = \frac{L_{OCHER}}{\lambda}$ – среднее время ожидания в очереди (для открытой СМО);

$\nu = \frac{1}{\bar{t}_{OCHER}}$ – интенсивность потока ухода из очереди;

$\bar{t}_{CMO} = \frac{L_{CMO}}{\lambda} = \frac{L_{OCHER}}{\lambda} + \frac{Q}{\mu}$ – среднее время пребывания заявки в СМО.

Имеются различные виды СМО. Приведем некоторые из них.

СМО многоканальная: одновременно может обслуживаться несколько заявок; например, обслуживание в парикмахерской несколькими мастерами.

СМО одноканальная: имеется только один канал обслуживания.

СМО с отказами: заявка получает отказ, если заняты все каналы обслуживания; например, автоматическая телефонная станция.

СМО с очередью: когда все каналы заняты, то поступившая заявка, становится в очередь. СМО с очередью различаются по принципу построения очереди (случайный выбор заявки из очереди или выбор по приоритету, или выбор в зависимости от порядка её поступления), по времени ожидания (с неограниченным ожиданием или с ограниченным ожиданием), по длине очереди (с конечной очередью или с бесконечной очередью)

СМО замкнутые: число источников заявок ограничено; например, ремонт и обслуживание станков.

СМО открытые: число источников заявок не ограничено.

3.4 Многоканальная СМО с отказами

Рассмотрим СМО с n каналами обслуживания без очереди. Если в ней все каналы заняты, то приходящая новая заявка получит отказ в обслуживании. Примером такой СМО может служить АТС.

Пусть λ – интенсивность входного потока. Будем считать, что поток заявок стационарный. Тогда λ – это среднее число заявок, поступающих в СМО за единицу времени; n – число каналов обслуживания; μ – интенсивность выходного потока с одного канала. Будем считать, что выходной поток стационарный. Тогда μ – это среднее число заявок, обслуживаемых за единицу времени одним каналом.

Обозначим S_k – состояние системы обслуживания, при котором обслуживанием заявок заняты k каналов.

Переход $S_k \rightarrow S_{k+1}$ происходит, когда в СМО приходит (рождается) новая заявка под воздействием потока заявок интенсивностью λ . То есть в направлении рождения заявок получаем все стрелки вида $S_k \xrightarrow{\lambda} S_{k+1}$.

Переход $S_k \rightarrow S_{k-1}$ происходит, когда какой-нибудь канал освободится. В состоянии S_k могут освободиться k каналов. Следовательно, интенсивность обратного перехода равна $k\mu$ – среднее число заявок, обслуживаемых за единицу времени k каналами. То есть в направлении гибели заявок получаем стрелки вида $S_{k-1} \xleftarrow{k\mu} S_k$.

В результате можем построить граф состояний системы обслуживания (см. рис. 3.6)

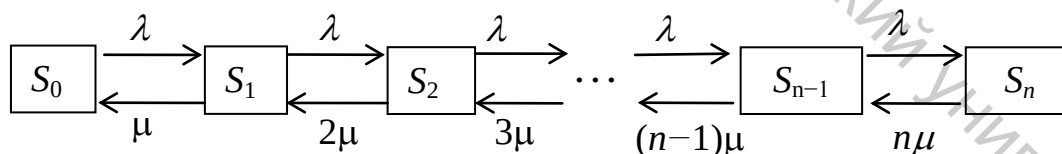


Рисунок 3.6 Граф состояний многоканальной СМО с отказами

Из рисунка 3.6 видим, что многоканальная СМО – это частный случай системы рождения и гибели (см. п.3.2, рис 3.3). В частности,

$$\lambda_0 = \lambda, \quad \lambda_1 = \lambda, \quad \lambda_2 = \lambda, \quad \dots, \quad \lambda_{g-2} = \lambda, \quad \lambda_{g-1} = \lambda$$

$$\mu_0 = \mu, \quad \mu_1 = 2\mu, \quad \mu_2 = 3\mu, \quad \dots, \quad \mu_{g-2} = (n-1)\mu, \quad \mu_{g-1} = n\mu$$

Решая систему (3.13) получим:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda_0}{\mu_0} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_0 \mu_1} + \dots + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{g-1}}{\mu_0 \mu_1 \dots \mu_{g-1}} \right)^{-1} = \left(1 + \frac{\lambda}{1 \cdot \mu} + \frac{\lambda^2}{1 \cdot 2 \cdot \mu^2} + \dots + \frac{\lambda^n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \cdot \mu^n} \right)^{-1}$$

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_0} p_0 = \frac{\lambda}{1 \cdot \mu}; \quad p_2 = \frac{\lambda^2}{1 \cdot 2 \cdot \mu^2} p_0; \quad \dots; \quad p_n = \frac{\lambda^n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \cdot \mu^n} p_0$$

Обозначим $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ – среднее число заявок, приходящих за время обслуживания одной заявки (коэффициент загрузки СМО). Тогда

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho^1}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} \right)^{-1}, \quad p_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot p_0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (3.19)$$

где p_k – вероятность того, что система находится в состоянии S_k , то есть k каналов заняты. В частности, p_n – вероятность того, что система находится в состоянии S_n , то есть все каналы заняты. Следовательно,

$$p_{отк} = p_n = \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0; \quad (3.20)$$

– вероятность того, что заявка получит отказ.

$$Q = p_{обсл} = 1 - p_{отк} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0; \quad (3.21)$$

– вероятность того, что поступившая заявка будет обслужена (относительная пропускная способность)

$$A = \lambda Q = \lambda \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0 \right); \quad (3.22)$$

– среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени (абсолютная пропускная способность системы).

$$\bar{n}_{z_kan} = \frac{A}{\mu} = \rho \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0 \right); \quad (3.23)$$

– среднее число занятых каналов (каждый канал обслуживает в среднем μ заявок в единицу времени).

Далее разберем типовые задания 3.2, 3.3, 3.4.

Задание 3.2. На вход многоканальной СМО с отказами поступает простейший поток заявок интенсивностью $\lambda = 11$ заявок в час. Среднее время обслуживания одной заявки равно $\bar{t}_{обсл} = 0,15$ часа. Каждая заявка приносит доход $S_1 = 130$ денежных единиц в час, а содержание одного канала обслуживания заявок обходится в $S_2 = 122$ денежных единиц в час.

Найти оптимальное число каналов обслуживания для получения максимального дохода и величину максимального дохода.

Решение. Обозначим n – число каналов обслуживания.

Если число каналов слишком мало, то необслуженные заявки будут уходить (СМО – система с отказами и не принятые заявки сразу уходят). Такая СМО дает убытки.

Если число каналов слишком велико, то убытки появятся из-за простаивающих без работы каналов, на содержание которых требуются деньги.

Будем искать оптимальное (приносящего наибольшую прибыль) число каналов n .

1. Найдем доход от обслуживания заявок, приходящих за час. За час в среднем обслуживается A заявок, $A = \lambda Q = \lambda \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0 \right)$ по (3.22). Каждая заявка приносит доход $S_1 = 130$ денежных единиц в час. Следовательно, A заявок за час приносят доход $D_1(n) = A \cdot S_1$.

2. Найдем выплаты на содержание одного каналов обслуживания. Работа одного канала обслуживания стоит $S_2 = 122$ денежных единиц в час. Расход на n каналов равен $D_2(n) = n \cdot S_2$.

3. Найдем доход системы за час: $D(n) = D_1(n) - D_2(n) = S_1 \cdot A - S_2 \cdot n$. То есть $D(n) = S_1 \cdot \lambda \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0 \right) - S_2 \cdot n$, где $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ – среднее число заявок, приходящих за время обслуживания одной заявки (коэффициент загрузки СМО). По условию задачи $\lambda = 11$, $\mu = \frac{1}{t_{OBSL}} = \frac{1}{0,15}$. Из формул (3.19) возьмем

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho^1}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} \right)^{-1} = \frac{1}{1 + \frac{\rho^1}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!}}.$$

4. Найдем оптимальное (приносящего наибольшую прибыль) число каналов n . Используем пакет Maple. Значение n вначале задаем $n = 1$. Приготовим и запустим программу:

```
> restart;  
> lambda:=11; t_obs:=0.15; S1:=130; S2:=122;  
      lambda := 11  
      t_obs := 0.15  
      S1 := 130  
      S2 := 122
```

```

> n:=1; mu:=1/t_obs1; rho:=lambda/mu;
                                n := 1
                                μ := 6.666666667
                                ρ := 1.650000000
> p0:=1/sum(rho^k/k!, k=0..n);
                                p0 := 0.3773584906
> pn:=(rho^n/n!)*p0;
                                pn := 0.6226415095
> A:=lambda*(1-pn);
                                A := 4.150943396
> D(n):=S1*A-S2*n;
                                D(1) := 417.6226415

```

При $n = 1$ получили доход системы за час $D(n) = 417.62$ денежных единиц. Далее число каналов n будем увеличивать $n = 2, 3, 4, \dots$, подставляя значение n в программу, снова ее запускать в работу и записывать полученные доходы системы за час её работы. Получим следующие результаты (округленные до единицы):

$$D(1) = 418, \quad D(2) = 701, \quad D(3) = 839, \quad D(4) = 855, \quad D(5) = 792, \quad D(6) = 690.$$

Сравнивая доходы, поступающие при различных значениях $n = 1, 2, \dots$, видим, что при увеличении числа каналов от одного до четырех доход растет и при $n = 4$ становится наибольшим. При $n > 4$ доход будет уменьшаться, так как “лишние” каналы простаивают и приносят убытки.

Ответ. Оптимальное число каналов $n = 4$ с доходом **855** ден. ед. в час.

Задание 3.3. В фирму поступает простейший поток заявок на телефонные переговоры с интенсивностью $\lambda = 90$ вызовов в час, а средняя продолжительность разговора по телефону $\bar{t}_{OBSL} = 2$ минуты. Определить оптимальное число телефонов в фирме, при котором из каждых 100 заявок на переговоры будут удовлетворены в среднем не менее $a = 90$ заявок.

Решение. $\lambda = 90$ – интенсивность входного потока.

n – число каналов обслуживания заявок – число телефонов в фирме.

$\bar{t}_{OBSL} = 2$ мин = $\frac{2}{60}$ часа – среднее время обслуживания заявки одним каналом.

$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{OBSL}} = \frac{60}{2} = 30$ – интенсивность выходного потока – среднее число заявок,

обслуживаемых за единицу времени одним каналом (телефоном).

По условию из каждых 100 заявок должны быть удовлетворены в среднем не менее $k = 90$ заявок, то есть вероятность того, что поступившая

заявка будет обслужена, должны быть не менее $\frac{90}{100} = 0,9$. С другой стороны, по

формуле (3.21) эта вероятность равна $Q = p_{\text{obsl}} = 1 - p_{\text{otk}} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0$.

Следовательно, должно выполняться неравенство $Q \geq 0,9$.

Если взять слишком большое число каналов (телефонов), то из 100 заявок все 100 могут быть удовлетворены, но из-за простаивающих без работы каналов, появятся убытки.

Нужно найти оптимальное (минимальное) число n каналов (телефонов), при котором производительность “90 заявок из 100” будет достигнута.

Величину $Q = 1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0$ запишем в Maple. Затем перебором найдем

минимальное значение n , для которого $Q \geq 0,9$. Входные данные берем из условия задачи и из формул (3.19):

$$\lambda = 90, \quad \mu = \frac{1}{t_{\text{OBSL}}} = \frac{60}{2} = 30 \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}, \quad p_0 = \frac{1}{1 + \frac{\rho^1}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!}}.$$

Выполним вычисления в Maple.

Искомое оптимальное число каналов обслуживания вначале зададим $n = 1$.

Набираем и выполняем программу:

```
> restart;
> lambda:=90; t_obsl_min:=2; a:=90;
  t_obsl_chas:=t_obsl_min/60;
                                λ := 90
                                t_obsl_min := 2
                                a := 90
                                t_obsl_chas := 1/30
> n:=1; mu:=1/t_obsl_chas; rho:=lambda/mu;
                                n := 1
                                μ := 30
                                ρ := 3
> Digits:=4: p0:=1./sum(rho^k/k!,k=0..n);
  pn:=(rho^n/n!)*p0;
                                p0 := 0.2500
                                pn := 0.7500
```

```
> вероятность_обсл_заявки_Q(n) := (1 - p^n) * 1.0;
    veroyatn_obs_l_zayavky_Q ( 1 ) := 0.2500

> требуемая_вероятность := a / 100.0;
    trebuemya_veroyatn := 0.9000
```

При $n = 1$ получили вероятность обслуживания поступившей заявки $Q(1) = 0,25$ – меньше, чем требуемая вероятность **0,9**.

Далее число каналов n будем увеличивать, $n = 2, 3, 4, \dots$, подставляя значение n в программу, снова ее запускать в работу и записывать полученные вероятности $Q(n)$.

Получим следующие результаты:

$Q(1) = 0,25$, $Q(2) = 0,47$, $Q(3) = 0,65$, $Q(4) = 0,79$,
 $Q(5) = 0,89$, $Q(6) = \mathbf{0,95}$, $Q(7) = 0,98$.

Сравнивая значения $Q(n)$ при различных значениях $n = 1, 2, \dots$, видим, что при увеличении числа каналов число Q растет и при $n = 6$ достигает значения $Q(6) = 0,95 \geq \mathbf{0,9}$. Следовательно, фирме нужно установить **6** телефонных номеров для выполнения поставленного условия.

Ответ. Оптимальное число телефонов $n = 6$.

Задание 3.4. На вход многоканальной СМО с отказами поступает простейший поток заявок с интенсивностью $\lambda = 12$ заявок в час. Среднее время обслуживания заявки равно $\bar{t}_{OBSL} = 12$ минут. Время обслуживания распределено по показательному закону. Определить:

- оптимальное число n каналов, при котором вероятность того, что заявка получит отказ, не больше $\alpha = 0,07$;
- среднее число заявок, обслуживаемых за единицу времени в такой СМО;
- среднее число каналов, занятых обслуживанием.

Решение.

$\lambda = 12$ – интенсивность входного потока.

n – число каналов обслуживания заявок.

$\bar{t}_{OBSL} = 12 \text{ мин} = \frac{12}{60} \text{ часа}$ – среднее время обслуживания заявки одним каналом.

$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{OBSL}} = \frac{60}{12} = 5$ – интенсивность выходного потока – среднее число заявок, обслуживаемых за единицу времени одним каналом.

a) заявка получит отказ, когда все каналы будут заняты. Вероятность того, что все каналы будут заняты равна $p_n = \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0$ (см. (3.19)).

Следовательно, по формуле (3.20) вероятность того, что заявка получит отказ, равна $p_{\text{отк}} = p_n = \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0$, где $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho^1}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} \right)^{-1} = \frac{1}{1 + \frac{\rho^1}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!}}.$$

Нужно найти оптимальное

(минимальное) число n каналов, при котором $p_{\text{отк}} \leq \alpha = 0,07$.

Для $n = 1$ записываем и запускаем программу на Maple:

```
> restart;
> lambda:=12; t_obs1_min:=12; alpha:=0.07; n:=1;
      lambda := 12
      t_obs1_min := 12
      alpha := 0.07
      n := 1

> t_obs1_chas:=t_obs1_min/60.; mu:=1/t_obs1_chas;
rho:=lambda/mu;
      t_obs1_chas := 0.2000000000
      mu := 5.000000000
      rho := 2.400000000

> p0:=1./sum(rho^k/k!,k=0..n); pn:=(rho^n/n!)*p0;
      p0 := 0.2941176471
      pn := 0.7058823530

> p_отказа(n):=pn*1.0; alpha:=alpha;
      p_otkaza(1) := 0.7058823530
      alpha := 0.07
```

При $n = 1$ получили вероятность $p_{\text{отк}}(1) = 0.71$ большую, чем $\alpha = 0,07$.

Далее число каналов n будем увеличивать $n = 2, 3, 4, \dots$, подставляя значение n в программу, снова ее запускать в работу и записывать полученные вероятности $p_{\text{отк}}(n)$. Получим следующие результаты:

$$p_{\text{отк}}(1) = 0.71, \quad p_{\text{отк}}(2) = 0.43, \quad p_{\text{отк}}(3) = 0.27, \quad p_{\text{отк}}(4) = 0.14, \quad p_{\text{отк}}(5) = 0.062.$$

При увеличении числа каналов n вероятность $p_{\text{отк}}(n)$ уменьшается. При $n = 4$ получим $p_{\text{отк}}(4) = 0.14 > \alpha = 0,07$, при $n = 5$ получим $p_{\text{отк}}(5) = 0.062 < 0,07$. Таким образом, оптимальное (минимальное) число n каналов, при котором $p_{\text{отк}} \leq \alpha = 0,07$, равно $n = 5$.

б) среднее число заявок, обслуживаемых за единицу времени, то есть абсолютную пропускную способность вычисляем по формуле (3.22) при оптимальном значении $n = 5$, найденном в пункте а):

$$A = \lambda Q = \lambda \left(1 - \frac{\rho^5}{5!} \cdot p_0 \right), \text{ где } \rho = \frac{\lambda}{\mu}, \quad p_0 = \frac{1}{1 + \frac{\rho^1}{1!} + \dots + \frac{\rho^5}{5!}}.$$

В программу из предыдущего пункта а) задаем $n = 5$, а к концу программы значению допишем и вычислим строку

```
> A := lambda * (1 - pn);  
A := 11.25092569
```

в) среднее число каналов, занятых обслуживанием, найдем по формуле (3.23): $\bar{n}_{z_kan} = \frac{A}{\mu}$. В программу из предыдущего пункта а) задаем $n = 5$, а к концу программы значению допишем и вычислим строку

```
> n_zan := A / mu;  
n_zan := 2.250185138
```

Ответ. Оптимальное число обслуживающих каналов $n = 5$.

В системе с числом обслуживающих каналов $n = 5$ среднее число заявок, обслуживаемых за час, равно **11**. Заняты обслуживанием в среднем **2** канала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гнеденко, Б. В. Курс теории вероятностей / Б. В. Гнеденко. – Москва : Наука, 1988. – 448 с.
2. Гнеденко, Б. В. Введение в теорию массового обслуживания / Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко. – Москва : КомКнига, 2005. – 301 с.
3. Гурский, Е. И. Руководство к решению задач по высшей математике : учебное пособие. В 2 ч. Ч. 2 / Е. И. Гурский [и др.]. – Минск : Выш. школа, 1990. – 400 с.
4. Дьяконов, В. Maple 6. Учебный курс / В. Дьяконов. – СПб : Питер, 2001. – 603 с.
5. Дьяконов, В. П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании / В. П. Дьяконов. – Москва : СОЛОН-Пресс, 2006. – 720 с.
6. Ершова, В. В. Импульсные функции. Функции комплексной переменной. Операционное исчисление / В. В. Ершова. – Минск : Выш. школа, 1976. – 256 с.
7. Сдвижков, О. А. Математика на компьютере: Maple 8 / О. А. Сдвижков. – Москва : СОЛОН-Пресс, 2003. – 176 с.
8. Чернов, В. П. Теория массового обслуживания / В. П. Чернов, В. Б. Ивановский. – Москва : Инфра-М, 2000. – 158 с.

Учебное издание

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Курс лекций

Составители:

Статковский Николай Степанович
Завацкий Юрий Александрович
Рубаник Оксана Евгеньевна
Джежора Александр Александрович

Редактор *В. Е. Казаков*

Технический редактор *Ю. А. Завацкий*

Корректор *И. В. Михайленя*

Компьютерная верстка *Ю. А. Завацкий*

Подписано к печати _____. Формат _____. Бумага офсетная № 1.
Гарнитура «Таймс». Усл.печ.листов _____. Уч.-изд. листов _____.
Тираж _____ экз. Заказ № _____.

Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет» 210035, г.Витебск, Московский пр., 72

Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский
государственный технологический университет»

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/172 от 12 февраля 2014 г.