МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Учреждение образования
«Витебский государственный технологический университет»

Высшая математика (Математика). Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия

Практикум для студентов первого курса специальностей
6-05-0723-02 «Технологии и проектирование одежды и обуви»,
6-05-0723-01 «Технологии и проектирование текстильных изделий»,
6-05-0716-01 «Метрология, стандартизация и контроль качества»

Витебск
2023

УДК 512.64

Составители :

Т. В. Никонова, О. Е. Рубаник

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским
советом УО «ВГТУ», протокол № 10 от 29.06.2023.

Высшая математика (Математика). Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия : практикум / сост. Т. В. Никонова, О. Е. Рубаник. – Витебск : УО «ВГТУ», 2023. – 55 с.

Издание содержит методические материалы по темам «Линейная алгебра», «Векторная алгебра» и «Аналитическая геометрия» дисциплин «Высшая математика» и «Математика» и предназначено для студентов первого курса специальностей 6-05-0723-02 «Технологии и проектирование одежды и обуви», 6-05-0723-01 «Технологии и проектирование текстильных изделий», 6-05-0716-01 «Метрология, стандартизация и контроль качества». В каждом разделе практикума приведены краткие теоретические сведения, подробно разобраны практические примеры, приведены задания для решения на практических занятиях и задачи для самостоятельного решения. Практикум предназначен для эффективной подготовки студентов к практическим занятиям, к промежуточному контролю знаний и экзамену.

УДК 512.64

СОДЕРЖАНИЕ

1 МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1.1 Матрицы и их виды. Действия над матрицами

Матрицей размера $m \times n$ называется совокупность $m \cdot n$ объектов, расположенных в виде таблицы из m строк и n столбцов:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или сокращенно $A = (a_{ij})$, где $i = \overline{1,m}$ – номер строки; $j = \overline{1,n}$ – номер столбца. Объекты a_{ij}, составляющие матрицу, называют ее ***элементами***. Элементами матрицы могут быть числа, функции, векторы, матрицы и т. д. Элементы $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots$, стоящие на диагонали, идущей из левого верхнего угла, образуют ***главную диагональ***.

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется ***квадратной***.

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется ***диагональной***.

Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется ***единичной*** и обозначается E.

Квадратная матрица, у которой все элементы выше или ниже главной диагонали равны нулю, называется ***треугольной***.

Прямоугольная матрица $(m \neq n)$, у которой все элементы ниже главной диагонали равны нулю, называется ***трапециевидной***.

На множестве матриц вводятся следующие операции: транспонирование матрицы, сложение матриц, умножение матрицы на число, произведение матриц, элементарные преобразования матриц.

1. Сложение и вычитание матриц. Данная операция вводится только для матриц одинакового размера. Суммой (разностью) двух матриц $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{m\times n} = (b_{ij})$ называется такая матрица $C_{m\times n} = (c_{ij})$, что $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$ $(i = \overline{1,m},\ \ j = \overline{1,n})$. Записывают $C = A \pm B$.

2. Умножение матрицы на число. Произведением матрицы $A_{m\times n} = (a_{ij})$ на число k называется матрица $B_{m\times n} = (b_{ij})$, такая, что $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$ $(i = \overline{1,m},\ \ j = \overline{1,n})$. Записывают $B = k \cdot A$.

3. Произведение матриц. Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы (такие матрицы называют ***согласованными***).

Произведением матрицы $A_{m\times n}=(a_{ij})$ на матрицу $B_{n\times p}=(b_{jk})$ называется матрица $C_{m\times p}=(c_{ik})$ такая, что $c_{ik}=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot b_{jk}$, $(i=\overline{1,m},\quad k=\overline{1,p})$, то есть элемент i-ой строки и k-го столбца матрицы произведения C равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы k-го столбца матрицы B.

Целой натуральной степенью A^s $(s>1)$ квадратной матрицы называется произведение s матриц, каждая из которых равна A: $A^s=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{s}$.

Справедливы следующие свойства умножения матриц (при условии, что они имеют смысл):

1) в общем случае $A\cdot B\neq B\cdot A$ (умножение некоммутативно), если же выполняется равенство $A\cdot B=B\cdot A$, то такие матрицы называют ***перестановочными***;

2) $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$ (умножение ассоциативно);

3) $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$, $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$ (умножение матриц дистрибутивно относительно сложения);

4) $\alpha\cdot(A\cdot B)=(\alpha\cdot A)\cdot B$;

5) если матрицы A и E согласованы, то $A\cdot E=E\cdot A=A$.

4. Транспонирование матрицы. Транспонированием матрицы A называется замена каждой ее строки столбцом с тем же номером. Записывают A^T.

Для операции транспонирования верны свойства:

1) $\left(A^T\right)^T=A$; 2) $(A+B)^T=A^T+B^T$; 3) $(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$.

5. ***Элементарные преобразования матриц.***

Элементарными преобразованиями матриц являются: 1) перестановка двух параллельных рядов матрицы; 2) умножение всех элементов ряда матрицы на отличное от нуля число; 3) прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и то же число.

Две матрицы называют ***эквивалентными***, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований. Любую матрицу с помощью элементарных преобразований можно привести к эквивалентной ей треугольной или трапециевидной матрице.

Пример 1. Даны матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 4 & -7\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $5A+3B^T$.

Решение. Матрица

$$5A+3B^T=5\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 5\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 4 & -7\\ 1 & -1\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}5 & -5 & 10\\ 0 & 15 & 25\end{pmatrix}+$$

$$+3\cdot\begin{pmatrix}-2 & 4 & 1\\ 3 & -7 & -1\end{pmatrix}==\begin{pmatrix}5 & -5 & 10\\ 0 & 15 & 25\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6 & 12 & 3\\ 9 & -21 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 7 & 13\\ 9 & -6 & 22\end{pmatrix}.$$

Пример 2. Найти матрицу X, удовлетворяющую условию $3A+2X=E$, если

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 1 & -4 & 5\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix}.$$

Решение. Выражая X из данного равенства, получим:

$$X=\frac{1}{2}(E-3A)=\frac{1}{2}\cdot\left(\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 1 & -4 & 5\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3 & 6 & 9\\ 3 & -12 & 15\\ 6 & -6 & 0\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -6 & -9\\ -3 & 13 & -15\\ -6 & 6 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -3 & -4{,}5\\ -1{,}5 & 6{,}5 & -7{,}5\\ -3 & 3 & 0{,}5\end{pmatrix}.$$

Пример 3. Даны матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 4 & -2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 1 & -3\\ -1 & 2 & 4\end{pmatrix}.$$

Выяснить, существуют ли произведения AB, BA и, если они существуют, найти их.

Решение. Произведение AB существует, поскольку число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B:

$$A_{2\times2}\cdot B_{2\times3}=C_{2\times3}=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 4 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1 & -3\\ -1 & 2 & 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot3+(-3)\cdot(-1) & 1\cdot1+(-3)\cdot2 & 1\cdot(-3)+(-3)\cdot4\\ 4\cdot3+(-2)\cdot(-1) & 4\cdot1+(-2)\cdot2 & 4\cdot(-3)+(-2)\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -5 & -15\\ 14 & 0 & -20\end{pmatrix}.$$

Произведение BA не существует, поскольку число столбцов матрицы B не равно числу строк матрицы A.

Пример 4. Найти $f(A)$, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 2 & 0\end{pmatrix},\quad f(x)=2x^2-5x+6.$$

Решение. Матрица

$$f(A)=2A^2-5A+6E=2\cdot\begin{pmatrix}1 & 5\\ 2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 5\\ 2 & 0\end{pmatrix}-5\cdot\begin{pmatrix}1 & 5\\ 2 & 0\end{pmatrix}+6\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=2\cdot\begin{pmatrix}11 & 5\\ 2 & 10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5 & 25\\ 10 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22-5+6 & 10-25+0\\ 4-10+0 & 20-0+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23 & -15\\ -6 & 26\end{pmatrix}.$$

Задания для решения на практическом занятии

1. Даны матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 5\\ -4 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\\ 3 & -6 & 0\end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $2A^T-5B$.

2. Найти матрицу *X*, удовлетворяющую условию $5X\text{-}4E=3A$, если

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}.$$

3. Даны матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}-5 & 0\\ 4 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 1 & -3\\ -1 & 2 & 4\end{pmatrix}.$$

Выяснить, существуют ли произведения *AB* и *BA* и, если они существуют, найти их.

4. Даны матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 1 & 5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & -3\end{pmatrix}.$$

Проверить, верно ли равенство $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$.

5. Проверить, является ли матрица

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

корнем уравнения $f(x)=x^3-3x^2+4$.

6. Вычислить AB-BA, если:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задания для самостоятельного решения

1. Найти матрицу $B = A^2 + 2A^T \cdot A - 5A \cdot E$, если дана матрица A.

1.1 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$. 1.2 $A=\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. 1.3 $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1.4 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 5 & -5 & 1 \end{pmatrix}$. 1.5 $A=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 7 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$. 1.6 $A=\begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 7 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.7 $A=\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -7 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$. 1.8 $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 8 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. 1.9 $A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

1.10 $A=\begin{pmatrix} 8 & -1 & 3 \\ -6 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 5 \end{pmatrix}$.

1.2 Определители. Вычисление определителей. Обратная матрица

Квадратной матрице A порядка n можно сопоставить число, называемое ее ***определителем (детерминантом)***, которое обозначается $\det A$ (или $|A|$ или Δ) и определяется следующим образом:

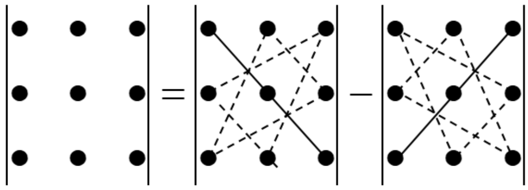
1) $n=1$, $A=(a_{11})$, $\det A = a_{11}$;

2) $n=2$, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$;

3) $n=3$, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Способ вычисления определителя третьего порядка называется ***правилом треугольников*** (или ***правилом Саррюса***), которое символически можно записать так:



Минором элемента a_{ij} определителя порядка n (обозначается M_{ij}) называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из исходного определителя вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя называется соответствующий ему минор, взятый со знаком «+», если сумма $i+j$ – четное число, и со знаком «–», если эта сумма нечетная. Обозначается $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$.

Свойства определителей

1. Определитель не изменится, если его строки заменить столбцами с теми же номерами, и наоборот (транспонировать определитель).
2. Если поменять местами два параллельных ряда, то определитель изменит знак на противоположный.
3. Определитель с двумя одинаковыми рядами равен нулю.
4. Общий множитель элементов какого-либо ряда определителя можно вынести за знак определителя.
5. Если все элементы какого-либо ряда определителя равны нулю, то и сам определитель равен нулю.
6. Определитель, у которого элементы двух параллельных рядов соответственно пропорциональны, равен нулю.
7. Определитель не изменится, если к элементам одного ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на одно и то же число.
8. Определитель равен сумме произведений элементов любого ряда на их алгебраические дополнения.

Все рассмотренные свойства справедливы для определителей n-го порядка. Поэтому на основании этих свойств вычисление определителя любого порядка можно свести к вычислению определителя второго или третьего порядка. Например, используя свойство 8 для вычисления определителей 3-го порядка, получим:

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot A_{11}+a_{12}\cdot A_{12}+a_{13}A_{13}=$$

$$=a_{11}\cdot A_{11}+a_{21}\cdot A_{21}+a_{31}\cdot A_{31}=\ldots\ .$$

Особенно удобно использовать формулы разложения по тем строкам или столбцам, где некоторые элементы (возможно все, кроме одного) равны нулю.

Например, если определитель имеет треугольный вид, то такой определитель будет равен произведению элементов главной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

Квадратная матрица A называется ***невырожденной***, если ее определитель отличен от нуля: $\det A \neq 0$. В противном случае ($\det A = 0$) – ***вырожденной.***

Если для данной матрицы A существует матрица A^{-1} такая, что

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

где E – единичная матрица, то матрица A^{-1} называется ***обратной*** матрицей по отношению к матрице A. Для каждой невырожденной матрицы существует единственная обратная матрица, которая определяется формулой

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^{*} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрица A^* называется ***союзной*** или ***присоединенной***, ее элементами являются алгебраические дополнения соответствующих элементов определителя транспонированной матрицы A^T.

Пример 1. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

а) по правилу треугольников; б) разложением по первой строке; в) приведя к треугольному виду.

Решение.

а) $$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot 3 + 5 \cdot 1 \cdot (-1) - 5 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 2 -$$

$$- (-2) \cdot (-1) \cdot (-1) = -8 - 3 - 5 - 30 - 2 + 2 = -46;$$

б) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} + a_{13}A_{13} = -2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} +$

$+1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 5\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2\cdot(4-1)-(2+3)+5\cdot(-1-6) =$
$-6-5-35=-46$;

в) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \overset{I\leftrightarrow II}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \underset{III-I\cdot 3}{\overset{II+I\cdot 2}{=}} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & -7 & 5 \end{vmatrix} \overset{III+II}{=}$

$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & 8 \end{vmatrix} \overset{II+III\cdot 2}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 19 \\ 0 & -2 & 8 \end{vmatrix} \overset{III+II\cdot 2}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 19 \\ 0 & 0 & 46 \end{vmatrix} = -1\cdot 1\cdot 46 = -46.$

Пример 2. Дана матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Убедиться, что она невырожденная и найти A^{-1}. Сделать проверку.

Решение. Найдем определитель матрицы разложением по 2-ой строке:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4-5=-1.$$

Поскольку определитель не равен нулю, то матрица A невырожденная и для нее обратная матрица существует и определяется формулой

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Найдем все алгебраические дополнения:

$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1,\ A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1,$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6,$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4.$

Тогда

$$A^{-1} = -1 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку.

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2-3 & -8-10+18 & -6-6+12 \\ 1-1+0 & -4+5+0 & -3+3+0 \\ -1+2-1 & 4-10+6 & 3-6+4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Аналогично можно убедиться в выполнении равенства $A^{-1}A = E$.

Задания для решения на практическом занятии

1. Вычислить определитель: а) по правилу треугольников; б) разложением по i-ой строке; в) разложением по j-му столбцу; г) предварительно приведя к треугольному виду.

1.1 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}, i = 2, j = 1$. 1.2 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}, i = 3, j = 2$. 1.3 $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 1 & 8 & 4 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}, i = 1, j = 3.$

2. Решить уравнение.

2.1 $\begin{vmatrix} x+7 & 5x \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$. 2.2 $\begin{vmatrix} x^2-4 & -1 \\ x-2 & x+2 \end{vmatrix} = 0$. 2.3 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3-x & 3 \\ 1 & 2 & 5+x \end{vmatrix} = 0$.

3. Дана матрица A. Убедиться, что она невырожденная и найти обратную ей матрицу A^{-1}. Сделать проверку.

3.1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. 3.2 $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 3.3 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

Задания для самостоятельного решения

1. Вычислить определитель: а) по правилу треугольников; б) разложением по i-ой строке; в) разложением по j-му столбцу; г) предварительно приведя к треугольному виду.

1.1 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \\ -6 & 1 & 0 \end{vmatrix}, i=1, j=3.$ 1.2 $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 6 & 7 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}, i=3, j=2.$

1.3 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 6 & -1 & 7 \end{vmatrix}, i=1, j=2.$ 1.4 $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -5 \end{vmatrix}, i=2, j=1.$

1.5 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 7 \end{vmatrix}, i=3, j=1.$ 1.6 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \\ -6 & 1 & 0 \end{vmatrix}, i=1, j=3.$

1.7 $\begin{vmatrix} -3 & 5 & -5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -1 & 4 \end{vmatrix}, i=2, j=2.$ 1.8 $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -5 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix}, i=2, j=1.$

1.9 $\begin{vmatrix} -1 & 4 & -4 \\ -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}, i=3, j=3.$ 1.10 $\begin{vmatrix} 0 & -7 & 5 \\ 1 & -3 & 4 \\ 6 & -1 & 3 \end{vmatrix}, i=1, j=2.$

2. Дана матрица A. Убедиться, что она невырожденная и найти обратную ей матрицу A^{-1}. Сделать проверку.

2.1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$ 2.2 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -4 \\ 6 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$ 2.3 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$

2.4 $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$ 2.5 $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ -1 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$ 2.6 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$

2.7 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -5 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$ 2.8 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 6 & -2 \\ -3 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$ 2.9 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 0 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$

2.10 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ -1 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$

1.3 Ранг матрицы

Выберем в матрице $A_{m \times n}$ произвольным образом s строк и s столбцов $\left(0 \le s \le \min(m;n)\right)$. Элементы, стоящие на пересечении выбранных строк с выбранными столбцами, образуют матрицу порядка s. Определитель этой матрицы называется ***минором матрицы*** порядка s и обозначается $M_{\{№строк\}}^{\{№столбцов\}}$.

Рангом матрицы называется наибольший из порядков отличных от нуля миноров этой матрицы. Ранг матрицы обозначается $r(A)$ или $rangA$. Очевидно, что $0 \le rangA \le \min(m;n)$.

Пусть $rangA = r$. ***Базисным минором*** матрицы A называется любой отличный от нуля минор порядка r. У матрицы может быть несколько базисных миноров.

Свойства ранга матрицы

1. Ранг матрицы не меняется при транспонировании.
2. Ранг матрицы не изменится, если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд.
3. Если у матрицы есть несколько одинаковых или пропорциональных параллельных рядов, то можно один из них оставить, а остальные вычеркнуть – ранг при этом не изменится.
4. Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях.

Одним из способов вычисления ранга матрицы является метод, который заключается в том, что посредством применения свойств ранга матрицу можно привести к виду:

$$A = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \ldots & c_{1k} & \ldots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \ldots & c_{2k} & \ldots & c_{2n} \\ 0 & 0 & c_{33} & \ldots & c_{3k} & \ldots & c_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & c_{kk} & \ldots & c_{kn} \end{pmatrix},$$

где $c_{ii} \ne 0, i = \overline{1,k}$. Тогда минор матрицы $M_{12\ldots k}^{12\ldots k} = c_{11} \cdot c_{22} \cdot \ldots \cdot c_{kk} \ne 0$, а значит, $rangA = k$.

Пример 1. Найти ранг матрицы A и указать ее базисный минор, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Применим свойства ранга матрицы для поочередного обнуления всех элементов ниже главной диагонали во всех столбцах, начиная с первого.

$$A=\begin{pmatrix}2&1&3&-1\\4&-3&1&1\\1&3&4&-2\\3&-1&2&0\end{pmatrix}\overset{I\leftrightarrow III}{\rightarrow}\begin{pmatrix}1&3&4&-2\\4&-3&1&1\\2&1&3&-1\\3&-1&2&0\end{pmatrix}\begin{matrix}II-4\cdot I\\ \rightarrow\\ III-2\cdot I\\ IV-3\cdot I\end{matrix}\begin{pmatrix}1&3&4&-2\\0&-15&-15&9\\0&-5&-5&3\\0&-10&-10&6\end{pmatrix}.$$

Получили матрицу, у которой вторая, третья и четвертая строки – пропорциональны; третью оставим, а остальные – вычеркнем. В итоге получим следующую матрицу, ранг которой равен рангу исходной матрицы:

$$\begin{pmatrix}1&3&4&-2\\0&-5&-5&3\end{pmatrix}.$$

Поскольку $M_{12}^{12}=\begin{vmatrix}1&3\\0&-5\end{vmatrix}=-5\neq 0$, то $rangA=2$.

Укажем базисный минор матрицы A. Для этого в матрице A надо найти любой не равный нулю минор второго порядка. Например, $M_{12}^{12}=\begin{vmatrix}2&1\\3&-1\end{vmatrix}=-5\neq 0$ – базисный минор. Необходимо отметить, что для данной матрицы можно указать и другие базисные миноры.

Задания для решения на практическом занятии

1. Найти ранг матрицы и указать ее базисный минор.

1.1 $\begin{pmatrix}2&1&11&2\\1&0&4&-1\\11&4&56&5\\2&-1&5&-6\end{pmatrix}$. 1.2 $\begin{pmatrix}1&6&-4&1\\5&0&-2&3\\2&-3&1&1\\-3&12&-6&-1\end{pmatrix}$. 1.3 $\begin{pmatrix}4&-1&1&4\\3&1&0&2\\5&-2&-3&10\\7&4&0&3\end{pmatrix}$.

Задания для самостоятельного решения

1. Найти ранг матрицы и указать ее базисный минор.

1.1 $\begin{pmatrix}3&2&-4\\2&4&-5\\5&6&-9\end{pmatrix}$. 1.2 $\begin{pmatrix}7&1&2\\3&-3&2\\2&5&-1\end{pmatrix}$. 1.3 $\begin{pmatrix}5&2&1\\7&5&-3\\2&2&-2\end{pmatrix}$. 1.4 $\begin{pmatrix}-3&2&-5\\5&1&2\\7&4&-1\end{pmatrix}$.

1.5 $\begin{pmatrix}-3&5&2\\-4&9&5\\2&1&3\end{pmatrix}$. 1.6 $\begin{pmatrix}3&4&-5\\4&1&-3\\7&5&-8\end{pmatrix}$. 1.7 $\begin{pmatrix}3&-2&2\\4&1&-5\\7&-1&-3\end{pmatrix}$. 1.8 $\begin{pmatrix}2&6&2\\-1&-1&0\\-1&1&1\end{pmatrix}$.

1.9 $\begin{pmatrix}-3&5&8\\-2&4&6\\5&6&1\end{pmatrix}$. 1.10 $\begin{pmatrix}3&7&-4\\4&2&-1\\7&9&-5\end{pmatrix}$.

1.4 Системы линейных алгебраических уравнений. Решение систем с невырожденной матрицей

Пусть дана система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (1.1)$$

где числа a_{ij} называются ***коэффициентами системы***, а числа b_i – ***свободными членами***, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. Если все $b_i = 0$, то система называется ***однородной***, в противном случае – ***неоднородной***.

Упорядоченная совокупность чисел $(c_1; c_2, ;..; c_n)$ называется ***решением системы***, если каждое из уравнений системы обращается в верное равенство после подстановки вместо $x_1, x_2, ..., x_n$ соответственно $c_1, c_2, ..., c_n$.

Система называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение, и ***несовместной***, если она не имеет ни одного решения.

Обозначим через A матрицу из коэффициентов системы, через B – матрицу-столбец из свободных членов, через $A \mid B$ – матрицу, полученную из A присоединением столбца свободных членов и через X – матрицу-столбец из неизвестных:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}, A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right), X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Матрицу A называют ***основной***, а $A \mid B$ – ***расширенной*** матрицей системы.

Рассмотрим методы решения совместной системы с невырожденной матрицей, то есть если $\det A \neq 0$. В этом случае система имеет единственное решение. Для простоты будем рассматривать систему из трех уравнений с тремя неизвестными (для большего или меньшего числа уравнений и неизвестных – все аналогично):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \qquad (1.2)$$

1. *Формулы Крамера*

Введем следующие обозначения:

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},\Delta_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},\Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix},\Delta_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\a_{31}&a_{32}&b_3\end{vmatrix},$$

где определители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ получаются из определителя Δ путем замены его первого, второго и третьего столбцов соответственно столбцом свободных членов.

Тогда единственное решение системы (1.2) может быть найдено по ***формулам Крамера***:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}, x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}. \tag{1.3}$$

2. *Матричный метод*

Запишем систему (1.2) в матричном виде: $AX = B$. Умножим обе части последнего матричного уравнения слева на матрицу A^{-1}: $A^{-1}AX = A^{-1}B$. Поскольку $A^{-1}A = E$ и $EX = X$, то формула для нахождения столбца из неизвестных примет вид:

$$X = A^{-1}B. \tag{1.4}$$

3. Метод Гаусса

Суть метода Гаусса состоит в следующем: 1) привести расширенную матрицу системы к эквивалентной ей трапециевидной матрице с единичными элементами на главной диагонали; 2) записать систему уравнений, которая соответствует новой расширенной матрице; 3) из последнего уравнения находим x_3 и подставляем его во второе уравнение, из которого находим x_2. Продолжая аналогичный процесс, находим x_1.

Пример 1. Решить систему по формулам Крамера.

$$\begin{cases}x_1+5x_2+x_3 &= 0,\\2x_1-4x_2-3x_3 &= -1,\\3x_1+4x_2+2x_3 &= 8.\end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель основной матрицы системы:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&5&1\\2&-4&-3\\3&4&2\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}-4&-3\\4&2\end{vmatrix}-5\cdot\begin{vmatrix}2&-3\\3&2\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}2&-4\\3&4\end{vmatrix}=4-65+20=-41.$$

Так как $\Delta\neq 0$, то система имеет единственное решение. Вычислим остальные три определителя:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}0&5&1\\-1&-4&-3\\8&4&2\end{vmatrix}=-5\cdot\begin{vmatrix}-1&-3\\8&2\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}-1&-4\\8&4\end{vmatrix}=-110+28=-82;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 22 + 19 = 41;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ 3 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -11 - 112 = -123.$$

Тогда по формулам (1.3) получим:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-82}{-41} = 2, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{41}{-41} = -1, \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-123}{-41} = 3.$$

Решение системы: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}^T$.

Пример 2. Решить систему матричным методом.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 & = & 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 & = & 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & 6. \end{cases}$$

Решение. Для данной системы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения столбца из неизвестных воспользуемся формулой (1.4):

$$X = A^{-1}B, \text{ где } A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 4 + 5 = 7,$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4, A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(-2) = 2, A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 3, A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-5) = 5, A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -1.$$

Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 5 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix},$$

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ -4 & 1 & 5\\ 5 & -3 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\5\\6\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}-1\cdot 0+2\cdot 5+3\cdot 6\\ -4\cdot 0+1\cdot 5+5\cdot 6\\ 5\cdot 0-3\cdot 5-1\cdot 6\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}28\\35\\-21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\\-3\end{pmatrix}.$$

Таким образом, $x_1=4, x_2=5, x_3=-3$; решение системы: $(4\quad 5\quad -3)^T$.

Пример 3. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases}2x_1-x_2+2x_3 & = & 0,\\ x_1+x_2+2x_3 & = & 4,\\ 4x_1+x_2+4x_3 & = & 6.\end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы и приведем ее к эквивалентной трапециевидной матрице.

$$A\,|\,B=\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 2 & 4\\ 4 & 1 & 4 & 6\end{array}\right)\xrightarrow{I\leftrightarrow II}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 2 & 4\\ 2 & -1 & 2 & 0\\ 4 & 1 & 4 & 6\end{array}\right)\xrightarrow[III-4\cdot I]{II-2\cdot I}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 2 & 4\\ 0 & -3 & -2 & -8\\ 0 & -3 & -4 & -10\end{array}\right)\xrightarrow{III-II}$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 2 & 4\\ 0 & -3 & -2 & -8\\ 0 & 0 & -2 & -2\end{array}\right)\xrightarrow[III:(-2)]{II:(-3)}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 2/3 & 8/3\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right).$$

Запишем систему, которая соответствует данной расширенной матрице:

$$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3 & = & 4,\\ x_2+2/3\,x_3 & = & 8/3,\\ x_3 & = & 1,\end{cases}$$

которая легко решается снизу вверх (из второго уравнения находим x_2, а затем из первого – x_1):

$$\begin{cases}x_1 & = & 4-x_2-2x_3=4-2-2=0,\\ x_2 & = & 8/3-2/3\cdot x_3=6/3=2,\\ x_3 & = & 1.\end{cases}$$

Таким образом, $x_1=0, x_2=2, x_3=1$; решение системы: $(0\quad 2\quad 1)^T$.

Задания для решения на практическом занятии

1. Решить систему: а) по формулам Крамера; б) матричным методом; в) методом Гаусса.

1.1 $\begin{cases}4x_1+2x_2-x_3=1,\\ 5x_1+3x_2-2x_3=2,\\ 3x_1+2x_2-3x_3=0.\end{cases}$ 1.2 $\begin{cases}8x_1+7x_2+3x_3=18,\\ 7x_1+4x_2+4x_3=11,\\ -6x_1+5x_2-4x_3=-15.\end{cases}$ 1.3 $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=0,\\ 2x_1+2x_2-x_3=3,\\ 4x_1-x_2+x_3=5.\end{cases}$

Задания для самостоятельного решения

1. Решить систему: а) по формулам Крамера; б) матричным методом; в) методом Гаусса.

1.1
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$$

1.2
$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 17, \\ -4x_1 + x_2 - 2x_3 = -8. \end{cases}$$

1.3
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -5, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 2, \\ 6x_1 - x_2 - 2x_3 = 7. \end{cases}$$

1.4
$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 5x_3 = -3, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 9, \\ 5x_1 + x_3 = 3. \end{cases}$$

1.5
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2, \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -28, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 13. \end{cases}$$

1.6
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 = -6. \end{cases}$$

1.7
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = -1, \\ -x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -9. \end{cases}$$

1.8
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -2, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 13. \end{cases}$$

1.9
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 12, \\ 2x_2 - 5x_3 = 12, \\ -x_1 - 4x_2 + x_3 = -9. \end{cases}$$

1.10
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 11, \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 9, \\ -7x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

1.5 Произвольные системы линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим решение произвольных систем вида (1.1).

Теорема Кронекера – Капелли. Для того, чтобы система (1.1) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы A был равен рангу ее расширенной матрицы $A\,|\,B$.

Базисными неизвестными совместной системы называют те неизвестные, коэффициенты при которых входят в базисный минор, а остальные неизвестные – ***свободными***.

При решении неоднородной системы (1.1) возможны следующие случаи.

1. $rangA \neq rangA\,|\,B \Rightarrow$ система несовместна.

2. $rangA = rangA\,|\,B = n$, то есть ранг основной матрицы A равен рангу расширенной матрицы $A\,|\,B$ и равен числу неизвестных, тогда система имеет единственное решение. Для нахождения этого решения определяем базисный минор. Строки расширенной матрицы, которые не вошли в базисный минор, вычеркиваем. Далее по полученной расширенной матрице записываем систему, у которой число уравнений равно числу неизвестных и которая является

невырожденной. Такую систему можно решать любым из рассмотренных выше методов.

3. $rangA = rangA| < n$, то есть ранг матрицы A равен рангу расширенной матрицы $A|B$, но меньше числа неизвестных, тогда система имеет бесконечное множество решений. Для их нахождения определяем базисный минор. Те неизвестные, коэффициенты при которых вошли в базисный минор, объявляем ***базисными***, а остальные – ***свободными***. Записываем систему, в которую вошли только те уравнения, коэффициенты при которых входят в базисный минор. Далее в каждом уравнении свободные неизвестные переносим в правую часть. Таким образом получаем систему с невырожденной основной матрицей, которую можно решать, например, методом Гаусса или по формулам Крамера. В результате решения получим выражение каждой базисной неизвестной через свободные неизвестные. Придавая свободным неизвестным произвольные значения, получим соответствующие значения базисных неизвестных. Получили ***общее решение*** исходной системы (1.1).

Рассмотрим решение однородной системы вида (1.1), то есть случай, когда $b_1 = 0, b_2 = 0, ..., b_m = 0$.

Однородная система всегда совместна, так как ранг ее основной матрицы всегда равен рангу расширенной матрицы. Набор чисел $x_1 = 0, x_2 = 0, ..., x_n = 0$ всегда является решением однородной системы. Такое решение называют ***нулевым*** или ***тривиальным***.

При решении однородной системы возможны следующие случаи.

1. $rangA = n$, то есть ранг основной матрицы равен числу неизвестных, тогда однородная система имеет только тривиальное решение. Например, если в системе число уравнений равно числу неизвестных, то для того чтобы однородная система имела только нулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был отличен от нуля.

2. $rangA < n$, то есть ранг основной матрицы меньше числа неизвестных, тогда однородная система имеет ненулевые решения. В этом случае решение однородной системы осуществляют аналогично решению неоднородной системы, рассмотренному в пункте 3, только все преобразования проводят над основной матрицей.

Пример 1. Исследовать на совместность и в случае совместности решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 & = & 5, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 & = & 1, \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 7. \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы и приведем ее к трапециевидной форме.

$$A|B=\left(\begin{array}{ccc|c}2&-3&1&5\\1&4&-1&1\\5&-2&1&7\end{array}\right)\xrightarrow{I\leftrightarrow II}\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&-1&1\\2&-3&1&5\\5&-2&1&7\end{array}\right)\begin{array}{c}II-2\cdot I\\ \to\\ III-5\cdot I\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&-1&1\\0&-11&3&3\\0&-22&6&2\end{array}\right)\xrightarrow{III-2II}$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&-1&1\\0&-11&3&3\\0&0&0&-4\end{array}\right).$$

Далее определим ранг основной и расширенной матрицы системы:

$$M_{12}^{12}=\begin{vmatrix}1&4\\0&-11\end{vmatrix}=-11\neq 0\Rightarrow rangA=2;$$

$$M_{123}^{124}=\begin{vmatrix}1&4&1\\0&-11&3\\0&0&-4\end{vmatrix}=44\neq 0\Rightarrow rangA|B=3.$$

Таким образом, $rangA\neq rangA\,|\,B\Rightarrow$ система несовместна.

Пример 2. Исследовать на совместность, и в случае совместности решить систему.

$$\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-x_4&=&2,\\4x_1+x_2-x_3+2x_4&=&-3,\\5x_1+8x_2-11x_3+7x_4&=&-12.\end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы и приведем ее к трапециевидной форме.

$$A\,|\,B=\left(\begin{array}{cccc|c}1&-2&3&-1&2\\4&1&-1&2&-3\\5&8&-11&7&-12\end{array}\right)\begin{array}{c}II-4\cdot I\\ \to\\ III-5\cdot I\end{array}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-2&3&-1&2\\0&9&-13&6&-11\\0&18&-26&12&-22\end{array}\right).$$

В полученной матрице вторая и третья строки пропорциональны, одну можно вычеркнуть, например третью. Далее, каждый элемент второй строки разделим на 9. В итоге получим следующую расширенную матрицу:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&-2&3&-1&2\\0&1&-13/9&2/3&-11/9\end{array}\right).$$

Минор $M_{12}^{12}=\begin{vmatrix}1&-2\\0&1\end{vmatrix}=1\neq 0\Rightarrow rangA=rangA\,|\,B=2\Rightarrow$ система совместна; а поскольку число неизвестных $n=4>2$, то система имеет бесконечное множество решений. Найдем эти решения.

За базисный минор примем минор M_{12}^{12}; тогда x_1,x_2- базисные неизвестные, x_3,x_4- свободные неизвестные.

Выпишем по полученной в итоге преобразований расширенной матрице систему, равносильную исходной, и выразим из нее базисные неизвестные через свободные.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 2, \\ x_2 - 13/9x_3 + 2/3x_4 = -11/9, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4/9 - 1/9x_3 - 1/3x_4, \\ x_2 = -11/9 + 13/9x_3 - 2/3x_4. \end{cases}$$

Пусть $x_3 = C_1, x_4 = C_2$, где $C_1, C_2 \in R$. Получим:

$$\begin{cases} x_1 = -4/9 \quad -1/9C_1 - 1/3C_2, \\ x_2 = -11/9 \quad +13/9C_1 - 2/3C_2, \\ x_3 = C_1, \\ x_4 = C_2, \end{cases} \quad C_1, C_2 \in R.$$

Тогда общее решение

$$\begin{pmatrix} -4/9 - 1/9C_1 - 1/3C_2 \\ -11/9 + 13/9C_1 - 2/3C_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, C_1, C_2 \in R.$$

Пример 3. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Составим основную матрицу системы и преобразуем ее к трапециевидной форме.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} II - 2\cdot I \\ \to \\ III - 3\cdot II \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & -14 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & =1 \end{pmatrix} \xrightarrow{II:(-7)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1/7 \end{pmatrix}.$$

Минор $M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow rangA = 2 < 3 = n \Rightarrow$ система имеет бесконечное множество решений. Найдем их. В качестве базисного минора выберем M_{12}^{12}, тогда x_1, x_2 – базисные неизвестные, x_3 – свободное неизвестное.

Выпишем по полученной в итоге преобразований матрице однородную систему, равносильную исходной, и выразим из нее базисные неизвестные через свободные.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_2 + 1/7x_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -11/7x_3, \\ x_2 = -1/7x_3. \end{cases}$$

Пусть $x_3 = C, C \in R$. Тогда общее решение исходной системы:

$$\left(-\frac{11}{7}C \quad -\frac{1}{7}C \quad C\right)^T, C \in R.$$

Задания для решения на практическом занятии

1. Исследовать на совместность и в случае совместности решить систему.

1.1
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 5x_3 = -4, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ -3x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$$

1.2
$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 4x_3 = 8, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -2, \\ 13x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 10. \end{cases}$$

1.3
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 4x_4 = 9, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

2. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений.

2.1
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ -3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

2.2
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - 7x_3 = 0, \\ -4x_1 + x_2 + 11x_3 = 0. \end{cases}$$

2.3
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 = 0, \\ x_1 + 11x_2 + 34x_4 = 0. \end{cases}$$

Задания для самостоятельного решения

1. Исследовать на совместность и в случае совместности решить систему.

1.1 а) $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1, \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$

1.2 а) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 7, \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 = 5, \\ x_1 + 10x_2 - 23x_3 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 3, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$

1.3 а) $\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 + x_3 = 13, \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 4, \\ x_1 - 33x_3 = 2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4, \\ 2x_1 - 9x_2 + 2x_3 = 7, \\ x_1 - 4x_2 - x_3 - 4x_4 = 3. \end{cases}$

1.4 а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = -1, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 + 6x_4 = 10, \\ -3x_1 - 7x_2 - 6x_3 + 17x_4 = 21. \end{cases}$

1.5 а) $\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 - x_3 = 6, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 10, \\ 2x_1 - 3x_2 + 9x_3 + 16x_4 = -10. \end{cases}$

1.6 а) $\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 8, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 6, \\ 3x_1 + 4x_2 + 8x_3 = -5. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 3, \\ 2x_1 + 9x_2 - 6x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$

1.7 а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 10, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 = 7, \\ x_1 + 8x_2 + 17x_3 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 7, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 10. \end{cases}$

1.8 а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -6, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 6. \end{cases}$

1.9 а) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_3 = -3, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 8, \\ 2x_1 - 7x_2 - 6x_3 = -1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 7, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 5, \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 12. \end{cases}$

1.10 а) $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 12, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 8, \\ -x_1 + 5x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 7, \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 = -1, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$

2. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений.

2.1
$\begin{cases} x_1 + x_2 - 8x_3 = 0, \\ 4x_1 - 5x_2 + 9x_3 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 - 7x_3 = 0. \end{cases}$

2.2
$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 6x_3 = 0, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 15x_2 + 8x_3 = 0. \end{cases}$

2.3
$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 5x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

2.4
$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

2.5
$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$

2.6
$\begin{cases} 7x_1 - 6x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

2.7
$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 6x_1 + 11x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

2.8
$\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

2.9
$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ 5x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

2.10
$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

2 ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

2.1 Векторы. Линейные операции над векторами. Базис и координаты вектора

Величины, для определения которых кроме числового значения, необходимо знать ещё и направление, называются ***векторными.*** Векторные величины геометрически изображаются с помощью векторов.

Вектором называется направленный отрезок, то есть отрезок, имеющий определённую длину и определённое направление. Если точка A – начало вектора, а точка B – его конец, то вектор обозначается $\overrightarrow{AB}$. Также векторы могут обозначаться малыми буквами латинского алфавита: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и т. д.

Длиной или ***модулем*** вектора $\overrightarrow{AB}$ называется расстояние между началом и концом этого вектора и обозначается $\left|\overrightarrow{AB}\right|$. Вектор, длина которого равна нулю, называется ***нулевым*** и обозначается $\vec{0}$. Нулевой вектор направления не имеет.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ***коллинеарными*** (записывают $\vec{a} \parallel \vec{b}$), если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Два вектора называются ***равными***, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые длины.

Из определения равенства векторов следует, что вектор можно переносить в пространстве посредством параллельного переноса, поэтому векторы называются свободными.

Векторы в пространстве называются ***компланарными***, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Под линейными операциями над векторами понимают операцию умножения вектора на число, а также сложение и вычитание векторов.

Произведением вектора $\vec{a}$ ***на число*** $\lambda \in R$ называется вектор $\lambda\vec{a}$, удовлетворяющий условиям: 1) длина вектора $\lambda\vec{a}$ равна произведению модуля числа λ на длину вектора $\vec{a}$: $\left|\lambda\vec{a}\right| = |\lambda| \cdot \left|\vec{a}\right|$; 2) вектор $\lambda\vec{a}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$, причём направление $\lambda\vec{a}$ совпадает с направлением $\vec{a}$ $\left(\lambda\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}\right)$, если $\lambda > 0$, и противоположно ему $\left(\lambda\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}\right)$, если $\lambda < 0$.

Суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют третий вектор $\vec{a} + \vec{b}$, который можно находить либо по правилу треугольника, либо по правилу параллелограмма.

Правило треугольника. Выберем в пространстве точку и параллельным переносом перенесём вектор $\vec{a}$ так, чтобы его начало оказалось в этой точке.

Затем перенесём вектор $\vec{b}$ таким образом, чтобы его начало оказалось в конце вектора $\vec{a}$. Вектор, соединяющий точку – начало первого вектора с точкой – концом второго, и будет искомый вектор $\vec{a}+\vec{b}$ (рис. 1).

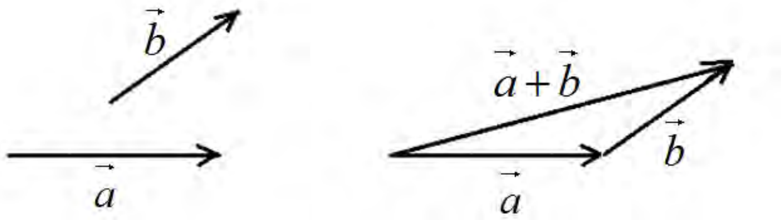


Рисунок 1 – Сложение векторов по правилу треугольника

Правило параллелограмма. Возьмём произвольную точку и параллельным переносом перенесём векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ так, чтобы их начало оказалось в этой точке. Далее на этих двух векторах, как на сторонах, строим параллелограмм. Вектор $\vec{a}+\vec{b}$ – это направленная диагональ параллелограмма, выходящая из общей точки-начала (рис. 2).

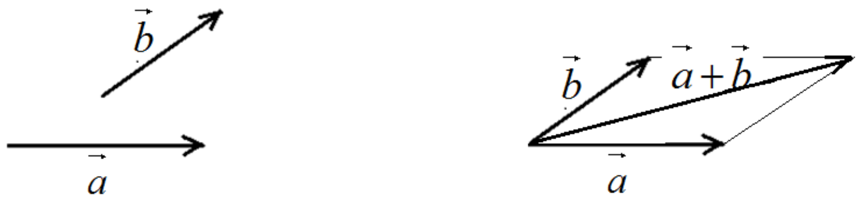


Рисунок 2 – Сложение векторов по правилу параллелограмма

Разностью двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, который нужно сложить с вектором $\vec{b}$, чтобы получить вектор $\vec{a}$, то есть $\vec{a}-\vec{b}=\vec{c} \Leftrightarrow \vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$. Чтобы построить вектор $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$, нужно параллельным переносом перенести векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ к общему началу, и тогда вектор $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ будет соединять конец вектора $\vec{b}$ с концом вектора $\vec{a}$ (рис. 3).

Рисунок 3 – Разность векторов по правилу треугольника

Линейные операции над векторами обладают свойствами $(\alpha,\beta \in R)$: 1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$; 2) $\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$; 3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$; 4) $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$; 5) $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$.

Свойства линейных операций позволяют проводить преобразования над векторами так, как это делается в обычной алгебре: слагаемые менять местами, вводить скобки, группировать, выносить за скобки как скалярные, так и векторные множители.

Базисом на плоскости называют любые два неколлинеарных вектора на этой плоскости, взятые в определённом порядке. Если на плоскости выбран базис $\vec{e_1}, \vec{e_2}$, то любой вектор $\vec{a}$ этой плоскости можно разложить по векторам $\vec{e_1}, \vec{e_2}$, и такое разложение единственно, $\vec{a} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$.

Базисом в пространстве называют любые три некомпланарных вектора в этом пространстве, взятые в определённом порядке. Если в пространстве выбран базис $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$, то любой вектор $\vec{a}$ этого пространства можно разложить по векторам $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$, и такое разложение единственно: $\vec{a} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}$. При этом коэффициенты x, y, z в данном разложении называют ***координатами вектора*** $\vec{a}$ в базисе $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ и записывают $\vec{a}(x; y; z)$ или $\vec{a} = (x; y; z)$

Базис называют ***ортонормированным***, если базисные векторы попарно ортогональны и длина каждого из них равна единице. На плоскости ортонормированный базис принято обозначать $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, в пространстве – $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Декартовой системой координат в пространстве называют совокупность фиксированной точки O и базиса $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$. Декартова система координат с ортонормированным базисом называется ***прямоугольной системой координат.***

Вектор $\overrightarrow{OM}$ для произвольной точки M называют ее ***радиус-вектором.*** Координаты радиуса-вектора точки M по отношению к началу координат называют ***координатами точки*** M в рассматриваемой системе координат.

Для векторов, заданных своими координатами в некотором базисе, имеют место следующие свойства.

1. При умножении вектора $\vec{a}(x; y; z)$ на число $\lambda \in R$ все его координаты умножаются на это число: $\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda x; \lambda y; \lambda z)$.

2. При сложении (вычитании) векторов $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ складываются (вычитаются) их соответствующие координаты: $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2)$.

3. Вектор $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ коллинеарен вектору $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, если их соответствующие координаты пропорциональны: $x_1 = \lambda x_2, y_1 = \lambda y_2, z_1 = \lambda z_2$ или $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$, где λ – некоторое число.

4. Вектор $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ равен вектору $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, если их соответствующие координаты равны: $x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2$.

Пусть в прямоугольной системе координат даны точки $A(x_1;y_1;z_1)$ и $B(x_2;y_2;z_2)$. Тогда координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ определяются по формуле

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1),$$

а его длина:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Координаты точки $M(x;y;z)$, лежащей на отрезке AB и делящей этот отрезок в отношении λ, то есть в случае $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$, вычисляются по ***формулам деления отрезка в данном отношении:***

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

При $\lambda=1$ точка M делит отрезок AB пополам, и последние формулы принимают вид

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2},\ z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

Пример 1. Даны три точки: $A(1;-3;0), B(-2;1;2), C(2;5;-3)$. Найти: а) координаты вектора $3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}$; б) $\left|\overrightarrow{AC}\right|$.

Решение.

1. Сначала найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$:
$\overrightarrow{AB}=\big(-2-1;1-(-3);2-0\big)=(-3;4;2)$, $\overrightarrow{BC}=\big(2-(-2);5-1;-3-2\big)=(4;4;-5)$.

Тогда $3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}=3(-3;4;2)-2(4;4;-5)=(-9;12;6)-(8;8;-10)=(-17;4;16)$.

2. Координаты вектора $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AC}=\big(2-1;5-(-3);-3-0\big)=(1;8;-3)$. Тогда его длина: $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{1^2+8^2+(-3)^2}=\sqrt{1+64+9}=\sqrt{74}$.

Пример 2. Отрезок AB разделен точками M_1, M_2, M_3, M_4 на пять равных частей. Определить координаты точки M_3, если $A(-4;1;3)$ и $B(6;0;-2)$.

Решение. Рассмотрим отрезок, на котором расположены точки в указанном порядке (рис. 4).

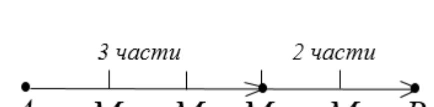


Рисунок 4 – Расположение точек на отрезке

Введем в рассмотрение векторы $\overrightarrow{AM_3}$ и $\overrightarrow{M_3B}$. Очевидно, что $\overrightarrow{AM_3}=3/2\cdot\overrightarrow{M_3B}$. Тогда для нахождения координат точки $M_3(x;y;z)$ воспользуемся формулами деления отрезка в данном отношении при $\lambda=3/2$:

$$x=\frac{-4+3/2\cdot 6}{1+3/2}=\frac{5}{5/2}=2,\ y=\frac{1+3/2\cdot 0}{1+3/2}=\frac{1}{5/2}=\frac{2}{5}=0{,}4,\ z=\frac{3+3/2\cdot(-2)}{1+3/2}=0.$$

Таким образом, $M_3(2;0{,}4;0)$.

Пример 3. Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(1;-2;3)$, $B(3;2;1)$, $C(6;4;4)$. Найти его четвертую вершину D и точку O пересечения его диагоналей.

Решение. Обозначим координаты точек D и O так: $D(x_D; y_D; z_D)$ и $O(x_O; y_O; z_O)$. Тогда $\overrightarrow{AD} = (x_D - 1; y_D + 2; z_D - 3), \overrightarrow{BC} = (3;2;3)$. Поскольку $ABCD$ – параллелограмм, то $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ (рис. 5).

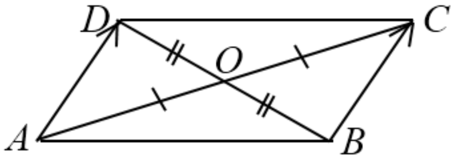


Рисунок 5 – Параллелограмм $ABCD$

Но у равных векторов должны быть равны их соответствующие координаты. Получим систему:

$$\begin{cases} x_D - 1 = 3, \\ y_D + 2 = 2, \\ z_D - 3 = 3. \end{cases}$$

Отсюда имеем: $x_D = 4, y_D = 0, z_D = 6$ или $D(4;0;6)$.

Для нахождения координат точки O воспользуемся формулами координат середины отрезка AC:

$$x_O = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{1+6}{2} = 3{,}5, y_O = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-2+4}{2} = 1, z_O = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{3+4}{2} = 3{,}5.$$

Задания для решения на практическом занятии

1. Даны три точки: $A(-4;1;7), B(2;-3;1), C(0;-1;5)$. Найти: а) координаты вектора $2\overrightarrow{CB} + 5\overrightarrow{BA}$; б) $\left|\overrightarrow{CA}\right|$.

2. В пространстве заданы векторы $\vec{a} = (-4;5;2)$ и $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$. Найти координаты векторов: $2\vec{a}$, $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $3\vec{b} - 0{,}5\vec{a}$.

3. Отрезок AB разделен точками M_1, M_2, M_3 на четыре равные части. Определить координаты точек M_1 и M_2, если $A(3;-1;4)$, $B(2;-3;1)$.

4. Известно, что векторы $\vec{a} = (x;7;-2)$ и $\vec{b} = (3; y-1;1)$ коллинеарны. Найти значения x и y.

5. Найти координаты единичного вектора, коллинеарного вектору $\vec{b} = (2;-1;-2)$.

6. Точки $A(-1;1;3), B(2;-3;1), C(x;5;5)$ лежат на одной прямой. Найти значение x.

7. В параллелограмме $ABCD$ известны координаты двух последовательных вершин: $A(3;-2;5), B(6;4;-1)$ и точки пересечения диагоналей: $O(1;3;-4)$. Найти координаты остальных вершин параллелограмма.

8. В некотором базисе векторы заданы координатами: $\vec{a}=(1;1;2)$, $\vec{b}=(2;2;-1)$, $\vec{c}=(0;4;8)$ и $\vec{d}=(-1;-1;3)$. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{b},\vec{c},\vec{d}$.

9. Найти координаты единичного вектора $\vec{e}$, направленного по биссектрисе угла, образованного векторами $\vec{a}=(-3;6;2)$ и $\vec{b}=(2;-2;1)$.

Задания для самостоятельного решения

1. Даны координаты точек A,B,C и D. Найти: а) координаты вектора $\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{DC}$; б) длину вектора $\vec{d}$; в) координаты точки M, делящей отрезок AD в соотношении $\alpha:\beta$.

1.1 $A(-3;4;7), B(0;-5;1), C(10;1;-3), D(-12;-1;4), \alpha=3, \beta=2, \vec{d}=\overrightarrow{BC}$.

1.2 $A(4;0;9), B(10;-1;2), C(-1;3;6), D(0;5;-7), \alpha=1, \beta=4, \vec{d}=\overrightarrow{BD}$.

1.3 $A(-8;-3;1), B(1;-1;-1), C(9;-3;2), D(5;-5;0), \alpha=2, \beta=3, \vec{d}=\overrightarrow{CA}$.

1.4 $A(0;-4;-3), B(-2;1;-2), C(6;-1;5), D(4;-1;-2), \alpha=2, \beta=5, \vec{d}=\overrightarrow{CB}$.

1.5 $A(1;2;-3), B(-7;0;1), C(2;-5;3), D(8;1;-4), \alpha=1, \beta=4, \vec{d}=\overrightarrow{DB}$.

1.6 $A(3;1;-4), B(2;-2;1), C(9;-1;0), D(3;-1;5), \alpha=2, \beta=5, \vec{d}=\overrightarrow{BC}$.

1.7 $A(-1;6;-2), B(3;5;-1), C(7;-3;1), D(0;-1;-6), \alpha=5, \beta=1, \vec{d}=\overrightarrow{CD}$.

1.8 $A(3;-1;2), B(-8;4;0), C(7;-1;-3), D(5;-1;1), \alpha=4, \beta=3, \vec{d}=\overrightarrow{BC}$.

1.9 $A(1;2;4), B(-5;-3;2), C(-1;1;6), D(4;1;-4), \alpha=5, \beta=2, \vec{d}=\overrightarrow{BD}$.

1.10 $A(2;-4;0), B(1;-7;1), C(3;-5;-3), D(8;0;-1), \alpha=1, \beta=5, \vec{d}=\overrightarrow{BA}$.

2. В некотором базисе векторы заданы координатами: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{b},\vec{c},\vec{d}$.

2.1 $\vec{a}=(21;9;10), \vec{b}=(3;3;2), \vec{c}=(-2;4;-1), \vec{d}=(4;-2;-1)$.

2.2 $\vec{a}=(5;12;-1), \vec{b}=(3;2;1), \vec{c}=(-2;3;-2), \vec{d}=(5;-4;-3)$.

2.3 $\vec{a}=(0;6;4), \vec{b}=(2;4;1), \vec{c}=(-1;1;1), \vec{d}=(2;4;2)$.

2.4 $\vec{a}=(8;11;22), \vec{b}=(2;1;4), \vec{c}=(-1;1;1), \vec{d}=(2;2;4)$.

2.5 $\vec{a}=(0;1;-3), \vec{b}=(2;3;1), \vec{c}=(-1;4;5), \vec{d}=(-3;2;1)$.

2.6 $\vec{a}=(4;0;1), \vec{b}=(2;2;3), \vec{c}=(3;1;2), \vec{d}=(1;3;1)$.

2.7 $\vec{a}=(3;-4;-3), \vec{b}=(2;1;4), \vec{c}=(-1;1;1), \vec{d}=(2;2;4)$.

2.8 $\vec{a}=(-9;-2;-6), \vec{b}=(1;4;0), \vec{c}=(4;-1;3), \vec{d}=(-1;5;-7)$.

2.9 $\vec{a}=(11;4;11),\vec{b}=(3;2;3),\vec{c}=(4;-1;-2),\vec{d}=(-2;-1;4)$.

2.10 $\vec{a}=(-8;-4;9),\vec{b}=(-3;3;-1),\vec{c}=(5;1;4),\vec{d}=(6;1;2)$.

2.2 Скалярное произведение векторов

Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ ***на ось*** l (обозначается $np_l\,\overrightarrow{AB}$) называется длина отрезка CD этой оси, заключённого между проекциями на ось l точек A и B соответственно, взятая со знаком «+», если угол между вектором $\overrightarrow{AB}$ и осью l острый, и со знаком «–», если этот угол – тупой (рис. 6). При $\alpha=\pi/2$ отрезок CD превращается в точку и $np_{Ox}\overrightarrow{AB}=0$.

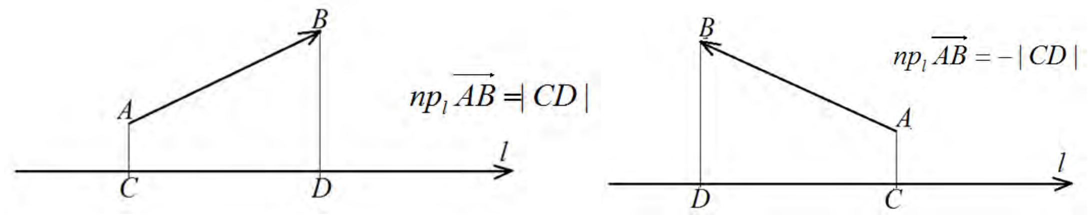


Рисунок 6 – Проекция вектора на ось

Проекция вектора на ось равна длине этого вектора, умноженной на косинус угла между вектором и осью:

$$np_l\,\overrightarrow{AB}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\cos\alpha. \qquad (2.1)$$

В прямоугольной системе координаты вектора $\vec{a}=(x;y;z)$ равны соответственно проекциям вектора на оси координат:

$$x=np_{Ox}\vec{a},\quad y=np_{Oy}\vec{a},\quad z=np_{Oz}\vec{a}.$$

Углом между двумя векторами называется наименьший угол между этими векторами, приведёнными к общему началу. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ символически записывают так: $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$. Очевидно, что $0\le\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)\le\pi$.

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right). \qquad (2.2)$$

Перечислим основные свойства скалярного произведения.

1. Скалярное произведение коммутативно: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.

2. Для любого вектора скалярный квадрат равен квадрату модуля: $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^{\,2}=\left|\vec{a}\right|^2$. Из последнего равенства следует: $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\vec{a}^{\,2}}$.

3. Скалярное произведение равно нулю, если сомножители ортогональны или хотя бы один из них равен нулю: $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$ или $\vec{a}=\vec{0}$ или $\vec{b}=\vec{0}$.

4. Скалярное произведение обладает свойством ассоциативности относительно скалярного множителя: $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\overrightarrow{a\cdot b})$.

5. Скалярное произведение дистрибутивно относительно сложения: $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.

Пусть векторы заданы своими координатами в ортонормированном базисе: $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ и $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$. Тогда их скалярное произведение определяется формулой

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2. \tag{2.3}$$

Рассмотрим некоторые приложения скалярного произведения.

1. ***Проекция вектора на другой вектор***. С учетом формулы (2.1) из формулы (2.2) имеем:

$$np_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|} \text{ или } np_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}. \tag{2.4}$$

2. ***Угол между двумя векторами.*** Из определения скалярного произведения следует, что

$$cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|},\left(\left|\vec{a}\right|\neq 0,\left|\vec{b}\right|\neq 0\right). \tag{2.5}$$

В частности, если векторы заданы своими координатами в ортонормированном базисе: $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ и $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$, то последнюю формулу можно переписать так:

$$cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}+z_1^{\,2}}\cdot\sqrt{x_2^{\,2}+y_2^{\,2}+z_2^{\,2}}}. \tag{2.6}$$

3. Направляющие косинусы векторов. В прямоугольной системе координат направление вектора $\vec{a}(x;y;z)$ определяется углами α,β,γ, образованными вектором $\vec{a}$ с положительными направлениями осей Ox,Oy,Oz соответственно (или вектором $\vec{a}$ с векторами $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ соответственно). Косинусы этих углов называются ***направляющими косинусами*** этого вектора и определяются по формулам:

$$\cos\alpha == \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \cos\beta == \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \cos\gamma == \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Направляющие косинусы связаны соотношением

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Заметим, что все формулы приведены для трехмерного пространства. Для двумерного случая (на плоскости) эти формулы также справедливы с той лишь особенностью, что третья координата отсутствует.

Пример 1. Вычислить скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$, если $\vec{a} = 2\vec{p} - \vec{q}$, $\vec{b} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$, где $\vec{p}, \vec{q}$ – единичные векторы, а угол между ними равен $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$.

Решение. Воспользуемся свойствами скалярного произведения и его определением. Имеем:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left(2\vec{p} - \vec{q}\right)\cdot\left(3\vec{p} + 2\vec{q}\right) = 6\vec{p}^{\,2} + 4\vec{p}\vec{q} - 3\vec{q}\vec{p} - 2\vec{q}^{\,2} =$$

$$= 6\left|\vec{p}\right|^2 + \vec{p}\vec{q} - 2\left|\vec{q}\right|^2 = 6\cdot 1 + \left|\vec{p}\right|\cdot\left|\vec{q}\right|\cos\frac{\pi}{3} - 2\cdot 1 = 4 + \frac{1}{2} = 4{,}5.$$

Пример 2. Даны вершины треугольника $ABC: A(3;2;-3), B(5;1;-1)$, $C(1;-2;1)$. Вычислить внутренний угол при вершине A.

Решение. Внутренний угол при вершине A – это угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Так как $\overrightarrow{AB} = (2;-1;2), \overrightarrow{AC} = (-2;-4;4)$, то по формуле (2.6) имеем:

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{2\cdot(-2) + (-1)\cdot(-4) + 2\cdot 4}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}\cdot\sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 4^2}} = \frac{8}{3\cdot 6} = \frac{4}{9}.$$

Следовательно, $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = \arccos\dfrac{4}{9} \approx 74^\circ$.

Пример 3. Найти координаты вектора $\vec{a}$, если известно, что $\left|\vec{a}\right| = 26$, $np_{Oz}\vec{a} < 0$ и он перпендикулярен к векторам $\vec{b} = (4;-2;-3)$ и $\vec{c} = (0;1;3)$.

Решение. Обозначим координаты вектора $\vec{a}$ через x, y, z, то есть $\vec{a} = (x; y; z)$. Так как $\vec{a}\perp\vec{b}$ и $\vec{a}\perp\vec{c}$, то $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ и $\vec{a}\cdot\vec{c} = 0$. Воспользовавшись формулой (2.3), два последних равенства запишем в виде системы:

$$\begin{cases} 4x - 2y - 3z = 0, \\ y + 3z = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -(3/4)z, \\ y = -3z, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -(3/4)C, \\ y = -3C, \qquad C \in R. \\ z = C, \end{cases}$$

Таким образом, координаты искомого вектора: $\vec{a} = \left(-(3/4)C; -3C; C\right)$.

Далее, так как $\left|\vec{a}\right| = 26$, то $\sqrt{(9/16)C^2 + 9C^2 + C^2} = 26$. Тогда

$$\sqrt{(169/16)C^2} = 26 \Rightarrow \pm(13/4)C = 26 \Rightarrow C = \pm 8.$$

Поскольку по условию $np_{Oz}\vec{a} < 0$, а $np_{Oz}\vec{a} = z$, то $z < 0 \Rightarrow C = -8$. Значит, искомый вектор: $\vec{a} = (6;24;-8)$.

Задания для решения на практическом занятии

1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = 120^\circ$. Зная, что $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 3$, найти: 1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; 2) $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(3\vec{a}-\vec{b})$; 3) $|\vec{a}+\vec{b}|$; 4) $|\vec{a}-\vec{b}|$; 5) $np_{\vec{a}}\vec{b}$.

2. Даны векторы $\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$. Вычислить: 1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; 2) $(2\vec{a}-5\vec{b})\cdot(\vec{a}+3\vec{b})$; 3) $|\vec{a}+\vec{b}|$; 4) $|\vec{a}-\vec{b}|$; 5) $np_{\vec{b}}\vec{a}$; 6) $cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$.

3. Даны вершины четырехугольника *ABCD*: $A(-5;-5;3), B(-4;1;1), C(1;4;0), D(1;-2;2)$. Доказать, что его диагонали взаимно перпендикулярны.

4. Найти координаты вектора $\vec{a}$, коллинеарного и противоположно направленного вектору $\vec{b}(1;-3;2)$ и удовлетворяющего условию $\vec{a}\cdot\vec{b} = 42$.

5. Найти значение параметра *p*, при котором векторы $\vec{a} = p\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + p\vec{k}$ будет перпендикулярны.

6. Даны векторы $\vec{a} = (1;2;-3)$ и $\vec{b} = (3;-1;5)$. Найти координаты вектора $\vec{c}$, перпендикулярного оси *Oz* и удовлетворяющего условиям: $\vec{a}\cdot\vec{c} = -4$ и $\vec{b}\cdot\vec{c} = 9$.

7. Даны вершины треугольника *ABC*: $A(3;2;-3), B(1;-2;1), C(5;1;-1)$. Вычислить: 1) внутренний угол при вершине *C*; 2) угол между его медианами; 3) $np_{\overline{AC}}\overline{AB}$.

Задания для самостоятельного решения

1. Даны векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. Найти: 1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; 2) $(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b})\cdot\vec{c}$; 3) $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$; 4) $np_{\vec{a}}(\vec{b}-\vec{c})$; 5) координаты вектора $\vec{d}$, коллинеарного и сонаправленного вектору $\vec{a}$ и удовлетворяющего условию $\vec{d}\cdot\vec{a} = 1$.

1.1 $\vec{a} = (-2;1;5), \vec{b} = (3;-3;-1), \vec{c} = (4;-1;7), \alpha = 2, \beta = -3$.

1.2 $\vec{a} = (4;-1;-3), \vec{b} = (-8;2;1), \vec{c} = (-5;-3;1), \alpha = 3, \beta = -2$.

1.3 $\vec{a} = (6;2;-3), \vec{b} = (4;-1;7), \vec{c} = (1;1;-5), \alpha = -2, \beta = 5$.

1.4 $\vec{a} = (-5;2;-1), \vec{b} = (-7;-2;4), \vec{c} = (10;-3;2), \alpha = -3, \beta = 2$.

1.5 $\vec{a} = (7;2;-5), \vec{b} = (3;-6;-1), \vec{c} = (-8;1;4), \alpha = 5, \beta = -3$.

1.6 $\vec{a} = (2;-6;-5), \vec{b} = (4;-3;1), \vec{c} = (-9;2;-1), \alpha = -4, \beta = 3$.

1.7 $\vec{a} = (7;-4;2), \vec{b} = (-1;3;5), \vec{c} = (6;-1;2), \alpha = 4, \beta = -3$.

1.8 $\vec{a}=(-1;-3;5),\vec{b}=(-8;-2;1),\vec{c}=(-4;-1;6),\alpha=5,\beta=-2$.

1.9 $\vec{a}=(2;-5;5),\vec{b}=(3;-3;4),\vec{c}=(5;-1;7),\alpha=2,\beta=-5$.

1.10 $\vec{a}=(-3;4;-1),\vec{b}=(2;5;-3),\vec{c}=(1;-1;9),\alpha=-3,\beta=5$.

2. Найти координаты вектора $\vec{a}$, если он ортогонален векторам $\vec{b}$ и $\vec{c}$ $\left(\vec{a}\perp\vec{b},\vec{a}\perp\vec{c}\right)$, известна его длина $\left|\vec{a}\right|$ и дополнительное условие.

2.1 $\vec{b}=\left(-1;1;-\frac{1}{3}\right),\vec{c}=\left(1;1;-\frac{1}{9}\right),\left|\vec{a}\right|=\sqrt{86},np_{Ox}\vec{a}<0$.

2.2 $\vec{b}=(1;1;-0{,}3),\vec{c}=(-1;1;-0{,}1),\left|\vec{a}\right|=\sqrt{105},np_{Oy}\vec{a}>0$.

2.3 $\vec{b}=\left(1;1;-\frac{1}{2}\right),\vec{c}=\left(-1;1;-\frac{1}{6}\right),\left|\vec{a}\right|=\sqrt{41},np_{Oy}\vec{a}<0$.

2.4 $\vec{b}=(-1;1;-1),\vec{c}=\left(1;1;-\frac{1}{3}\right),\left|\vec{a}\right|=\sqrt{14},np_{Oy}\vec{a}<0$.

2.5 $\vec{b}=(-1;-1;-1{,}5),\vec{c}=(1;-1;-0{,}5),\left|\vec{a}\right|=3,np_{Oz}\vec{a}>0$.

2.6 $\vec{b}=(1;-1;0{,}6),\vec{c}=(-1;-1;0{,}2),\left|\vec{a}\right|=\sqrt{30},np_{Ox}\vec{a}<0$.

2.7 $\vec{b}=\left(1;1;-\frac{3}{8}\right),\vec{c}=\left(-1;1;-\frac{1}{8}\right),\left|\vec{a}\right|=\sqrt{69},np_{Oz}\vec{a}<0$.

2.8 $\vec{b}=(-1;1;-3),\vec{c}=(1;1;-1),\left|\vec{a}\right|=\sqrt{6},np_{Ox}\vec{a}>0$.

2.9 $\vec{b}=\left(1;1;-\frac{3}{4}\right),\vec{c}=\left(-1;1;-\frac{1}{4}\right),\left|\vec{a}\right|=\sqrt{19},np_{Oz}\vec{a}<0$.

2.10 $\vec{b}=\left(1;1;-\frac{1}{4}\right),\vec{c}=\left(-1;1;-\frac{1}{12}\right),\left|\vec{a}\right|=\sqrt{149},np_{Oz}\vec{a}>0$.

2.3 Векторное и смешанное произведение векторов

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, приведенных к общему началу, называется ***правой***, если из конца вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ виден против хода часовой стрелки. В противном случае тройка $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ называется ***левой.***

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, обозначаемый $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ или $\vec{c}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ и удовлетворяющий следующим трём условиям:

1) длина вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то есть $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$;

2) вектор $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ перпендикулярен к плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{b}$;

3) упорядоченная тройка векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – правая.

Перечислим основные свойства векторного произведения.

1. При перестановке множителей векторное произведение меняет направление на противоположное, сохраняя модуль:

$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}.$$

2. Векторное произведение равно нулю, если хотя бы один из сомножителей равен нулю, либо сомножители коллинеарны:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}=\vec{0} \text{ или } \vec{b}=\vec{0} \text{ или } \vec{a}\parallel\vec{b}.$$

В частности, $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$.

3. Скалярный множитель можно выносить за знак векторного произведения:

$$(\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \lambda\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) \text{ или } \vec{a}\times(\lambda\vec{b}) = \lambda\cdot(\vec{a}\times\vec{b}).$$

4. Векторное произведение дистрибутивно относительно сложения:

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}.$$

Пусть векторы заданы своими координатами в ортонормированном базисе: $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ и $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$. Тогда их векторное произведение вычисляется по формуле

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}. \tag{2.7}$$

Смешанным произведением векторов $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, обозначаемое $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и определяемое как скалярное произведение вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ и вектора $\vec{c}$:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}.$$

Перечислим основные свойства смешанного произведения.

1 Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке его векторов-сомножителей: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}.$

2. Смешанное произведение меняет знак на противоположный при перестановке любых двух векторов-сомножителей:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}.$$

3. Смешанное произведение не меняется при перемене местами знаков векторного и скалярного умножения: $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.

4. Смешанное произведение трех ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда векторы компланарны:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0 \Leftrightarrow \vec{a},\vec{b},\vec{c} \text{ – компланарны.}$$

Пусть векторы заданы своими координатами в ортонормированном базисе: $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$, $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$ и $\vec{c}=x_3\vec{i}+y_3\vec{j}+z_3\vec{k}$. Тогда их смешанное произведение вычисляется по формуле

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{2.8}$$

Рассмотрим некоторые приложения смешанного произведения.

1. Определение взаимной ориентации векторов в пространстве

Если $\vec{a}\vec{b}\vec{c}>0$, то $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – правая тройка; если же $\vec{a}\vec{b}\vec{c}<0$, то $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – левая тройка.

2. Установление компланарности векторов

Векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – компланарны $\Leftrightarrow$ $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$.

3. Определение объёмов пространственных фигур

Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$, вычисляется по формуле $V_{парал-да}=\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$.

Объем треугольной призмы, построенной на векторах $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$, вычисляется по формуле $V_{призмы}=\frac{1}{2}\cdot\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$.

Объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$, вычисляется по формуле $V_{пирамиды}=\frac{1}{6}\cdot\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$.

Пример 1. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$ и $\vec{b}=2\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}$.

Решение. Воспользуемся формулой $S_{парал}=\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|$. Сначала найдем векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=(1;1;-1).$$

Тогда $S_{парал} = \left|\bar{a} \times \bar{b}\right| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$ кв. ед.

Пример 2. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = -5\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{c} = \vec{i} + \vec{k}$. В случае их некомпланарности определить ориентацию упорядоченной тройки $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Решение. Вычислим смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -5 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 1 - 10 - 5 = -10.$$

Поскольку $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -10 < 0$, то векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ некомпланарны и образуют правую тройку.

Пример 3. Найти объем треугольной пирамиды, вершинами которой являются точки $A(2;0;1), B(2;3;5), C(6;2;3), D(3;7;2)$.

Решение. Найдем координаты трех векторов, выходящих из одной точки, например из точки A: $\overrightarrow{AB} = (0;3;4)$, $\overrightarrow{AC} = (4;2;2)$, $\overrightarrow{AD} = (1;7;1)$.

Далее найдем смешанное произведение этих векторов:

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 112 + 6 - 8 - 12 = 98.$$

Тогда объем пирамиды: $V_{пирамиды} = \frac{1}{6} \cdot \left|\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6} \cdot 98 = \frac{49}{3}$ куб. ед.

Задания для решения на практическом занятии

1. Даны векторы $\vec{a} = (-3;1;-5), \vec{b} = (2;7;-2)$. Найти: а) $\vec{a} \times \vec{b}$; б) $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})$; в) $(3\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b})$.

2. Найти площадь треугольника ABC с вершинами в точках $A(1;-2;-3), B(0;1;-5), C(4;-6;2)$.

3. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k}, \vec{b} = -\vec{i} - 7\vec{j} + \vec{k}$. Найти такой вектор $\vec{c}$, что $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – левая тройка и $\left|\vec{c}\right| = 1$.

4. Даны точки $A(2;-1;0), B(0;3;-5), C(4;-2;3), D(1;1;-2)$. Найти смешанное произведение векторов $\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{BC}\,\overrightarrow{CD}$.

5. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a} = -\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}, \vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$ и $\vec{c} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$.

6. Установить, лежат ли точки $A(2;-1;2), B(1;2;3), C(2;3;0), D(5;0;-6)$ на одной плоскости.

7. Найти объем и длину высоты, опущенной на грань BCD, треугольной пирамиды с вершинами в точках $A(2;-1;1), B(5;5;4), C(3;2;-1), D(4;1;3)$.

8. Найти значение параметра p, при котором смешанное произведение векторов $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + p\vec{k}, \vec{b} = -3\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{c} = p\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$, будет равно -51.

Задания для самостоятельного решения

1. Даны векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. 1) докажите, что $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – базис; 2) найдите $\vec{a} \times \vec{b}$. 3) найдите площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$; 4) определите ориентацию тройки $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$; 5) найдите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$; 6) найдите вектор $\vec{d}$ такой, что $\vec{d} \perp \vec{a}, \vec{d} \perp \vec{b}$ и $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$ – левая тройка.

1.1 $\vec{a} = (-3;4;7), \vec{b} = (0;-8;11), \vec{c} = (13;1;5)$.

1.2 $\vec{a} = (4;0;9), \vec{b} = (10;-7;2), \vec{c} = (-1;1;14)$.

1.3 $\vec{a} = (-8;13;-7), \vec{b} = (-3;1;-7), \vec{c} = (4;-3;3)$.

1.4 $\vec{a} = (-4;17;3), \vec{b} = (-2;0;2), \vec{c} = (12;6;5)$.

1.5 $\vec{a} = (2;-3;14), \vec{b} = (7;0;-8), \vec{c} = (11;13;0)$.

1.6 $\vec{a} = (15;-1;0), \vec{b} = (4;7;-11), \vec{c} = (-1;-2;3)$.

1.7 $\vec{a} = (-4;11;9), \vec{b} = (1;-2;0), \vec{c} = (-3;2;-1)$.

1.8 $\vec{a} = (-1;16;7), \vec{b} = (0;3;-7), \vec{c} = (3;4;-5)$.

1.9 $\vec{a} = (0;-13;2), \vec{b} = (8;5;-7), \vec{c} = (-1;-1;4)$.

1.10 $\vec{a} = (-3;-7;4), \vec{b} = (12;-1;0), \vec{c} = (-2;2;11)$.

2. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$. Найти: а) объем пирамиды; б) площадь указанной грани и длину высоты, опущенную на эту грань.

2.1 $A(4;4;-2), B(-6;12;12), C(2;20;8), D(10;10;22)$; б) ABC.

2.2 $A(-6;4;5), B(5;-7;3), C(4;2;-8), D(2;8;-3)$; б) BCD.

2.3 $A(3;1;2), B(-4;-5;-3), C(6;-1;5), D(5;7;-6)$; б) ACD.

2.4 $A(1;-2;3), B(7;4;9), C(1;-3;4), D(-5;-3;0)$; б) ABC.

2.5 $A(4;-3;6), B(6;-5;3), C(3;4;2), D(-2;3;-5)$; б) BCD.

2.6 $A(-2;-3;4), B(3;4;-4), C(1;3;1), D(-1;4;6)$; б) ACD.

2.7 $A(3;-5;1), B(2;4;-5), C(2;6;-4), D(-4;6;3)$; б) ABC.

2.8 $A(6;-2;0), B(-5;-4;-3), C(7;3;-1), D(3;2;-7)$; б) BCD.

2.9 $A(-3;2;8), B(-3;-2;6), C(3;5;3), D(7;8;-2)$; б) ACD.

2.10 $A(6;-4;-1), B(-4;-2;-3), C(2;5;7), D(6;3;-1)$; б) ABC.

3 ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

3.1 Прямая на плоскости

Введение на плоскости прямоугольной системы координат позволяет определять положение точки плоскости заданием двух чисел – ее координат, а положение линии на плоскости определять с помощью ***уравнения***, то есть равенства, связывающего координаты точек линии. Простейшей из линий является прямая. Различным способам задания прямой соответствуют различные виды ее уравнений. Рассмотрим их.

1. ***Уравнение прямой по точке и нормальному вектору***

Положение прямой на плоскости относительно прямоугольной системы координат однозначно определяется точкой $M_0(x_0; y_0)$, принадлежащей этой прямой, и ненулевым вектором $\vec{n}(A; B)(A^2 + B^2 \neq 0)$, перпендикулярным к прямой. Вектор $\vec{n}$ называется ***нормальным вектором*** прямой. Уравнение такой прямой имеет вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{3.1}$$

2. ***Общее уравнение прямой***

Если в уравнении (3.1) раскрыть скобки и привести подобные, то получим общее уравнение прямой на плоскости:

$$Ax + By + C = 0. \tag{3.2}$$

3. ***Уравнение прямой по точке и направляющему вектору.***

Положение прямой на плоскости определяется также точкой $M_0(x_0; y_0)$ этой прямой и ненулевым вектором $\vec{s} = (m; n)$, параллельным данной прямой, который называется ***направляющим вектором*** этой прямой. Для этого случая можно указать несколько видов уравнений:

а) параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + tm, \\ y = y_0 + tn, \end{cases} t \in (-\infty, +\infty); \tag{3.3}$$

б) каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \tag{3.4}$$

4. ***Уравнение прямой, проходящей через две точки***

Если прямая проходит через точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, то ее уравнение имеет вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{3.5}$$

5. ***Уравнение прямой по точке и угловому коэффициенту***

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0)$ с заданным угловым коэффициентом $k=tg\alpha$, где α – угол наклона прямой к положительному направлению оси абсцисс:

$$y-y_0=k\cdot(x-x_0). \qquad (3.6)$$

Раскрыв скобки и приведя подобные в уравнение (3.6) получим ***уравнение прямой с заданным угловым коэффициентом***:

$$y=kx+b. \qquad (3.7)$$

6. ***Уравнение прямой в отрезках***

Пусть прямая пересекает ось абсцисс в точке $M(a;0)$, а ось ординат – в точке $N(0;b)$ $(a\neq 0, b\neq 0)$. В этом случае числа a и b указывают, какие отрезки отсекает прямая на осях координат, и уравнение такой прямой:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (3.8)$$

Расстояние d ***от точки*** $M_0(x_0;y_0)$ ***до прямой*** l, заданной уравнением $Ax+By+C=0$, вычисляется по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (3.9)$$

Рассмотрим ***взаимное расположение прямых на плоскости***.

Пусть прямые l_1 и l_2 заданы общими уравнениями:

$$l_1: A_1x+B_1y+C_1=0 \text{ и } l_2: A_2x+B_2y+C_2=0.$$

1) $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{C_1}{C_2}$;

2) l_1 совпадает с $l_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$;

3) $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$;

4) l_1 пересекается с l_2 под углом φ, тогда

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}. \qquad (3.10)$$

Пример 1. Зная уравнение двух сторон параллелограмма $l_1: x-3y=0$ и $l_2: 2x+5y+6=0$ и одну из его вершин $A(1;-2)$, составить уравнения двух других сторон.

Решение. Введём обозначение $\overrightarrow{n_1} = (1;-3)$ и $\overrightarrow{n_2} = (2;5)$ – нормальные векторы прямых l_1 и l_2 соответственно. Поскольку координаты векторов $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$ не пропорциональны, то векторы $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$ – не коллинеарны, а прямые не параллельны. Значит, нам даны уравнения двух смежных сторон параллелограмма. Поскольку, координаты точки *A* не удовлетворяют ни одному из уравнений, то вершина *A* не лежит ни на одной из этих прямых (рис. 7).

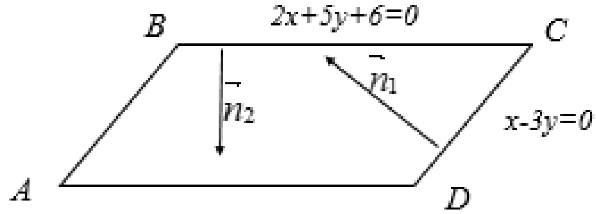


Рисунок 7 – Параллелограмм *ABCD*

Поскольку $AB \parallel l_1$, то $\overrightarrow{n_1}(1;-3) \perp AB$. Воспользовавшись формулой (3.1), составим уравнение прямой *AB* по точке $A(1;-2)$ и нормальному вектору $\overrightarrow{n_1}$:

$$1 \cdot (x-1) - 3 \cdot (y+2) = 0,$$

$$x - 1 - 3y - 6 = 0,$$

$$x - 3y - 7 = 0.$$

Аналогично, $AD \parallel l_2 \Rightarrow \overrightarrow{n_2}(2;5) \perp AD$ и уравнение прямой AD:

$$2 \cdot (x-1) + 5 \cdot (y+2) = 0,$$

$$2x - 2 + 5y + 10 = 0,$$

$$2x + 5y + 8 = 0.$$

Пример 2. Даны вершины треугольника ABC: $A(1;2), B(2;-2), C(6;1)$. Требуется: а) записать уравнение прямой, содержащей сторону *AB*; б) записать уравнение прямой, содержащей высоту *CD*; в) вычислить длину высоты *CD*.

Решение: а) для того, чтобы найти уравнение прямой *AB*, воспользуемся уравнением (3.5) прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-2}{-2-2} \Rightarrow y - 2 = -4x + 4 \Rightarrow 4x + y - 6 = 0.$$

Таким образом, уравнение стороны *AB*: $4x + y - 6 = 0$.

б) запишем уравнение высоты *CD*. Воспользуемся уравнением (3.1) по точке и нормальному вектору. Поскольку *CD* – высота треугольника *ABC*, то $AB \perp CD$. Значит, в качестве нормального вектора прямой *CD* можно взять вектор $\overrightarrow{AB}$, то есть $\vec{n} = \overrightarrow{AB} = (1;-4)$, а в качестве фиксированной точки на прямой берём точку *C*. Тогда уравнение высоты *CD*:

$$1 \cdot (x-6) - 4 \cdot (y-1) = 0 \Rightarrow x - 4y - 2 = 0.$$

Вычислим длину высоты CD. Она равна расстоянию от точки $C(6;1)$ до прямой AB: $4x+y-6=0$. Воспользуемся формулой (3.9):

$$|CD| = \frac{|4\cdot 6+1-6|}{\sqrt{4^2+1^2}} = \frac{19}{\sqrt{17}}.$$

Задания для решения на практическом занятии

1. Записать уравнение прямой, заданной точкой $M_0(x_0;y_0)$ и нормальным вектором $\vec{n}(A;B)$, если: а) $M_0(2;-7), \vec{n}(-5;3)$; б) $M_0(-1;4), \vec{n}(2;9)$.

2. Записать уравнение прямой, заданной точкой $M_0(x_0;y_0)$ и направляющим вектором $\vec{s}(m;n)$, если: а) $M_0(-2;3), \vec{s}(0;4)$; б) $M_0(1;4), \vec{s}(-3;1)$.

3. Записать уравнение прямой, проходящей через точки $M(x_1;y_1)$ и $N(x_2;y_2)$, если: а) $M(4;-3), N(1;2)$; б) $M(-5;0), N(-3;7)$.

4. Дана прямая $x-2y-3=0$. Составить уравнение прямой, проходящей точку $M_0(-1;5)$ и: а) параллельную данной прямой; б) перпендикулярную данной прямой.

5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(3;1)$ и: а) отсекающей равные отрезки на осях координат; б) образующей угол 45° с положительным направлением оси абсцисс; в) параллельную оси Ox; г) перпендикулярную оси Ox.

6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x-y=0, x+4y-2=0$ и перпендикулярную прямой $5x+y+3=0$.

7. Даны вершины треугольника ABC: $A(2;-3), B(1;4), C(-1;-5)$. Требуется: а) записать уравнение прямой BC; б) записать уравнение медианы AM; в) записать уравнение высоты BD; в) найти угол φ между медианой AM и высотой BD; г) записать уравнение прямой, проходящей через вершину A и параллельную стороне BC.

8. Найти расстояние между двумя параллельными прямыми $2x-3y+4=0$ и $4x-6y+1=0$.

Задания для самостоятельного решения

1. Даны вершины треугольника ABC: $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2), C(x_3;y_3)$. Требуется: а) записать уравнение прямой AC; б) записать уравнение медианы BM; в) записать уравнение высоты AD; г) найти угол φ между медианой BM и прямой AC; д) записать уравнение прямой, проходящей через вершину C и параллельную медиане BM; е) записать уравнение прямой, проходящей через точку B и отсекающей равные отрезки на осях координат.

1.1 $A(3;1), B(-1;5), C(1;-2)$.

1.2 $A(3;-1), B(2;4), C(-3;-4)$.

1.3 $A(1;3), B(5;-3), C(-2;-1)$.

1.4 $A(-1;5), B(2;-2), C(-3;-6)$.

1.5 $A(2;7), B(4;-1), C(-2;-3)$.
1.6 $A(-4;-1), B(3;2), C(5;-2)$.
1.7 $A(1;-6), B(5;2), C(-3;1)$.
1.8 $A(4;3), B(-3;1), C(2;-5)$.
1.9 $A(-1;4), B(3;2), C(-5;-2)$.
1.10 $A(6;1), B(-2;3), C(1;-8)$.

3.2 Плоскость в пространстве

Плоскость в пространстве относительно выбранной прямоугольной системы координат можно задать разными способами. Каждому из них соответствует определённый вид ее уравнения.

1. *Уравнение плоскости по точке и нормальному вектору*

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, и перпендикулярную ненулевому вектору $\vec{n}(A; B; C)$ $(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$, называемому ***нормальным вектором плоскости***, имеет вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{3.11}$$

2. *Общее уравнение плоскости*

Если в уравнении (3.11) раскрыть скобки и привести подобные, то получим общее уравнение плоскости в пространстве:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{3.12}$$

3. *Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки* $M_1(x_1; y_1; z_1), M_2(x_2; y_2; z_2), M_3(x_3; y_3; z_3)$, не принадлежащие одной прямой:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.13}$$

4. Уравнение плоскости в отрезках

Если плоскость отсекает на осях Ox, Oy и Oz соответственно отрезки a, b и c, то есть проходит через три точки $M(a;0;0), N(0;b;0), P(0;0;c)$, то ее уравнение:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \tag{3.14}$$

Рассмотрим ***взаимное расположение двух плоскостей в пространстве***.

Пусть плоскости P_1 и P_2 заданы уравнениями в общем виде:

$$P_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ и } P_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

1) $P_1 \parallel P_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2}$.

2) P_1 совпадает с $P_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$.

3) $P_1 \perp P_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

4) P_1 пересекается с P_2 под углом φ. Угол между плоскостями равен углу между их нормальными векторами. Поэтому

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \tag{3.15}$$

***Расстояние** d **от точки** $M_0(x_0;y_0;z_0)$ **до плоскости** P*, заданной уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, вычисляется по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{3.16}$$

Пример 1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2;5;4), B(3;6;-1), C(0;5;-3)$.

Решение. Воспользуемся уравнением (3.13):

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-5 & z-4 \\ 3-2 & 6-5 & -1-4 \\ 0-2 & 5-5 & -3-4 \end{vmatrix}=0.$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-5 & z-4 \\ 1 & 1 & -5 \\ -2 & 0 & -7 \end{vmatrix}=-7(x-2)+17(y-5)+2(z-4)=-7x+17y+2z-79.$$

Таким образом, уравнение искомой плоскости: $-7x+17y+2z-79=0$.

Пример 2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(4;-3;5)$ параллельно двум векторам: $\vec{a}(0;1;2)$ и $\vec{b}(-1;0;1)$.

Решение. Поскольку векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллельны плоскости, то вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ будет перпендикулярен этой плоскости, значит, его и можно взять в качестве нормального вектора плоскости:

$$\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}=(1;-2;1).$$

Далее воспользуемся уравнением (3.11):

$$1\cdot(x-4)-2\cdot(y+3)+1\cdot(z-5)=0.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные в левой части равенства, окончательно получим уравнение плоскости: $x-2y+z-15=0$.

Пример 3. Найти расстояние между двумя параллельными плоскостями: $2x - y - 4z - 1 = 0$ и $2x - y - 4z + 7 = 0$.

Решение. Расстояние между двумя параллельными плоскостями определяется как длина перпендикуляра, опущенного из любой точки одной плоскости на другую плоскость.

Найдем координаты любой точки, лежащей на первой плоскости. Для этого возьмем произвольные значения двух переменных, подставим в первое уравнение, и определим значение третьей переменной. Пусть x=0 и z=0: $2 \cdot 0 - y - 4 \cdot 0 - 1 = 0 \Rightarrow y = -1$. Тогда координаты точки: $M(0;-1;0)$.

Осталось воспользоваться формулой (3.16):

$$d = \frac{|2 \cdot 0 - (-1) - 4 \cdot 0 + 7|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-4)^2}} = \frac{8}{\sqrt{21}}.$$

Задания для решения на практическом занятии

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 параллельно плоскости P, если: а) $M_0(-2;1;4), P: x - 5y + 3z - 8 = 0$; б) $M_0(7;-1;0), P: 2x + y - 6z + 1 = 0$.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через три данные точки: а) $M_1(-2;0;1), M_2(3;2;-1), M_3(0;-5;4)$; б) $M_1(4;-1;2), M_2(1;0;-3), M_3(1;1;5)$.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-1;4;2)$ и отсекающей на оси Oy отрезок, вдвое больший, чем на осях Ox и Oz.

4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3;4;-5)$ параллельно двум векторам: $\vec{a}(3;1;-1)$ и $\vec{b}(1;-2;1)$.

5. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;-3;5)$ перпендикулярно к плоскостям $P_1: 2x + y - 2z - 8 = 0$ и $P_2: x - y + 4z + 6 = 0$.

6. Найти расстояние между двумя параллельными плоскостями $P_1: 2x - 2y - z - 3 = 0$ и $P_2: 2x - 2y - z + 12 = 0$.

7. Составить уравнение плоскости, проходящей: а) через точку $M(-3;4;5)$ и ось Ox; б) через точку $M(1;-6;2)$ и параллельную плоскости xOz.

8. Определить двугранный угол, образованный плоскостями $P_1: x + 2y + 2z - 1 = 0$ и $P_2: 9x - 2y - z + 8 = 0$.

Задания для самостоятельного решения

1. Даны четыре точки $A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2), C(x_3; y_3; z_3)$ и $D(x_4; y_4; z_4)$. Требуется: а) составить уравнение плоскости, проходящей через точки A, B и C; б) составить уравнение плоскости, проходящей через точку D параллельно плоскости ABC; в) найти расстояние от точки D до плоскости ABC; г) составить уравнение плоскости, проходящей через точку D и отсекающей равные отрезки

на осях координат; д) найти двугранный угол между плоскостью ABC и плоскостью из пункта г).

1.1 $A(1;-1;3), B(6;5;8), C(3;5;8), D(8;4;1)$.

1.2 $A(0;4;5), B(3;-2;1), C(4;5;6), D(3;3;2)$.

1.3 $A(5;4;2), B(2;-5;8), C(1;4;9), D(2;1;6)$.

1.4 $A(1;2;5), B(2;-3;9), C(3;3;6), D(2;1;7)$.

1.5 $A(6;3;1), B(2;-1;7), C(3;2;8), D(2;-3;7)$.

1.6 $A(1;2;0), B(4;2;10), C(2;-3;5), D(3;5;7)$.

1.7 $A(1;-1;4), B(5;5;4), C(5;8;-1), D(3;5;1)$.

1.8 $A(2;-1;5), B(0;7;1), C(3;-9;8), D(1;6;3)$.

1.9 $A(5;8;3), B(-1;0;2), C(1;2;-2), D(3;5;4)$.

1.10 $A(-1;0;1), B(1;7;3), C(3;-1;2), D(8;5;8)$.

3.3 Прямая в пространстве

Прямую в пространстве относительно выбранной прямоугольной системы координат можно задать разными способами. Каждому из них соответствует определённый вид ее уравнения.

1. ***Общие уравнения прямой***

Прямую в пространстве можно представить, как пересечение двух непараллельных плоскостей $P_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $P_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Поэтому аналитически ее можно задать системой двух линейных уравнений вида:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \qquad (3.17)$$

где векторы $\overrightarrow{n_1}(A_1;B_1;C_1)$ и $\overrightarrow{n_2}(A_2;B_2;C_2)$ – не коллинеарные.

2. ***Уравнения прямой по точке и направляющему вектору***

Положение прямой в пространстве определяется однозначно, если задана точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$, принадлежащая этой прямой, и ненулевой вектор $\vec{s} = (m;n;p)$, параллельный данной прямой (***направляющий вектор*** прямой). Для этого случая можно указать следующие виды уравнений:

а) параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + tm, \\ y = y_0 + tn, t \in (-\infty, +\infty); \\ z = z_0 + tp, \end{cases} \qquad (3.18)$$

б) канонические уравнения прямой:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \tag{3.19}$$

3. ***Уравнения прямой, проходящей через две точки*** $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{3.20}$$

Приведение общих уравнений прямой к каноническому виду

Для того чтобы привести уравнения (3.16) к каноническому виду (3.19), нужно определить координаты x_0, y_0, z_0 какой либо точки M_0, лежащей на этой прямой, и координаты m, n, p направляющего вектора $\vec{s}$ этой прямой.

Чтобы определить точку M_0, нужно в систему (3.16) подставить произвольное значение одной из переменных и, решив ее, найти соответствующие значения двух других переменных.

В качестве направляющего вектора $\vec{s}$ можно взять вектор, равный векторному произведению векторов $\overrightarrow{n_1}(A_1;B_1;C_1)$ и $\overrightarrow{n_2}(A_2;B_2;C_2)$, то есть

$$\vec{s}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\end{vmatrix}.$$

Рассмотрим ***взаимное расположение прямых в пространстве***.

Пусть прямые l_1 и l_2 заданы каноническими уравнениями:

$$l_1:\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \text{ и } l_2:\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

1) $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{s_1}\parallel\overrightarrow{s_2},\\ M_1(x_1;y_1;z_1)\notin l_2,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2},\\ M_1(x_1;y_1;z_1)\notin l_2.\end{cases}$

2) l_1 совпадает с l_2 $\Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{s_1}\parallel\overrightarrow{s_2},\\ M_1(x_1;y_1;z_1)\in l_2,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2},\\ M_1(x_1;y_1;z_1)\in l_2.\end{cases}$

3) l_1 пересекается с l_2 $\Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{s_1}\overrightarrow{s_2}\overrightarrow{M_1M_2}=0,\\ \overrightarrow{s_1}\neq\lambda\overrightarrow{s_2}.\end{cases}$

4) l_1 скрещивается с $l_2 \Leftrightarrow \vec{s_1}\vec{s_2}\overrightarrow{M_1M_2} \neq 0$.

Угол между двумя прямыми

Под углом φ между прямыми в пространстве понимают угол между их направляющими векторами. Поэтому, даже если прямые в пространстве скрещиваются, угол между ними все равно можно найти по формуле

$$cos\varphi = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \tag{3.21}$$

Рассмотрим ***взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве***.

Пусть прямая l и плоскость P в пространстве заданы уравнениями:

$$l: \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \text{ и } P: Ax + By + Cz + D = 0.$$

Возможны следующие случаи их взаимного расположения.

1) $l \in P \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{s} \perp \vec{n}, \\ M_0(x_0, y_0, z_0) \in P, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mA + nB + pC = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \end{cases}$

2) $l \parallel P \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{s} \perp \vec{n}, \\ M_0(x_0, y_0, z_0) \notin P, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mA + nB + pC = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0. \end{cases}$

3) $l \perp P \Leftrightarrow \vec{s} \parallel \vec{n} \Leftrightarrow \frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C}.$

Углом φ между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее ортогональной проекцией на плоскость; величина угла φ определяется по формуле:

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \tag{3.22}$$

Пример 1. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(-7;2;9)$ и параллельную прямой $\frac{x-5}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{1}$.

Решение. Поскольку искомая прямая параллельна заданной прямой, то их направляющие векторы коллинеарны. Значит, в качестве направляющего вектора искомой прямой можно взять направляющий вектор заданной прямой, то есть $\vec{s} = (4;-3;1)$.

Воспользовавшись равенством (3.19), получим ответ:

$$\frac{x+7}{4}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-9}{1}.$$

Пример 2. Найти канонические уравнения прямой

$$\begin{cases} x-y+5z+1=0, \\ 2x+y-z+5=0. \end{cases}$$

Решение. Определим координаты какой-либо точки прямой. Для этого, положим, например $z=0$ и, подставив в систему, найдем значения двух других координат:

$$\begin{cases} x-y+1=0, \\ 2x+y+5=0, \\ z=0. \end{cases}$$

Решив систему, получим: $x=-2, y=-1, z=0$ или $M_0(-2;-1;0)$.

Далее найдём направляющий вектор $\vec{s}$. Имеем $\overrightarrow{n_1}=(1;-1;5)$, $\overrightarrow{n_2}=(2;1;-1)$; тогда:

$$\vec{s}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-4\vec{i}+11\vec{j}+3\vec{k}.$$

Отсюда канонические уравнения прямой запишутся в виде

$$\frac{x+2}{-4}=\frac{y+1}{11}=\frac{z}{3}.$$

Пример 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(0;2;1)$ и прямую $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-2}{-1}$.

Решение. Для нахождения уравнения плоскости найдем координаты двух точек, лежащих на прямой. Для этого перепишем канонические уравнения прямой в параметрическом виде:

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{-1}\Rightarrow\begin{cases} \dfrac{x+1}{2}=t, \\ \dfrac{y}{3}=t, \\ \dfrac{z-2}{-1}=t, \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x+1=2t, \\ y=3t, \\ z-2=-t, \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=-1+2t, \\ y=3t, \\ z=2-t. \end{cases}$$

При t=0 получим точку $B(-1;0;2)$, а при t=1 – $C(1;3;1)$.

Таким образом, имеем три точки A, B и C, лежащие на плоскости. Воспользуемся равенством (3.13) и получим:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-2 & z-1 \\ -1-0 & 0-2 & 2-1 \\ 1-0 & 3-2 & 1-1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-2 & z-1 \\ -1-0 & 0-2 & 2-1 \\ 1-0 & 3-2 & 1-1 \end{vmatrix} = -x + y - 2 + z - 1 = -x + y + z - 3.$$

Искомое уравнение: $-x + y + z - 3 = 0$.

Пример 4. Найти угол между прямой, проходящей через точки $A(5;1;-4)$ и $B(6;1;-3)$, и плоскостью $2x - 2y + z - 7 = 0$.

Решение. В качестве направляющего вектора прямой можно взять вектор $\vec{s} = \overrightarrow{AB} = (1;0;1)$. Так как нормальный вектор данной плоскости $\vec{n} = (2;-2;1)$, то по формуле (3.22), получим

$$\sin\varphi = \frac{|2 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 1|}{\sqrt{4+4+1} \cdot \sqrt{1+0+1}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Задания для решения на практическом занятии

1. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(2;-3;5)$ и параллельную: а) вектору $\vec{s}(1;7;-4)$; б) прямой $\frac{x}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{-1}$; в) оси Ox; г) оси Oy.

2. Даны две точки: $M_1(2;3;1)$ и $M_2(-5;-4;0)$. Требуется: а) составить канонические уравнения прямой, проходящей через эти точки; б) преобразовать полученные уравнения к параметрическому виду; в) найти координаты еще одной любой точки, принадлежащей этой прямой.

3. Найти канонические уравнения прямой

$$\begin{cases} x + y - 3z + 8 = 0, \\ 2x - y - 7z - 9 = 0. \end{cases}$$

4. Доказать параллельность прямых

$$\frac{x+4}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-6} \text{ и } \begin{cases} 4x - y - 5z + 1 = 0, \\ 2x + y - 4z - 6 = 0. \end{cases}$$

5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(5;2;-1)$ и перпендикулярную плоскости $3x - y - 7z + 9 = 0$.

6. Показать, что прямая $\frac{x-13}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{3}$ лежит в плоскости $x + 2y - 4z + 1 = 0$.

7. Найти координаты точки, симметричной точке $M(2;7;1)$ относительно плоскости $x - 4y + z + 7 = 0$.

Задания для самостоятельного решения

1. Даны четыре точки $A(x_1;y_1;z_1), B(x_2;y_2;z_2), C(x_3;y_3;z_3)$ и $D(x_3;y_3;z_3)$. Требуется найти: а) уравнение прямой *AB*; б) уравнение прямой, проходящей через точку *C* и параллельную *AB*; в) уравнение плоскости, проходящей через точку *D* и перпендикулярную прямой *AB*; г) точку пересечения прямой *AB* с плоскостью из пункта в); д) величину угла между прямыми *AB* и *AC*.

1.1 $A(4;4;-2), B(-6;12;12), C(2;20;8), D(10;10;22)$.

1.2 $A(-6;4;5), B(5;-7;3), C(4;2;-8), D(2;8;-3)$.

1.3 $A(3;1;2), B(-4;-5;-3), C(6;-1;5), D(5;7;-6)$.

1.4 $A(1;-2;3), B(7;4;9), C(1;-3;4), D(-5;-3;0)$.

1.5 $A(4;-3;6), B(6;-5;3), C(3;4;2), D(-2;3;-5)$.

1.6 $A(-2;-3;4), B(3;4;-4), C(1;3;1), D(-1;4;6)$.

1.7 $A(3;-5;1), B(2;4;-5), C(2;6;-4), D(-4;6;3)$.

1.8 $A(6;-2;0), B(-5;-4;-3), C(7;3;-1), D(3;2;-7)$.

1.9 $A(-3;2;8), B(-3;-2;6), C(3;5;3), D(7;8;-2)$.

1.10 $A(6;-4;-1), B(-4;-2;-3), C(2;5;7), D(6;3;-1)$.

Литература

1. Гусак, А. А. Высшая математика : учебник для вузов / А. А. Гусак. – Минск : ТетраСистемс, 2009. – 544 с.
2. Минюк, С. А. Высшая математика для инженеров : учебное пособие для студентов инженерно-технических спец. вузов : в 2-х т. Т. 1 / С. А. Минюк [и др.] ; под общ. ред. Н. А. Микулика. – Минск : Элайда, 2004. – 464 с.
3. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике / Д. Т. Письменный. – Москва : Айрис-пресс, 2004. – 608 с.
4. Плющ, О. Б. Высшая математика : курс лекций. Ч. 1 : Элементарная математика. Аналитическая геометрия. Линейная алгебра / О. Б. Плющ. – 3-е изд., стер. – Минск : Академия управления при Президенте Республики Беларусь, 2005. – 168 с.
5. Рябушко, А. П. Индивидуальные задания по высшей математике : учебное пособие для студентов технических спец. вузов : в 4 ч. Ч. 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной / А. П. Рябушко [и др.] ; под ред. А. П. Рябушко. – 5-е изд. – Минск : Вышэйшая школа, 2013. – 304 с.
6. Сухая, Т. А. Задачи по высшей математике : учебное пособие : в 2-х ч. Ч. 1. / Т. А. Сухая, В. Ф. Бубнов. – Минск : Вышэйшая школа, 1993. – 416 с.
7. Цегельник, В. В. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Введение в анализ и дифференциальное исчисление функции одной переменной : пособие по учебной дисциплине «Математика» / В. В. Цегельник [и др.]. – Минск : БГУИР, 2017. – 198 с.

Учебное издание

Высшая математика (Математика). Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия

Практикум

Составители :

Никонова Татьяна Викторовна
Рубаник Оксана Евгеньевна

Редактор *А.В. Пухальская*
Корректор *А.В. Пухальская*
Компьютерная верстка *О.Е. Рубаник*

Подписано к печати 30.08.2023. Формат 60x90 $^1/_{16}$. Усл. печ. листов 3,4.
Уч.-изд. листов 4,4. Тираж 65 экз. Заказ № 216.

Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет»
210038, г. Витебск, Московский пр., 72.
Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Витебский государственный технологический университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/172 от 12 февраля 2014 г.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 3/1497 от 30 мая 2017 г.