

Ю.А. Завацкий, Ю.В. Полозков, Д.Н. Свирский

## Математическое моделирование процесса оцифровки пространственных объектов

Проектное моделирование продукции, ее внешнего вида выступает одним из определяющих факторов достижения требуемой эффективности производства. Компьютерные модели пространственных объектов сложной конфигурации часто комбинаторно синтезируются из исходных, рекурсивно преобразованных, фрагментов геометрических образов из базы данных. В основу формирования и расширения графической базы данных положены информационный анализ и описание формы реальных объектов методом их оцифровки.

Процесс оцифровки включает съемку видеокамерой, установленной наклонно к горизонтальной плоскости объекта, на который проецируются световые полосы слайда, вставленного в расположенный горизонтально проектор. Изображение в видеокамере строится прямолинейными лучами, направленными от точек пространственного объекта к центру проекции как следы этих лучей на плоскости изображения. Трансформированием двумерных параметров видеоизображения объекта в пространственные формируются объемные цифровые модели. Объемная цифровая модель представляется массивом числовых параметров, отражающих пространственную ориентацию дискретных элементов анализируемого объекта в выбранной системе координат, упорядоченных и оптимизированных по критерию минимума количества дискретных элементов при наперед заданной точности [1].

Для автоматизации процесса оцифровки и создания его программного обеспечения необходимо построить математическую модель зависимости между положением дискретных элементов анализируемого объекта и положением их центральных проекций. При этом управляемыми являются параметры внешнего и внутреннего ориентирования изображения.

Введем пространственную систему координат с началом в некоторой точке  $A$ , обозначим ее базис через  $E$  (рис. 1).

Положение  $i$ -й точки  $M$  поверхности в пространственной системе координат  $AXYZ$  функционально зависит от положения ее изображения в плоской системе координат и элементов внутреннего и внешнего ориентирования:

$$\bar{R}_{ij} = f(x_{ij}''', y_{ij}''', \mu, \omega, R, \varphi, \eta, \nu, x_S, y_S, z_S), \quad (1)$$

где  $\bar{R}_{ij} = (X_{ij}; Y_{ij}; Z_{ij})^T$  – вектор, определяющий положение некоторой  $i$ -той точки  $j$ -го уровня поверхности объекта в пространственной системе координат  $AXYZ$ ;  $x_{ij}'''$ ,  $y_{ij}'''$  – координаты  $i$ -той точки  $j$ -го уровня поверхности объекта в системе координат изображения;  $\mu$ ,  $\omega$ ,  $R$ , – параметры, определяющие пространственное положение передней узловой точки регистрирующей камеры;  $\varphi$ ,  $\eta$ ,  $\nu$  – параметры углового ориентирования системы координат изображения относительно системы координат объекта (углы Эйлера);  $x_S$ ,  $y_S$ ,  $z_S$  – координаты главной точки изображения в системе  $o'x'y'$ .

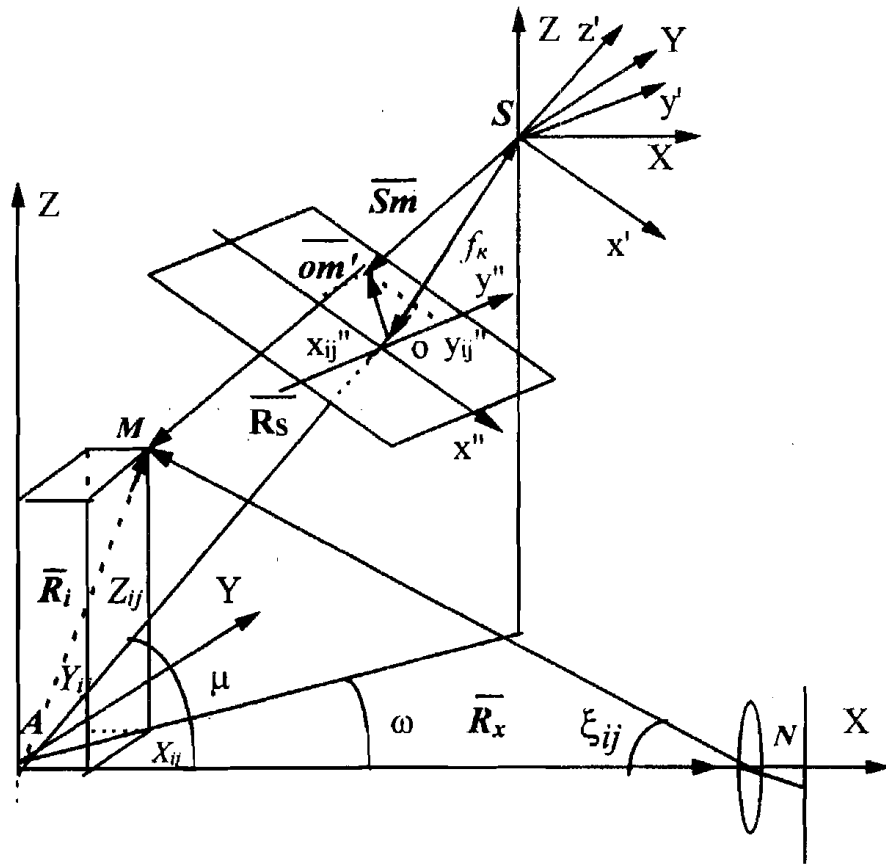


Рис. 1. Схема для определения пространственных координат точек поверхности объекта по координатам их изображений

Ориентация передней узловой точки регистрирующей камеры определяется вектором  $\bar{R}_s$ , который направлен перпендикулярно к плоскости изображения:

$$\bar{R}_s = \begin{pmatrix} X_s \\ Y_s \\ Z_s \end{pmatrix} = A_1(\mu)A_2(\omega)\bar{R}_x = \begin{pmatrix} \cos \mu & 0 & \sin \mu \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \mu & 0 & \cos \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где  $\mu$  – угол наклона камеры;  $\omega$  – угол линии направления съемки;  $A_1, A_2$  – матрицы ориентирования;  $\bar{R}_x = (R; 0; 0)^T$  – вектор, направленный вдоль оси X, равный по модулю расстоянию от начала пространственной системы координат до передней узловой точки регистрирующей камеры;  $R$  – модуль вектора  $\bar{R}_s$ .

Решим задачу нахождения пространственных  $(X_{ij}; Y_{ij}; Z_{ij})$  координат  $i$ -тых точек  $j$ -го уровня поверхности объекта в векторной форме. Заметим, что базисные векторы системы координат SXYZ совпадают с векторами базиса AXYZ, т.е. система координат SXYZ имеет тот же базис E. Введем в рассмотрение систему координат Sx'y'z' с базисом E', получающуюся из системы координат с помощью ориентации камеры. Поэтому в базисе E любой вектор  $\overrightarrow{om'}$  базиса E' с матрицами ориентирования  $A_3(\varphi), A_4(\eta), A_5(\nu)$  имеет вид:

$$\overrightarrow{om'} = A_3(\varphi)A_4(\eta)A_5(\nu)\overrightarrow{om''}, \quad (3)$$

Введем систему координат изображения  $ox''y''z''$  – базис E''. Так как луч цен-

трального проецирования перпендикулярен плоскости изображения, то базисы  $E''$  и  $E'$  совпадают.

Решение поставленной задачи состоит в выражении координат  $\overline{AM}$  (базис  $E$ ) через координаты  $\overline{om}$  в  $E''$ .

В  $E''$  координаты  $\overline{om}$  выражаются следующим образом:  $\overline{om} = (x_{ij}''; y_{ij}''; 0)^T$ . При этом  $\overline{So} = (0; 0; -f_k)^T$  в  $E'$ , тогда  $\overline{Sm} = \overline{So} + \overline{om}$ , откуда  $\overline{Sm} = (x_{ij}''; y_{ij}''; -f_k)^T$  в  $E'$ , где  $f_k$  – фокусное расстояние камеры.

Вектор  $\overline{SM}$  в  $E$  вычисляется исходя из того, что точка  $M$  имеет координаты  $M(X_{ij}; Y_{ij}; Z_{ij})$  в  $E$ , а координаты точки  $S$  совпадают с координатами вектора  $\overline{AS} = \overline{R_S}$ . Таким образом  $\overline{SM} = (X_{ij} - X_S; Y_{ij} - Y_S; Z_{ij} - Z_S)$  в  $E$ , вектор же  $\overline{Sm}$  в  $E$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \overline{Sm} &= A_3(\varphi)A_4(\eta)A_5(\nu)\overline{Sm}' = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\eta & 0 & \sin\eta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\eta & 0 & \cos\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\nu & \sin\nu & 0 \\ \sin\nu & \cos\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{ij}'' \\ y_{ij}'' \\ -f_k \end{pmatrix} = (x_{ij}; y_{ij}; z_{ij})^T. \end{aligned} \quad (4)$$

Учитывая коллинеарность  $\overline{SM}$  и  $\overline{Sm}$  имеет место равенство:

$$\overline{SM} = \kappa \overline{Sm}, \quad (5)$$

где  $\kappa$  – коэффициент масштабирования. Тогда искомый вектор:

$$\overline{AM} = \overline{AS} + \overline{SM} = \overline{R_S} + \kappa \overline{Sm} = A_1(\mu)A_2(\omega)\overline{R_x} + \kappa A_3(\varphi)A_4(\eta)A_5(\nu)\overline{Sm} = \begin{pmatrix} X_{ij} \\ Y_{ij} \\ Z_{ij} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Коэффициент масштабирования  $\kappa$  можно найти из (5), т.е. из условия пропорциональности их координат, например:

$$\kappa = \frac{Z_{ij} - Z_S}{z_{ij}}, \quad (7)$$

где  $z_{ij}$  вычисляется по формуле (4).

Связь между координатами  $X_{ij}$  и  $Z_{ij}$  можно установить, анализируя процесс получения изображения (рис. 2).

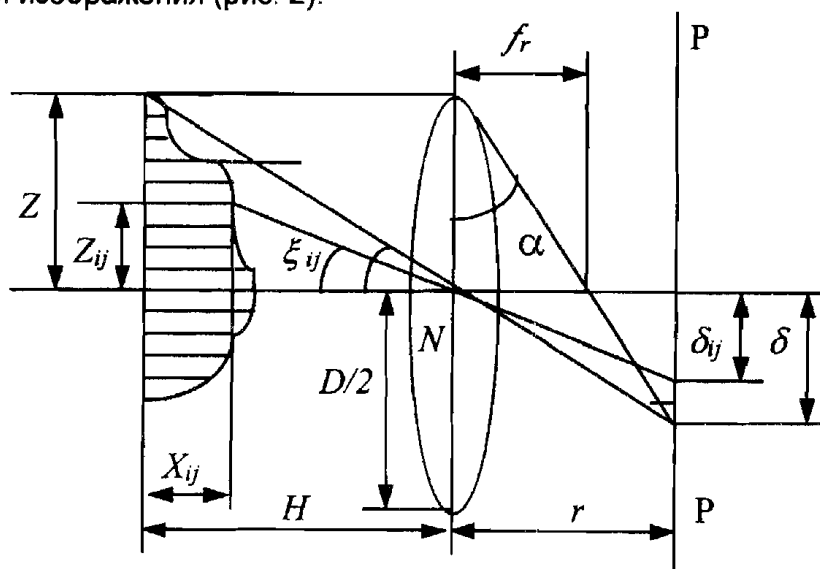


Рис.2. Схема для расчета параметров проецирования координатной сетки

В процессе видеосъемки используется слайд с изображением координатной сетки. При ее проецировании в пространстве и на поверхности исследуемого объекта высвечиваются световые полосы, положение которых, при известных параметрах изображения сетки на слайде, может быть определено по нижеприведенной методике:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2f_r}{D}, \quad (8)$$

где  $f_r$  – фокусное расстояние проектора;  $D$  – диаметр входного зрачка объектива.

Расстояние  $r$  от задней главной плоскости объектива до плоскости изображения

$$r = f_r + \delta \operatorname{tg} \alpha = f_r \left( 1 + \frac{2\delta}{D} \right), \quad (9)$$

где  $\delta$  – удаление крайней линии сетки от главной оптической оси.

Тангенс угла направления центрального луча находится из зависимости:

$$\operatorname{tg} \xi_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{r} = \frac{\delta_{ij}}{f_r \left( 1 + \frac{2\delta}{D} \right)}, \quad (10)$$

где  $\delta_j$  – удаление  $j$ -той линии сетки слайда от главной оптической оси.

Координата  $Z_{ij}$  или удаление  $j$ -той световой плоскости от главной оптической оси находится по следующей зависимости:

$$Z_{ij} = (H - X_{ij}) \operatorname{tg} \xi_{ij} = \frac{\delta_{ij}(H - X_{ij})}{f_r \left( 1 + \frac{2\delta}{D} \right)}, \quad (11)$$

Диаметр входного зрачка объектива  $D$  можно определить по следующей зависимости:  $D = f_r / \pi$ , где  $1/\pi^2$  – светосила объектива или квадрат относительного отверстия.

Параметры  $f_r$ ,  $D$  или  $1/\pi^2$ , а также  $H$  и  $\delta$  представляются как исходные данные.

Если расстояние  $H$  от объекта съемки много больше фокусного расстояния  $f_r$ , то в известной формуле:

$$\frac{1}{H} + \frac{1}{r} = \frac{1}{f_r} \quad (12)$$

величина  $1/H$  мала и на практике ею можно пренебречь. Следовательно,  $r \approx f_r$ , т.е. плоскость изображения совпадает с плоскостью объектива проектора. Вследствие этого обстоятельства методика расчетов значительно упрощается:

$$\operatorname{tg} \xi_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{f_r} \quad (13),$$

$$Z_{ij} = (H - X_{ij}) \operatorname{tg} \xi_{ij} = \frac{\delta_{ij}(H - X_{ij})}{f_r}. \quad (14)$$

Подставляя найденное соотношение в (6) и (7), получаем формулы для расчета пространственных координат точек поверхности нерегулярного объекта в базисе  $E$ :

$$X_{ij} = \frac{X_s z_{ij} + x_{ij}(H \operatorname{tg} \xi_{ij} - Z_s)}{z_{ij} + x_{ij} \operatorname{tg} \xi_{ij}}, \quad (15)$$

$$Z_{ij} = (H - X_{ij}) \operatorname{tg} \xi_{ij} = \frac{\delta_{ij}(H - X_{ij})}{f_r}, \quad (16)$$

$$Y_{ij} = Y_S + \frac{Z_{ij} - Z_S}{z_{ij}} y_{ij}. \quad (17)$$

Программное обеспечение оцифровки реализуется в среде пакета компьютерной алгебры Maple V на базе персонального компьютера.

Предлагаемая математическая модель процесса оцифровки поверхностей пространственно сложных объектов может быть практически использована при реализации компьютерных технологий в компактных системах рекурсивного формообразования нерегулярных объектов [2].

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Полозков Ю.В., Ракович А.Г., Свирский Д.Н.** Практические аспекты обработки изображений в компактных системах трансформационного копирования нерегулярных трехмерных объектов // Материалы Первой Международной конференции (22-25 сентября 1998 г.). Мн.: Институт технической кибернетики НАН Беларуси, 1998. С. 86-95.
2. **Полозков Ю.В., Свирский Д.Н.** Концепция компактной системы рекурсивного копирования скульптурных поверхностей // Сб. научных трудов "Современные энергоресурсосберегающие и экологобезопасные технологии в машиностроении и легкой промышленности". Витебск: ВГТУ, 1889. С. 233-237.

### S U M M A R Y

*The method of complicated 3D-object figuring by means of videosurvey is considered. The mathematical model of 2D- images of object into figure 3D- model transforming is suggested. The 3D-model serves as base of software for computer geometrical modeling in the compact systems of complicated 3D-object creating.*