

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Учреждение образования
«Витебский государственный технологический университет»

**ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА.
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА. МНОЖЕСТВА, ГРАФЫ
И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ**

Практикум

для студентов первого курса специальностей
1-28 01 01 «Экономика электронного бизнеса», 1-40 05 01-01 «Информационные
системы и технологии (в проектировании и производстве)», 1-40 05 01-10
«Информационные системы и технологии (в бизнес-менеджменте)»
(6-05-0611-04 «Электронная экономика», 6-05-0611-01 «Информационные
системы и технологии»)

Витебск
2023

УДК 510:519.1(075)

Составители:

А. В. Коваленко

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом УО «ВГТУ», протокол № 8 от 28.04.2023.

Дискретная математика. Математическая логика. Множества, графы и алгебраические системы : практикум / сост. А. В. Коваленко. – Витебск : УО «ВГТУ», 2023. – 63 с.

Практикум содержит основные теоретические сведения, задания к практическим занятиям, примеры для самостоятельного выполнения заданий, вопросы к экзамену по четырём разделам курса «Дискретная математика» для студентов специальностей 1-28 01 01, 1-40 05 01-01, 1-40 05 01-10 (6-05-0611-04, 6-05-0611-01): математическая логика, теория множеств, теория графов и алгебраических систем. Данное издание предназначено для проведения практических занятий у студентов первого курса факультетов «Информационные технологии и робототехника» и «Экономика и бизнес-управление», а также может быть использовано в ходе изучения указанных тем студентами заочной и дистанционной форм обучения.

УДК 510:519.1 (075)

© УО «ВГТУ», 2023

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
Перечень вопросов учебной программы по курсу «Дискретная математика» для специальностей 1-28 01 01, 1-40 05 01-01, 1-40 05 01-10 (6-05-0611-04, 6-05-0611-01) (первый курс, второй семестр)	5
Практикум по решению задач.....	7
1 Высказывания.....	7
2 Формулы логики высказываний.....	10
3 Булевы функции.....	16
4 Множества	21
5 Бинарные отношения. Графы.....	28
6 Дискретное сетевое планирование.....	38
7 Функциональные отношения	48
8 Алгебраические системы	53
Литература	61

ВВЕДЕНИЕ

Учебный практикум составлен на основе практических занятий, которые автор проводил на протяжении двадцати лет работы преподавания дисциплины «Дискретная математика» в Витебском государственном технологическом университете. Приведённый материал проверен на нескольких поколениях студентов и содержит необходимые сведения для будущих выпускников. Большинство рассматриваемых задач носят практическую направленность и имеют тесную связь с дисциплинами, которые будут изучать студенты в следующих семестрах.

Настоящие учебно-методические материалы предназначены для студентов факультетов «Информационные технологии и робототехника» и «Экономика и бизнес-управление», которые изучают курс «Дискретная математика». В работе приведены теоретические вопросы для сдачи зачёта и проведения практических занятий по указанному выше курсу. Практикум написан в соответствии с учебной программой дисциплины «Дискретная математика».

В работе выделяются восемь разделов. Каждый раздел представляет собой методический материал для проведения преподавателем практических занятий и выполнения контролируемой самостоятельной работы студентами. В начале каждого практического занятия приведён краткий теоретический материал (определения, теоремы, формулы), который необходим студенту для решения задач этой темы. В то же время этих сведений недостаточно для сдачи зачёта по предмету. Прежде чем приступать к решению задач практического занятия или выполнения домашнего задания, студенту необходимо изучить теоретический курс лекционного материала или обратиться к академическим изданиям для более детального изучения разделов курса, которые его интересуют. Наименование занятий, а также их структура построены в соответствии с учебной программой дисциплины «Дискретная математика» для студентов специальностей 1-28 01 01, 1-40 05 01-01, 1-40 05 01-10 (6-05-0611-04, 6-05-0611-01). Некоторые разделы курса «Дискретная математика», а именно «Элементы математической логики», «Элементы теории множеств» и «Функциональные отношения» могут применяться на практических занятиях студентами всех видов специальностей и форм обучения вуза.

На кафедре «Математика и информационные технологии» разработана по дисциплине «Дискретная математика» тестовая форма контроля знаний с применением компьютерной техники. Предложенная методическая разработка позволяет подготовиться студентам к прохождению теста, как по отдельным разделам курса, так и по всему материалу.

Данный практикум может быть использован преподавателем для проведения практических занятий у студентов не только дневной формы обучения, но и заочной. Студенты заочной формы обучения могут применять теоретический и практический материал практикума для самостоятельной работы по предмету и выполнению контрольных заданий.

**ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ ПО КУРСУ
«ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА» ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ 1-28 01 01,
1-40 05 01-01, 1-40 05 01-10 (6-05-0611-04, 6-05-0611-01)
(ПЕРВЫЙ КУРС, ВТОРОЙ СЕМЕСТР)**

1. Высказывания. Логические операции над высказываниями.
 2. Формулы логики высказываний.
 3. Законы логики высказываний.
 4. Булевы функции.
 5. Логическое следствие. Основные определения логики высказываний.
- Схемы доказательств.
6. Косвенное доказательство. Доказательство от противного.
 7. Логика предикатов. Свободные переменные. Предикаты.
 8. Логика предикатов. Операции над предикатами.
 9. Логическое следствие. Равносильные предикаты.
 10. Утверждения общности и существования. Квантор общности. Свободные и связанные переменные. Примеры записи с использованием квантора общности.
 11. Утверждения общности и существования. Квантор существования.
- Примеры записи с использованием квантора существования.
12. Запись высказываний на языке логики предикатов.
 13. Элементарные предикатные формулы.
 14. Предикатные формулы или формулы логики предикатов.
 15. Законы логики предикатов.
 16. Множество. Пустое и универсальное множество. Диаграммы Эйлера-Венна.
 17. Подмножество. Собственное подмножество. Принцип выделения подмножеств данного множества с помощью одноместных предикатов.
 18. Операции над множествами.
 19. Основные свойства операций над множествами.
 20. Прямое произведение множеств.
 21. Бинарные и n -местные отношения. Ранг отношения.
 22. Представление бинарных отношений графами.
 23. Матрицы смежности и инцидентности для ориентированного и неориентированного графа.
 24. Операции над графами.
 25. Сетевое планирование. Сетевой график. Критический путь. Критические работы.
 26. Оптимизация сетевой модели по критерию минимума времени.
 27. Понятие функции (отображения). Область определения, область значений отображения. Образ и прообраз множества. Равенство функций. Отображение $v(na)$ множество.
 28. Композиция функций.

29. Инъективные функции.
30. Обратимые функции.
31. Ограничение функций.
32. Виды бинарных отношений.
33. Отношение эквивалентности бинарных отношений на множестве.
Класс эквивалентности. Полная система представителей классов эквивалентности.
34. Фактор – множество.
35. Отношение разнообразности отображения.
36. Отношение порядка бинарного отношения. Линейный порядок.
37. Упорядоченное множество. Наибольший и наименьший элемент.
Вполне упорядоченное множество.
38. Бинарные и n -местные операции.
39. Виды бинарных операций. Примеры бинарных операций. Аддитивная и мультипликативная форма записи.
40. Нейтральные и регулярные элементы.
41. Симметричные элементы.
42. Подмножества, замкнутые относительно операций.
43. Понятие алгебры. Примеры алгебр.
44. Гомоморфизм алгебр.
45. Подалгебры.
46. Фактор-алгебры.
47. Понятие группы. Примеры групп.
48. Простейшие свойства групп.
49. Гомоморфизм групп.
50. Подгруппы.
51. Понятие кольца. Примеры колец.
52. Простейшие свойства колец.
53. Гомоморфизм колец.
54. Подкольца.
55. Понятие алгебраической системы.
56. Изоморфизм алгебраических систем.
57. Подсистемы.
58. Интуитивное понятие алгоритма. Примитивно-рекурсивные формулы.
59. Машина Тьюринга и ее композиция.
60. Понятие сложности алгоритма и асимптотические оценки функции сложности. Класс NP.
61. Графовая модель, задачи минимизации.
62. Схемы из функциональных элементов.
63. Релейно-контактные схемы. Сети.
64. Задачи анализа и синтеза. Функции перехода автоматов.
65. Основные принципы работы с конечными автоматами.

ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

1 ВЫСКАЗЫВАНИЯ

Содержание: высказывания, операции над высказываниями, логические уравнения.

1.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Определение 1.1.1. Высказыванием называется любое повествовательное предложение, о котором можно сказать истинно оно или ложно.

Вопросительные и восклицательные предложения, а также определения не являются высказываниями. Истинность или ложность высказывания рассматривается как его истинностное значение. Эти значения обозначаются 1 и 0 для значений «истина» и «ложь». Любое высказывание либо истинно, либо ложно, и никакое высказывание не является одновременно истинным и ложным.

Если суждение об истинности высказывания можно получить из самого высказывания, то такое высказывание называется элементарным или простым высказыванием. В противном случае будем иметь сложное высказывание. Из простых высказываний можно образовывать сложные высказывания с помощью логических операций: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция и другие. Истинностное значение сложного высказывания зависит от истинностного значения элементарных высказываний.

Пусть A и B – произвольные высказывания, относительно которых мы не предполагаем, что известны их истинностные значения.

Определение 1.1.2. *Отрицанием* высказывания A называется новое высказывание $\neg A$ (читается «не A » или «неверно, что A »), которое истинно тогда и только тогда, когда высказывание A является ложным.

Определение 1.1.3. *Конъюнкцией* высказываний A и B называется новое высказывание $A \wedge B$ (читается « A и B »), которое истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания истинны.

Конъюнкция соответствует последовательному соединению в контактной схеме.

Определение 1.1.4. *Дизъюнкцией* высказываний A и B называется новое высказывание $A \vee B$ (читается « A или B »), которое истинно тогда и только тогда, когда хотя бы одно из высказываний A и B истинно.

Дизъюнкция соответствует параллельному соединению в контактной схеме.

Определение 1.1.5. *Импликацией* с посылкой A и заключением B называется новое высказывание $A \rightarrow B$ (читается «если A , то B », или «из высказывания A следует B », или « A влечёт B »), которое ложно тогда и только тогда, когда посылка истинна, а заключение ложно.

Определение 1.1.6. Эквиваленцией высказываний A и B называется новое высказывание $A \leftrightarrow B$ (читается « A тогда и только тогда, когда B », или « A эквивалентно B », или « A необходимо и достаточно для высказывания B »), которое истинно тогда и только тогда, когда высказывания A и B принимают одинаковые истинностные значения.

Определение 1.1.7. Штрихом Шеффера высказываний A и B называется новое высказывание $A|B$ (читается « A штрих Шеффера B »), которое ложно тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B – истины.

Штрих Шеффера равносильен отрицанию конъюнкции: $A|B \leftrightarrow \neg(A \wedge B)$.

Определение 1.1.8. Стрелкой Пирса высказываний A и B называется новое высказывание $A \downarrow B$ (читается « A стрелка Пирса B »), которое истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B – ложны.

Стрелка Пирса равносильна отрицанию дизъюнкции: $A \downarrow B \leftrightarrow \neg(A \vee B)$.

Определение 1.1.9. Суммой Жегалкина высказываний A и B называется новое высказывание $A + B$ (читается « A сумма Жегалкина B »), которое истинно тогда и только тогда, когда высказывания принимают различные логические значения.

Сумма Жегалкина равносильна отрицанию эквиваленции: $A + B \leftrightarrow \neg(A \leftrightarrow B)$.

Определения 1.1.2 – 1.1.9 можно записать в таблицы истинности.

Таблица истинности основных логических операций

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$	$A B$	$A \downarrow B$	$A + B$
1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0

1.2 Примеры решения типовых задач

1.2.1 Составить таблицу истинности для формулы логики высказываний: $A \wedge (B \rightarrow C) \leftrightarrow A \wedge C$.

Решение. Для заданной формулы составляем таблицу истинности.

A	B	C	$A \wedge C$	$B \rightarrow C$	$A \wedge (B \rightarrow C)$	$A \wedge (B \rightarrow C) \leftrightarrow A \wedge C$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1
0	0	0	0	1	0	1

1.2.2 Решить логическое уравнение: $p \vee q \wedge \neg g \rightarrow (q \leftrightarrow g) = 1$.

Решение. Составляем таблицу истинности и выбираем элементарные наборы $(p; q; g)$, при которых формула логики высказываний $p \vee q \wedge \neg g \rightarrow (q \leftrightarrow g)$ принимает значение «истина».

p	q	g	$\neg g$	$q \wedge \neg g$	$p \vee q \wedge \neg g$	$q \leftrightarrow g$	$p \vee q \wedge \neg g \rightarrow (q \leftrightarrow g)$
1	1	1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	1	1

Таким образом, решением заданного логического уравнения являются значения высказываний: $(1;1;1)$, $(0;1;1)$, $(1;0;0)$, $(0;0;1)$, $(0;0;0)$.

1.3 Задания для решения на практическом занятии

1.3.1 Составить таблицы истинности для указанных формул:

- $X \wedge Y \rightarrow \neg X \leftrightarrow \neg Y \vee (X \rightarrow Y)$;
- $A \vee (B \leftrightarrow C) \rightarrow \neg(B \wedge C \vee A)$;
- $(A \wedge B) \rightarrow (C \wedge \neg B \rightarrow A \vee C)$;
- $p \vee q \wedge r \rightarrow (\neg r \downarrow p \rightarrow q \mid p)$;
- $(X \downarrow Y \leftrightarrow (\neg Z \mid X)) \wedge (((Z \rightarrow X) \downarrow Y) \vee Z)$;
- $A \wedge B \rightarrow C \vee D \leftrightarrow A \vee C \rightarrow B \wedge D$.

1.3.2 Решить логические уравнения:

- $(A \leftrightarrow B \wedge \neg C) \leftrightarrow (A \rightarrow B \vee C) = 1$;
- $\neg(A \vee C \rightarrow B \wedge A) \leftrightarrow (\neg A \wedge C) = 0$;

- в) $\neg(A \downarrow B) \rightarrow (B \vee A \leftrightarrow C \wedge \neg B) = 0$;
 г) $\neg(X \vee Y \leftrightarrow Z \wedge X) \rightarrow (\neg Y \vee Z) = 1$;
 д) $(X \vee Z \rightarrow \neg Y) \vee (((X \leftrightarrow Y) \rightarrow Z) \wedge Y) = 1$;
 е) $p \wedge q \vee r \wedge t \rightarrow (p \vee q) \wedge (r \vee t) = 0$.

1.4 Задания для контроля знаний студентов по пройденной теме

1.4.1 Составить таблицу истинности логической формулы относительно высказываний X, Y, Z : $(\neg(X \wedge Y) \leftrightarrow Z) \rightarrow Z \vee \neg X$.

1.4.2 Решить логические уравнения:

- а) $X \wedge Y \vee X \wedge Z \vee Y \wedge Z \vee (\neg X \rightarrow Z) = 1$;
 б) $\neg(A \vee B) \rightarrow A \vee C \leftrightarrow \neg B \rightarrow C = 0$;
 в) $(p \vee q \rightarrow r) \downarrow (p \downarrow r) = 1$;
 г) $\neg(X \wedge Y \leftrightarrow Y \vee Z) | ((X \rightarrow Y) \rightarrow Z) = 0$.

2 ФОРМУЛЫ ЛОГИКИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Содержание: формулы логики высказываний, контактные схемы функции проводимости, законы логики.

2.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Понятие *формулы логики высказываний* определим следующим образом:

- 1) элементарные формулы (атомы) являются формулами логики высказываний;
- 2) если A и B – формулы, то $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$ тоже являются формулами логики высказываний;
- 3) только те выражения являются формулами логики высказываний, для которых это следует из первого и второго пунктов.

Число скобок в формулах можно уменьшить, если принять следующие соглашения: 1) будем опускать внешнюю пару скобок; 2) упорядочим знаки логических операций по старшинству: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$. При восстановлении скобок сначала расставляются все скобки, относящиеся ко всем вхождением знака $\neg$, затем ко всем вхождением знака $\wedge$ и так далее.

Формулы логики высказываний, которые принимают значение «истинна» при любом распределении элементарных формул, входящих в неё, называются *тождественно истинной формулой*, *тавтологией* или *законом логики высказываний*. Запись $\models X$ означает, что логическая формула A является формулой логи-

ки высказываний. Формулы логики высказываний, которые принимают значение «ложь» при любом распределении элементарных формул, входящих в неё, называются *тождественно ложной формулой* или *противоречием*. Для доказательства того, что формула является тавтологией, необходимо составить таблицу истинности для этой формулы и показать, что все элементы последнего столбца равны единице.

Законы логики.

Тавтологические импликации:

$X \wedge (X \rightarrow Y) \rightarrow Y$	– закон заключения;
$X \wedge Y \rightarrow X$	– законы удаления конъюнкции;
$X \wedge Y \rightarrow Y$	
$X \rightarrow X \vee Y$	– законы введения дизъюнкции;
$Y \rightarrow X \vee Y$	
$(X \vee Y) \wedge \neg Y \rightarrow X$	– закон удаления дизъюнкции;
$X \rightarrow \neg \neg X$	– закон введения двойного отрицания;
$\neg \neg X \rightarrow X$	– закон удаления двойного отрицания;
$(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X) \rightarrow (X \leftrightarrow Y)$	– закон введения эквиваленции;
$(X \leftrightarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow Y)$	– законы удаления эквиваленции;
$(X \leftrightarrow Y) \rightarrow (Y \rightarrow X)$	
$(X \rightarrow Y) \rightarrow (\neg Y \rightarrow \neg X)$	– закон контрапозиции для импликации;
$(\neg X \rightarrow Y) \wedge (\neg X \rightarrow \neg Y) \rightarrow X$	– закон доказательства от противного;
$(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow Z) \rightarrow (X \rightarrow Z)$	– закон силлогизма;
$(X \rightarrow Z) \wedge (Y \rightarrow Z) \rightarrow (X \vee Y \rightarrow Z)$	– закон сложения посылок;
$(X \rightarrow Y) \wedge (X \rightarrow Z) \rightarrow (X \rightarrow Y \wedge Z)$	– закон умножения заключений;
$(X \leftrightarrow Y) \wedge (Y \leftrightarrow Z) \rightarrow (X \leftrightarrow Z)$	– закон транзитивности эквиваленции.

Тавтологические эквиваленции:

$X \leftrightarrow X$	– закон тождества;
$X \wedge X \leftrightarrow X$	– закон идемпотентности конъюнкции;
$X \vee X \leftrightarrow X$	– закон идемпотентности дизъюнкции;
$X \wedge Y \leftrightarrow Y \wedge X$	– закон коммутативности конъюнкции;
$X \vee Y \leftrightarrow Y \vee X$	– закон коммутативности дизъюнкции;
$X \wedge (Y \wedge Z) \leftrightarrow (X \wedge Y) \wedge Z$	– закон ассоциативности конъюнкции;
$X \vee (Y \vee Z) \leftrightarrow (X \vee Y) \vee Z$	– закон ассоциативности дизъюнкции;
$X \wedge (Y \vee Z) \leftrightarrow (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$	– закон дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции;

$X \vee (Y \wedge Z) \leftrightarrow (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$	– закон дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции;
$\neg \neg X \leftrightarrow X$	– закон двойного отрицания;
$(X \leftrightarrow Y) \leftrightarrow (Y \leftrightarrow X)$	– закон коммутативности эквиваленции;
$(X \rightarrow Y) \leftrightarrow (\neg Y \rightarrow \neg X)$	– закон контрапозиции для эквиваленции;
$\neg (X \vee Y) \leftrightarrow \neg X \wedge \neg Y$	– закон отрицания дизъюнкции;
$\neg (X \wedge Y) \leftrightarrow \neg X \vee \neg Y$	– закон отрицания конъюнкции;
$(X \leftrightarrow Y) \leftrightarrow (\neg X \leftrightarrow \neg Y)$	– закон противоположности;
$X \rightarrow (Y \rightarrow Z) \leftrightarrow Y \rightarrow (X \rightarrow Z)$	– закон перестановки посылок.

Тавтологии, выражающие одни операции через другие:

$$\begin{aligned}
 X \rightarrow Y &\leftrightarrow \neg X \vee Y; \\
 X \rightarrow Y &\leftrightarrow \neg (X \wedge \neg Y); \\
 X \vee Y &\leftrightarrow \neg X \rightarrow Y; \\
 X \vee Y &\leftrightarrow \neg (\neg X \wedge \neg Y); \\
 X \wedge Y &\leftrightarrow \neg (X \rightarrow \neg Y); \\
 X \wedge Y &\leftrightarrow \neg (\neg X \vee \neg Y); \\
 (X \leftrightarrow Y) &\leftrightarrow (X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X).
 \end{aligned}$$

2.2 Примеры решения типовых задач

2.2.1 Докажем закон дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции $X \wedge (Y \vee Z) \leftrightarrow (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$.

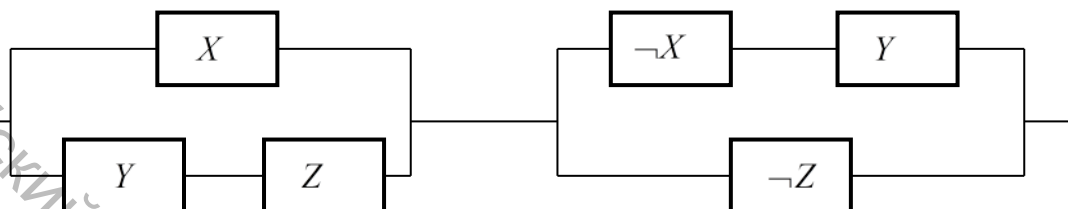
Решение. Для доказательства закона логики высказываний составим таблицу истинности и покажем, что все значения правого крайнего столбца принимают значение «истина», то есть равны 1.

X	Y	Z	$X \wedge Y$	$X \wedge Z$	$(X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$	$Y \vee Z$	$X \wedge (Y \vee Z)$	$X \wedge (Y \vee Z) \leftrightarrow (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1

Так как все значения последнего столбца равны 1, то формула является законом логики высказываний.

2.2.2 Построить контактную схему по заданной функции проводимости $A(X;Y;Z): (X \vee Y \wedge Z) \wedge (\neg X \wedge Y \vee \neg Z)$. Установить, при каких наборах элементов, входящих в данную схему, она будет работоспособна.

Решение. Построим контактную схему по заданной функции проводимости.



Проверим работоспособность полученной контактной схемы, для чего составим таблицу истинности для указанной формулы.

X	Y	Z	$\neg X$	$\neg Z$	$\neg X \wedge Y$	$Y \wedge Z$	$X \vee Y \wedge Z$	$\neg X \wedge Y \vee \neg Z$	$A(X;Y;Z)$
1	1	1	0	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0	1	0

Контактная схема работает при замыкании-размыкании контактов X, Y, Z : $(1;1;0)$, $(0;1;1)$, $(1;0;0)$. Во всех остальных случаях контактная схема является неработоспособной.

2.3 Задания для решения на практическом занятии

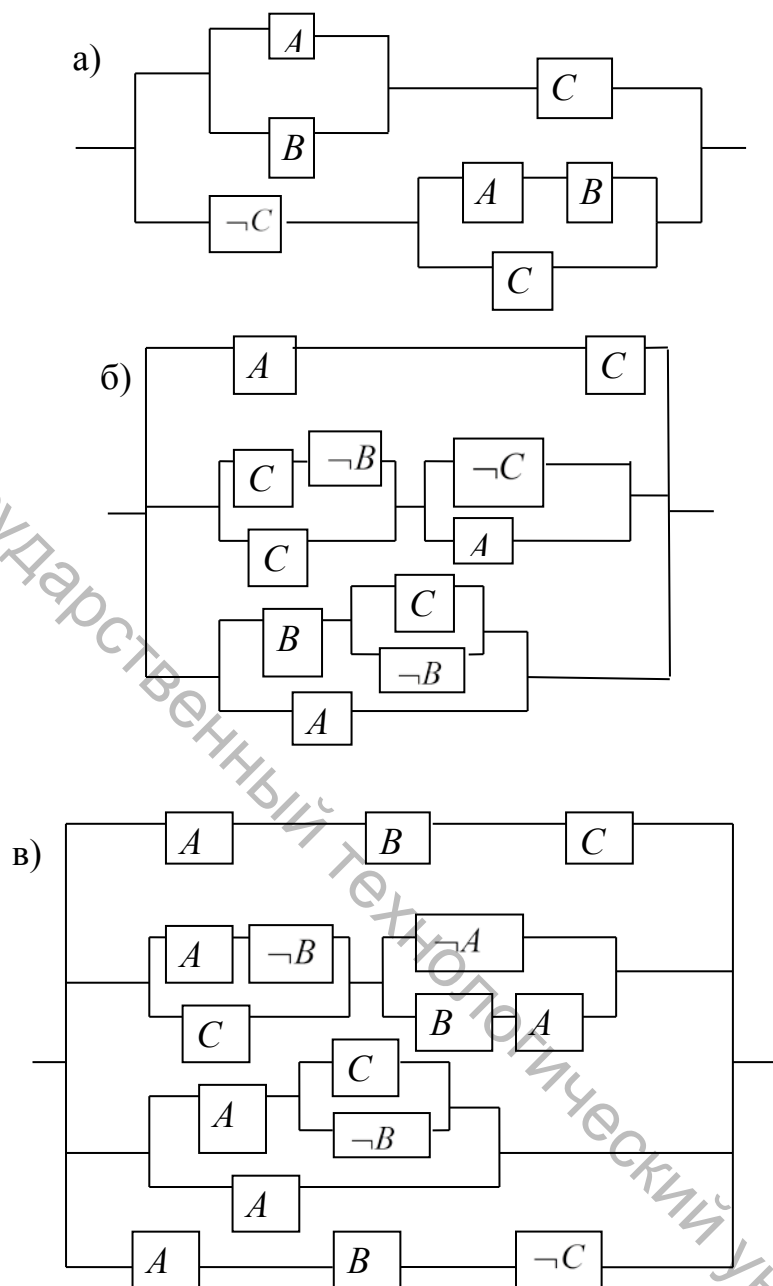
2.3.1 Опустить скобки в следующих формулах и составить для них таблицы истинности:

- $((A \wedge B) \rightarrow C) \wedge ((C \rightarrow A) \wedge B)$;
- $((X \leftrightarrow Y) \leftrightarrow (((X \wedge Z) \wedge Y) \vee (\neg Z)) \rightarrow Y)$;
- $(((((X \vee (\neg Y)) \rightarrow Z) \leftrightarrow X) \vee (Y \wedge X)))$;
- $(C \leftrightarrow (((\neg A) \vee B \wedge C)) \leftrightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)))$.

2.3.2 Восстановить скобки в логических формулах и составить для них таблицы истинности:

- $A \vee B \wedge (C \vee \neg A \wedge B)$;
- $X \vee \neg Y \wedge Z \rightarrow X \wedge \neg Y$;
- $A \vee \neg B \wedge C \rightarrow B \leftrightarrow \neg C$.

2.3.3 Записать логические формулы для контактных схем функций проводимости и проверить их работоспособность



2.3.4 Построить контактные схемы по заданным функциям проводимости. При каком замыкании-размыкании контактов X, Y и Z , которые входят в функцию проводимости, представленной логической формулой, электрическая цепь будет проводить ток, если логическая формула схемы имеет вид:

- а) $((\neg X \vee Y) \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge Z)$;
- б) $Y \wedge (\neg X \vee (X \wedge (Y \vee Z)))$;
- в) $(Z \vee \neg X \wedge Y) \vee (Y \wedge \neg Z)$;
- г) $(\neg Y \vee Z) \vee ((X \wedge Y) \vee (\neg Y \wedge Z))$.

2.3.5 Построить контактную схему прибора, состоящую из трёх блоков, каждый из которых содержит три и более элемента, таким образом, чтобы на выходе получить значение нуль, то есть прибор не работает. Составить таблицу истинности для полученной контактной схемы, и используя логические операции над высказываниями, показать, что приведённая электрическая цепь не даёт на выходе ток. Устранить все неполадки в электрической цепи, чтобы прибор работал, то есть в последнем столбце таблицы истинности получить все значения, равные единице, что соответствует безотказной работе прибора.

2.3.6 Доказать законы логики и изобразить контактную схему, которая соответствует этой логической формуле:

а) $A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ – закон дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции;

б) $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$ – закон отрицания конъюнкции;

в) $(X \rightarrow Y) \wedge (X \rightarrow Z) \rightarrow (X \rightarrow Y \wedge Z)$ – закон умножения заключений;

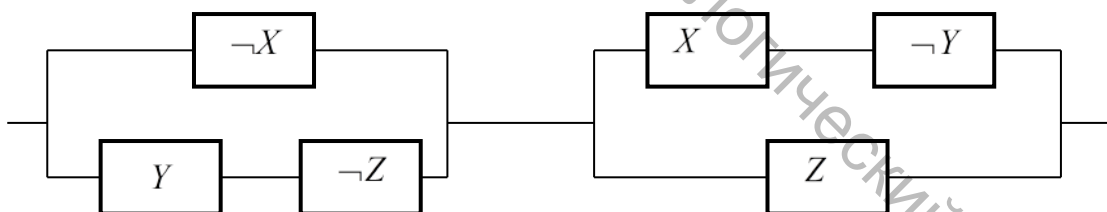
г) $(X \rightarrow Z) \wedge (Y \rightarrow Z) \rightarrow (X \vee Y \rightarrow Z)$ – закон сложения посылок;

д) $(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow Z) \rightarrow (X \rightarrow Z)$ – закон силлогизма;

е) $(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X) \rightarrow (X \leftrightarrow Y)$ – закон введения эквиваленции.

2.4 Задания для контроля знаний студентов по пройденной теме

2.4.1 Записать логическую формулу для контактной схемы функции проводимости, изображённой на чертеже, и проверить ее работоспособность.



2.4.2 Построить контактную схему по заданной функции проводимости: $(X \wedge Y \wedge Z) \vee ((X \wedge \neg Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee Y \wedge X))$. Установить, при каком замыкании-размыкании контактов X, Y, Z , входящих в данную схему, она будет работоспособна, то есть через соединения пройдёт ток.

2.4.3 Доказать законы логики и изобразить контактную схему, которая соответствует этой логической формуле:

а) $A \vee (B \vee C) \leftrightarrow (A \vee B) \vee C$ – закон ассоциативности дизъюнкции;

б) $X \rightarrow (Y \rightarrow Z) \leftrightarrow Y \rightarrow (X \rightarrow Z)$ – закон перестановки посылок.

3 БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

Содержание: булевы функции, логическое следствие, схемы доказательств, доказательство от противного, предикаты, кванторы общности и существования.

3.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Функцию $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, которая может принять одно из двух значений 0 или 1, от n переменных, каждая из которых принимает эти же значения 0 или 1, называют булевой функцией от n переменных. Для построения булевой функции применяют конъюнктивную и дизъюнктивную нормальную форму

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{F(x_1, x_2, \dots, x_n)=1} (x_1^{\alpha_1} \wedge x_2^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge x_n^{\alpha_n}),$$

где $x^\alpha = x$, если $\alpha = 1$, $x^\alpha = \neg x$, если $\alpha = 0$.

Формула B называется логическим следствием формул $A_1, A_2, \dots, A_n$, если для любого набора истинностных значений элементарных формул, входящих в формулы $A_1, A_2, \dots, A_n$, формула B получает значение «истина» каждый раз, когда каждая из формул $A_1, A_2, \dots, A_n$ получает значение «истина».

Запись $A_1, A_2, \dots, A_n \models B$ означает, что формула B – логическое следствие формул $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Метод доказательства от противного. Требуется доказать следствие $A_1, A_2, \dots, A_n \models B$. Предположим $\begin{cases} B = 0, \\ A_i = 1, i = \overline{1, n} \end{cases}$. Если система имеет хотя бы одно решение, то следствие неверно, если решений нет, то следствие верно.

Предложения с переменными, дающие высказывания в результате замены свободных переменных их допустимыми значениями, называются предикатами. По числу переменных, входящих в предикат, различают одноместные, двухместные и так далее предикаты. Для записи предикатов и высказываний вводятся два квантора: квантор общности и квантор существования. Для квантора существования употребляется символ $\exists$, для квантора общности символ $\forall$.

3.2 Примеры решения типовых задач

3.2.1 Представить в явном виде булеву функцию, заданную таблицей.

$F(x_1; x_2; x_3)$	1	1	1	1	0	0	0	1
$(x_1; x_2; x_3)$	(1;1;1)	(1;1;0)	(1;0;1)	(0;1;1)	(1;0;0)	(0;1;0)	(0;0;1)	(0;0;0)

Решение. Используя свойства булевых функций, а именно совершенную дизъюнктивную нормальную форму, получаем формулы:

$$F(x_1; x_2; x_3) = (x_1 \wedge F(1; x_2; x_3)) \vee (\neg x_1 \wedge F(0; x_2; x_3));$$

$$F(1; x_2; x_3) = (x_2 \wedge F(1; 1; x_3)) \vee (\neg x_2 \wedge F(1; 0; x_3));$$

$$F(0; x_2; x_3) = (x_2 \wedge F(0; 1; x_3)) \vee (\neg x_2 \wedge F(0; 0; x_3));$$

$$F(1; 1; x_3) = (x_3 \wedge F(1; 1; 1)) \vee (\neg x_3 \wedge F(1; 1; 0));$$

$$F(1; 0; x_3) = (x_3 \wedge F(1; 0; 1)) \vee (\neg x_3 \wedge F(1; 0; 0));$$

$$F(0; 1; x_3) = (x_3 \wedge F(0; 1; 1)) \vee (\neg x_3 \wedge F(0; 1; 0));$$

$$F(0; 0; x_3) = (x_3 \wedge F(0; 0; 1)) \vee (\neg x_3 \wedge F(0; 0; 0)).$$

Подставим в полученные формулы значения из таблицы.

$$F(0; 0; x_3) = (x_3 \wedge 0) \vee (\neg x_3 \wedge 1) = \neg x_3;$$

$$F(0; 1; x_3) = (x_3 \wedge 1) \vee (\neg x_3 \wedge 0) = x_3;$$

$$F(1; 0; x_3) = (x_3 \wedge 1) \vee (\neg x_3 \wedge 0) = x_3;$$

$$F(1; 1; x_3) = (x_3 \wedge 1) \vee (\neg x_3 \wedge 1) = 1;$$

$$F(0; x_2; x_3) = (x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_2 \wedge \neg x_3) = x_2 \leftrightarrow x_3;$$

$$F(1; x_2; x_3) = (x_2 \wedge 1) \vee (\neg x_2 \wedge x_3) = x_2 \vee (\neg x_2 \wedge x_3);$$

$$F(x_1; x_2; x_3) = x_1 \wedge (x_2 \vee \neg x_2 \wedge x_3) \vee \neg x_1 \wedge (x_2 \leftrightarrow x_3).$$

3.2.2 Доказать логическое следствие $A \rightarrow B, A \rightarrow \neg B \models \neg A$.

Решение. Составляем таблицу истинности.

A	B	$\neg B$	$A \rightarrow B$	$A \rightarrow \neg B$	$\neg A$
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1

Так как высказывание $\neg A$ принимает значение «истина» в том случае, когда оба высказывания $A \rightarrow B$ и $A \rightarrow \neg B$ принимают значение «истина», то логическое следствие справедливо.

3.2.3 Методом от противного проверить справедливость логического следствия $A \rightarrow B, A \rightarrow \neg B \models \neg A$.

Решение. Предположим от противное, то есть $\neg A = 0$, $A \rightarrow B = 1$ и $A \rightarrow \neg B = 1$. Решаем полученную систему.

$$\begin{cases} A = 1, \\ A \rightarrow B = 1, \\ A \rightarrow \neg B = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1, \\ 1 \rightarrow B = 1, \\ 1 \rightarrow \neg B = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1, \\ B = 1, \\ \neg B = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1, \\ B = 1, \\ B = 0. \end{cases}$$

Высказывание B не может быть одновременно истинным и ложным, то есть система не имеет решения. Следовательно, логическое следование верно.

3.3 Задания для решения на практическом занятии

3.3.1 Представить в явном виде булевы функции F , которые заданы в виде таблиц. Построить контактные схемы, которые отражают формулу логики высказываний, соответствующей явному виду булевой функции.

а)

$F(x_1; x_2)$	0	1	1	0
$(x_1; x_2)$	(1;1)	(1;0)	(0;1)	(0;0)

б)

$F(x_1; x_2; x_3)$	1	1	0	1	0	0	1	1
$(x_1; x_2; x_3)$	(1;1;1)	(1;1;0)	(1;0;1)	(0;1;1)	(1;0;0)	(0;1;0)	(0;0;1)	(0;0;0)

в)

$F(x_1; x_2; x_3)$	0	1	0	1	0	1	0	0
$(x_1; x_2; x_3)$	(1;1;1)	(1;1;0)	(1;0;1)	(0;1;1)	(1;0;0)	(0;1;0)	(0;0;1)	(0;0;0)

3.3.2 Из контактов X, Y, Z составить контактную схему функции проводимости таким образом, чтобы она замыкалась тогда и только тогда, когда замкнуты какие-либо два контакта.

3.3.3 Проверить логическое следствие, используя таблицы истинности

- а) $\neg A \vee B, C \rightarrow \neg B \models A \rightarrow \neg C$; б) $A \vee B, A \rightarrow C, B \rightarrow C \models C \vee A$.

3.3.4 Методом от противного проверить справедливость логических следствий:

- а) $A \rightarrow B, A \rightarrow C, B \wedge C \models A$; б) $A \rightarrow B, C \rightarrow B, A \wedge C \models B$;
в) $A \rightarrow B, \neg B \models \neg A$; г) $A \rightarrow B, B \rightarrow C \models A \vee C$.

3.3.5 Проанализировать справедливость следующих рассуждений:

а) я пойду домой или останусь здесь и буду решать поставленные задачи. Я не пойду домой. Следовательно, я буду решать поставленные задачи;

б) если число дробное, то оно рационально. Если число рациональное, то оно действительное. Следовательно, если число дробное, то оно действительное;

в) если число четное, то оно делится на два. Число делится на два. Следовательно, число четное;

г) если корни $ax^2 + bx + c$ не являются комплексными, то не верно, что для любого действительного x имеет место неравенство $a \cdot (ax^2 + bx + c) > 0$.

Корни $ax^2 + bx + c$ комплексные тогда и только тогда, когда $D = b^2 - 4ac < 0$. Если $ac < 0$, то не верно, что $D = b^2 - 4ac < 0$. Следовательно, если $ac < 0$, то не верно, что для любого действительного x имеет место неравенство $a \cdot (ax^2 + bx + c) > 0$;

д) если $x + 3 = \sqrt{3 - x}$, то $x^2 + 6x + 9 = 3 - x$. Но $x^2 + 6x + 9 = 3 - x$ тогда и только тогда, когда $(x + 6)(x + 1) = 0$, что имеет место в том и только в том случае, когда $x = -6$ или $x = -1$. Следовательно, $x + 3 = \sqrt{3 - x}$ влечет $x = -6$ или $x = -1$;

е) он сказал, что придет, если будет хорошая погода, и не придет его мама. Погода плохая. Следовательно, он не придет.

3.3.6 Записать на языке логики предикатов высказывания:

- а) некоторые действительные числа являются рациональными;
- б) ни одно простое число не является точным квадратом;
- в) некоторые четные числа не делятся на 8;
- г) любое число, кратное 6, делится на 3.

3.3.7 Пусть $P(x) = \langle x - \text{простое число} \rangle$, $Q(x) = \langle x - \text{четное число} \rangle$, $Z(x) = \langle x - \text{целое число} \rangle$, $D(x, y) = \langle x \text{ делит } y \rangle$. Сформулируйте словами высказывания, которые записаны на языке логики предикатов. Отметить, какие из них истинные и какие ложные:

- а) $\forall x P(x) \rightarrow \neg Q(x)$;
- б) $\forall x (\neg P(x) \rightarrow \forall y (P(y) \rightarrow \neg D(x, y)))$;
- в) $\forall x (Q(x) \rightarrow \forall y (D(x, y) \rightarrow Q(y)))$;
- г) $\forall x \exists y (R(x) \wedge R(y) \rightarrow D(x, y))$;
- д) $\forall y \exists x (R(x) \wedge R(y) \rightarrow D(x, y))$;
- е) $\exists x \forall y (R(x) \wedge R(y) \rightarrow D(x, y))$.

3.3.8 Используя логические символы и кванторы, записать следующие высказывания:

- а) числа 5 и 12 не имеют общих делителей, отличных от 1 и -1 ;
- б) натуральное число, делящееся на 6, делится на 2 и на 3;
- в) для любого целого числа x существует такое целое число y , что $x = 2y$ или $x = 2y + 1$;
- г) для любого натурального числа существует натуральное число, которое больше его;
- д) существует наименьшее натуральное число;
- е) система уравнений $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$ не имеет решений;
- ж) не существует такого рационального числа x , что $x^2 - 2 = 0$;
- з) для всяких целых x и z существует целое y такое, что $x + y = z$;
- и) для любых двух рациональных чисел x и y существует рациональное число z такое, что $x < z$ и $z < y$.

3.3.9 Имеют ли место равносильности для любых предикатов $D(x, y)$, $Q(x)$ и $R(x)$?

- а) $\forall x \exists y D(x, y) \equiv \exists y \forall x D(x, y)$.
 б) $\forall x \forall y D(x, y) \equiv \forall y \forall x D(x, y)$.
 в) $\forall x (R(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x R(x) \vee \forall x Q(x)$.
 г) $\exists x (R(x) \wedge Q(x)) \equiv \exists x R(x) \wedge \exists x Q(x)$.

3.4 Задания для контроля знаний студентов по пройденной теме

3.4.1 Представить в явном виде булевы функции F , которые заданы в виде таблиц. Построить контактные схемы, которые отражают формулу логики высказываний, соответствующую явному виду булевой функции.

а)

$F(x_1, x_2)$	0	0	0	1
$(x_1; x_2)$	(1;1)	(1;0)	(0;1)	(0;0)

б)

$F(x_1, x_2, x_3)$	1	0	1	1	0	0	1	0
$(x_1; x_2; x_3)$	(1;1;1)	(1;1;0)	(1;0;1)	(0;1;1)	(1;0;0)	(0;1;0)	(0;0;1)	(0;0;0)

в)

$F(x_1, x_2, x_3)$	1	0	0	1	1	0	0	1
$(x_1; x_2; x_3)$	(1;1;1)	(1;1;0)	(1;0;1)	(0;1;1)	(1;0;0)	(0;1;0)	(0;0;1)	(0;0;0)

3.4.2 Из контактов X, Y, Z составить контактную схему функции проводимости таким образом, чтобы она замыкалась тогда и только тогда, когда замкнуты какие-либо два контакта.

3.4.3 Проверить логическое следствие $A \rightarrow B, B \rightarrow C \models A \vee B \rightarrow C$, используя таблицы истинности логических формул.

3.4.4 Методом от противного проверить справедливость логических следствий:

- а) $A \rightarrow B \models \neg B \rightarrow \neg A$;
 б) $A \rightarrow B, B \rightarrow C \models A \rightarrow C$;
 в) $\neg A \rightarrow B, \neg A \rightarrow \neg B \models A$.

3.4.5 Проанализировать справедливость следующего рассуждения: для того, чтобы функция $y = f(x)$ была интегрируема на отрезке $[a, c]$, необходимо, чтобы функция была ограничена на этом отрезке. Функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, c]$. Следовательно, функция $y = f(x)$ ограничена на отрезке $[a, c]$.

3.4.6 Пусть предикат $P(x)$ обозначает « x – простое число», а предикат $Q(x)$ обозначает « x – чётное число». Перевести на русский язык следующую запись, которая записана на языке логики предикатов:

$$\exists x(Q(x) \wedge P(x)) \wedge \neg \exists x((Q(x) \wedge P(x)) \wedge \exists y(x \neq y \wedge Q(y) \wedge P(y))).$$

3.4.7 Пусть предикат $P(x)$ обозначает « x – простое число», а предикат $Q(x, y)$ обозначает «число x делится на число y ». Перевести на русский язык следующую запись, которая записана на языке логики предикатов:

$$\forall x \forall y (P(x) \wedge P(y) \wedge Q(x, y) \rightarrow x = y).$$

4 МНОЖЕСТВА

Содержание: множества, равенство множеств, пустое и универсальное множество, диаграммы Эйлера – Венна, операции над множествами.

4.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Понятие множества является первоначальным и неопределяемым. Под *множеством* понимают совокупность объектов или предметов, которые объединены некоторым общим признаком. Эти объекты или предметы, из которых состоит множество, называются *элементами множества*.

Множество, которое не содержит ни одного элемента, называется *пустым множеством* и обозначается символом $\emptyset$.

Все множества делятся на конечные и бесконечные множества.

Множества, которые состоят из конечного числа элементов, называются *конечными*. Множества, которые состоят из бесконечного числа элементов, называются *бесконечными*. Если A является конечным множеством, то число его элементов называется мощностью множества и обозначается $|A|$.

Определение 4.1.1. Множества A и B называются *равными*, если любой элемент первого множества является элементом второго множества и, наоборот, каждый элемент второго множества является элементом первого множества.

Равенство двух множеств A и B обозначают $A = B$. Равные множества, по определению, состоят из одних и тех же элементов. Для доказательства равенства множеств необходимо взять любой элемент одного множества и доказать, что он принадлежит второму множеству, и обратно.

Определение 4.1.2. Множество A называется *подмножеством* множества B , если каждый элемент множества A является элементом множества B .

Если множество A является подмножеством множества B , то записывают $A \subseteq B$ и читают «множество A является подмножеством множества B »,

или «множество A содержится во множестве B », или « A включено в множество B » и т. д.

Рассмотрим операции над множествами. Будем рассматривать всевозможные подмножества одного и того же множества, которое называется универсальным и обозначается буквой U или Ω .

Определение 4.1.3. Объединением множества A и B называется множество $A \cup B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B (в частности, одновременно обоим множествам):

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}.$$

Объединением множеств $A_i, i \in N$, называется множество $\bigcup_{i=1}^n A_i$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A_i . В частном случае, объединение конечного числа множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$ будем обозначать $\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$.

Определение 4.1.4 Пересечением множества A и B называется множество $A \cap B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат одновременно множеству A и B :

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}.$$

Пересечением множеств $A_i, i \in N$ называется множество $\bigcap_{i=1}^n A_i$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат одновременно всем множествам A_i . В частном случае, пересечение конечного числа множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$ будем обозначать $\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$.

Определение 4.1.5. Разностью множества A и B называется множество $A \setminus B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B :

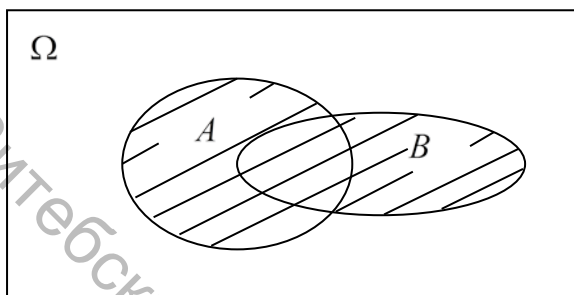
$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Определение 4.1.6. Дополнением множества A до универсального множества Ω называется множество $\bar{A} = \Omega \setminus A$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат универсальному множеству и не принадлежат множеству A :

$$\bar{A} = \Omega \setminus A = \{x | x \in \Omega \wedge x \notin A\}.$$

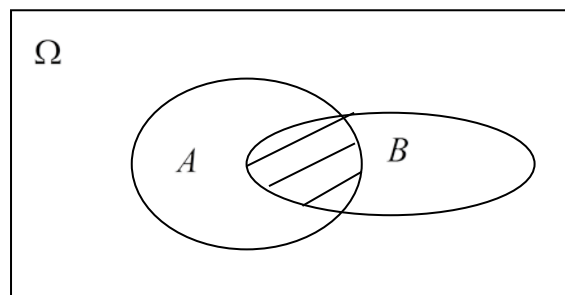
Геометрически операции над множествами интерпретируются с помощью диаграмм Эйлера – Венна.

На рисунках 4.1.1 – 4.1.4 заштрихованные области изображают объединение, пересечение, разность и дополнение двух множеств, соответственно.



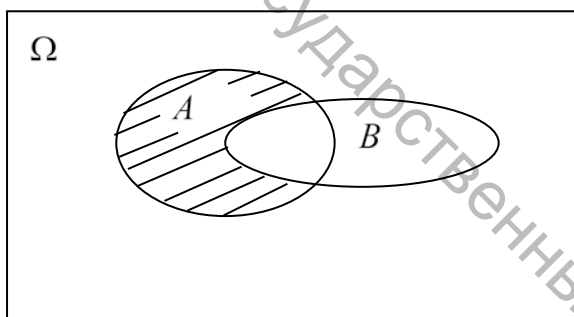
$$A \cup B$$

Рисунок 4.1.1 – Объединение



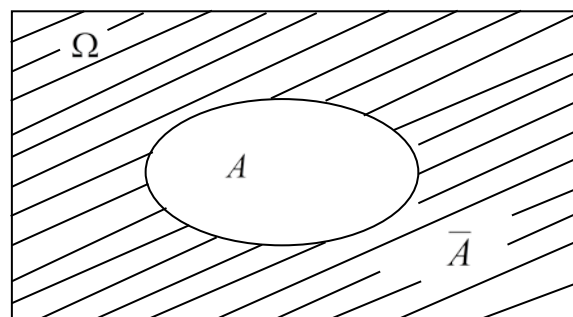
$$A \cap B$$

Рисунок 4.1.2 – Пересечение



$$A/B$$

Рисунок 4.1.3 – Разность



$$\bar{A} = \Omega / A$$

Рисунок 4.1.4 – Дополнение

Рассмотрим основные свойства операций над множествами.

$$\emptyset \subset A$$

– пустое множество содержится в любом множестве;

$$A \cup \Omega = \Omega$$

$$A \cap \Omega = A$$

$$A \cup \bar{A} = \Omega$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

$$\overline{\bar{A}} = A$$

– закон инволюции;

$$A \cup A = A$$

– закон идемпотентности объединения;

$$A \cap A = A$$

– идемпотентность пересечения;

$$A \cup B = B \cup A$$

– коммутативность объединения;

$$A \cap B = B \cap A$$

– коммутативность пересечения;

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

– ассоциативность объединения;

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

– ассоциативность пересечения;

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

– дистрибутивность объединения относительно пересечения;

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

– дистрибутивность пересечения отно-

сительно объединения;

$$\left. \begin{aligned} \overline{(A \cup B)} &= \bar{A} \cap \bar{B} \\ \overline{(A \cap B)} &= \bar{A} \cup \bar{B} \end{aligned} \right\}$$

– законы де Моргана для множеств.

Рассмотрим множество M . Пусть $n(M)$ – число элементов множества M . Тогда справедливы следующие формулы:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad (1.4.1)$$

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - \\ &- n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C). \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

4.2 Примеры решения типовых задач

4.2.1 Описать перечислением всех элементов множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ и $B \setminus A$, если $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 5x + 6 = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x - 10 = 0\}$.

Решение. Запишем множества A и B перечислением их элементов, предварительно решив квадратные уравнения: $A = \{-2; -3\}$, $B = \{-2; 5\}$.

$$A \cup B = \{-2; -3; 5\}, A \cap B = \{-2\}, A \setminus B = \{-3\}, B \setminus A = \{5\}.$$

4.2.2 Используя определение равенства множеств и операции над множествами, проверить равенство $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ и проиллюстрировать решение с помощью диаграммы Эйлера – Венна.

Решение. Рассмотрим два множества $M = A \cup (B \cap C)$ и $N = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Надо доказать, что $M = N$. Для того чтобы эти множества были равны, необходимо выполнение двух условий:

- 1) если $\forall x \in M$, то $x \in N$;
- 2) если $\forall x \in N$, то $x \in M$.

Проверим выполнимость условия 1): пусть $x \in M = A \cup (B \cap C)$. Тогда возможны два случая $x \in A$ или $x \in B \cap C$. Если $x \in A$, то $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$. Следовательно, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) = N$. Если $x \in B \cap C$, то $x \in B$ и $x \in C$. Но тогда $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$, а это означает, что $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) = N$. Таким образом, в обоих случаях справедливо утверждение: если $x \in M$, то $x \in N$.

Проверим выполнимость условия 2): пусть $x \in N = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Тогда $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$. Если $x \in A$, то $x \in A \cup (B \cap C) = M$. Если $x \notin A$, то $x \in B \cap C$, а, следовательно, $x \in A \cup (B \cap C) = M$.

Из выполнимости условий 1) и 2) следует справедливость заданного равенства $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Проиллюстрируем решение с помощью диаграммы Эйлера – Венна.

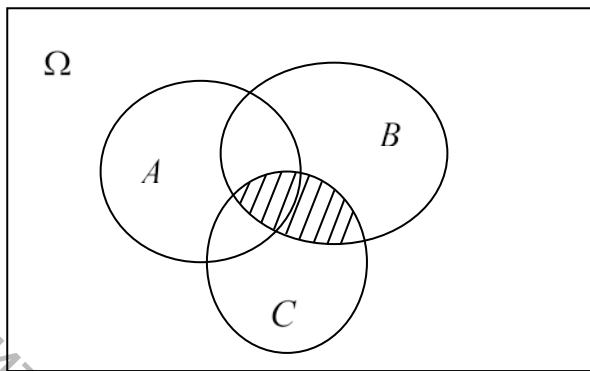


Диаграмма 4.2.2.1 – $B \cap C$

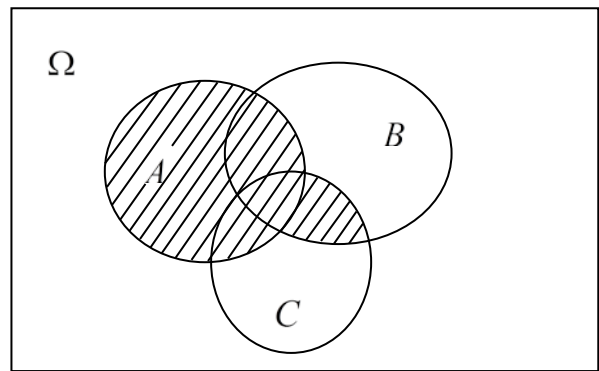


Диаграмма 4.2.2.2 – $A \cup (B \cap C)$

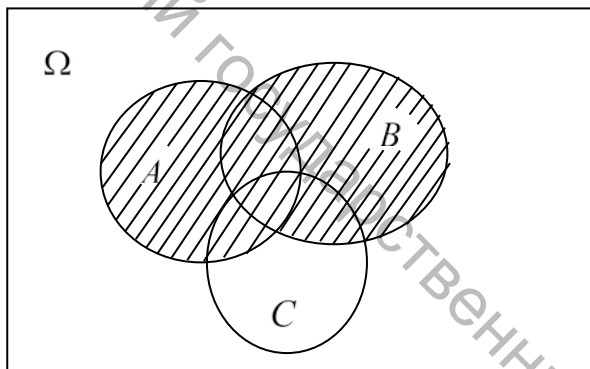


Диаграмма 4.2.2.3 – $A \cup B$

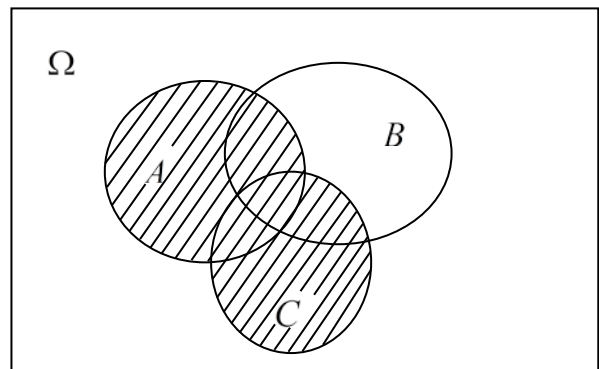


Диаграмма 4.2.2.4 – $A \cup C$

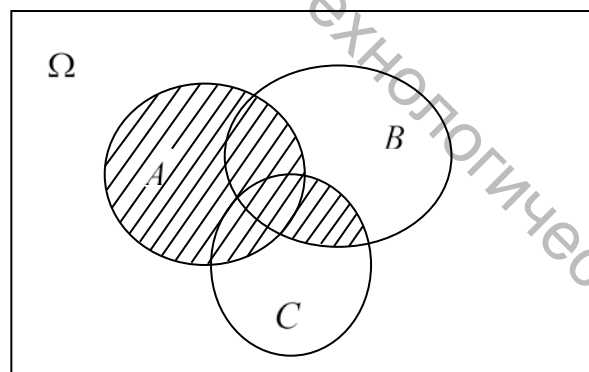


Диаграмма 4.2.2.5 – $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

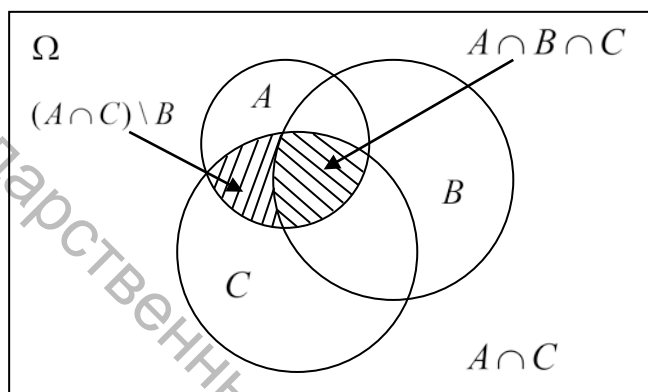
На диаграмме 4.2.2.2 Эйлера – Венна заштрихованная область представляет собой левую часть заданного равенства: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. На диаграмме 4.2.2.5 Эйлера – Венна заштрихованная область представляет собой правую часть заданного равенства: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Заштрихованные области на обеих диаграммах Эйлера – Венна совпадают. Следовательно, указанное равенство справедливо.

4.2.3 Множество A состоит из 40 элементов, множество B состоит из 50 элементов, C – из 50 элементов. Объединение множества $A \cup B \cup C$ из 100 элементов. Пересечение множеств $A \cap B$ равно 20, пересечение множеств

$A \cap C$ равно 15, пересечение множеств $B \cap C$ равно 10. Сколько элементов входит одновременно во множества A, B, C . Сколько элементов входят во множества A и C , но не входят во множество B .

Решение. По условию, $n(A \cup B \cup C) = 100$, $n(A) = 40$, $n(B) = n(C) = 50$, $n(A \cap B) = 20$, $n(A \cap C) = 15$, $n(B \cap C) = 10$. Тогда число элементов входящих одновременно во множества A, B, C , согласно формуле (4.1.2), равно: $n(A \cap B \cap C) = 100 - 40 - 50 - 50 + 20 + 15 + 10 = 5$.

Найдем число элементов, которые входят в множества A и C , но не входят во множество B , то есть число элементов множества $(A \cap C) \setminus B$. Представим множество $A \cap C$ в виде двух непересекающихся множеств.



Множество $A \cap C = ((A \cap C) \setminus B) \cup (A \cap B \cap C)$. Тогда число элементов этого множества определяем по формуле:

$$n(A \cap C) = n((A \cap C) \setminus B) + n(A \cap B \cap C)$$

Следовательно,

$$n((A \cap C) \setminus B) = n(A \cap C) - n(A \cap B \cap C) = 15 - 5 = 10.$$

Таким образом, число элементов входящих одновременно во множества A, B, C равно 5, а число элементов, которые входят во множества A и C , но не входят во множество B равно 10.

4.3 Задания для решения на практическом занятии

4.3.1 Описать заданные множества перечислением своих элементов.

4.3.1.1 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 3 = 0\}$; 4.3.1.2 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 5x^2 - 8x + 12 = 0\}$;

4.3.1.3 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 9x + 8 \leq 0\}$; 4.3.1.4 $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \log_{1/3} \frac{1}{x} \leq 2\right\}$;

$$4.3.1.5 \quad A = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos^2 3x = 0\};$$

$$4.3.1.6 \quad A = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2-x} = -x\}.$$

4.3.2 Изобразить на координатной плоскости следующие множества:

$$4.3.2.1 \quad x - y \leq 5;$$

$$4.3.2.2 \quad y \leq x^2;$$

$$4.3.2.3 \quad \sin 2x \geq 0,5.$$

4.3.3 Найти указанные множества.

$$а) \{a, b, c\} \cap \{a, c, d, f\};$$

$$б) \{a, b, c\} \cup \{b, d\};$$

$$в) \{a, b, c, d\} \setminus \{a, f, g, k\};$$

$$г) \{a, f, g, k\} \setminus \{a, b, c, d\}.$$

4.3.4 Описать перечислением всех элементов множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ и $B \setminus A$, если $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 2 = 0\}$.

4.3.5 Пусть задано некоторое множество $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4 \leq 0\}$ и множество $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 1\}$. Заштриховать на числовой прямой пересечение, объединение и разность этих множеств.

4.3.6 Исходя из определения равенства множеств и операций над множествами, проверить тождества и проиллюстрировать решение с помощью диаграмм Эйлера – Венна.

$$а) A \setminus B = A \cap \bar{B};$$

$$б) A \setminus (A \setminus B) = A \cap B;$$

$$в) B \cup (A \setminus B) = A \cup B;$$

$$г) A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C);$$

$$д) A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C);$$

$$е) A \cap (B \cup (A \cap C)) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

$$ж) (A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B;$$

$$з) A \setminus B = (A \setminus (A \cap B)).$$

4.3.7 Доказать следующие утверждения:

$$а) A \subset C \rightarrow A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C;$$

$$б) C = A \setminus B \rightarrow B \cap C = \emptyset.$$

4.3.8 Пусть $X_1, X_2, X_3 \subset \Omega$. Упростить выражения:

$$а) (X_1 \cup X_2) \setminus X_1;$$

$$б) (X_1 \cap X_2) \setminus X_1;$$

$$в) (X_1 \cap X_2) \cup X_1;$$

$$г) ((X_1 \cup X_2) \cap (X_1 \cup X_3)) \setminus (X_2 \cup X_3);$$

4.3.9 Решить систему уравнений $\begin{cases} A \cap Z = B \\ A \cup Z = C \end{cases}$, если $B \subseteq A \subseteq C$.

4.3.10 В ящике 20 шаров, которые могут быть одноцветными и двухцветными. Из этих шаров 11 шаров имеют жёлтую окраску, а 13 шаров имеют синюю окраску. Сколько шаров имеют двухцветную окраску?

4.3.11 На предприятии работают 35 человек, каждый из которых владеет, по крайней мере, одной специальностью. Пятнадцать человек имеют специальность маляря, 19 – штукатура, 18 – каменщика. Пять человек имеют специальности маляр и каменщик, 7 – маляр и штукатур, 8 – штукатур и каменщик. Сколько человек имеют ровно одну специальность?

4.3.12 В студенческой группе каждый из студентов занимается по крайней мере одним видом деятельности. Четырнадцать студентов занимаются спортом, 15 – наукой, 13 – художественной самодеятельностью. Спортом и наукой занимаются 6 студентов, наукой и художественной самодеятельностью занимаются 7 студентов, а спортом и художественной самодеятельностью занимаются 5 студентов. Сколько студентов в группе?

4.4 Задания для контроля знаний студентов по пройденной теме

4.4.1 Исходя из определения равенства множеств и операций над множествами, проверить тождество $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, проиллюстрировав решение с помощью диаграмм Эйлера – Венна.

4.4.2 Доказать утверждение $B \subset A \rightarrow (A \setminus B) \cup B = A$.

4.4.3 Упростить выражение $(X_1 \cup X_2 \cup X_3) \cup (X_1 \cup X_2) \cup (X_1 \cup X_3)$.

4.4.4 В соревнованиях по лёгкой атлетике приняло участие 41 атлетов, им было предложено выполнить упражнения: ходьбу, бег и прыжки. Ходьбу выполнил 21 атлет, бег – 19 атлетов, прыжки – 17 атлетов. Ходьбу и бег выполнили 8 человек, ходьбу и прыжки – 10 человек, бег и прыжки – 9 человек. Ни одного упражнения не выполнили 2 человека.

1. Сколько атлетов выполнили все три упражнения?

2. Сколько атлетов выполнили два упражнения?

3. Сколько студентов выполнили одно упражнение?

5 БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ. ГРАФЫ

Содержание: прямое произведение множеств, бинарные отношения, инверсия и композиция бинарных отношений, графы, представление бинарных отношений графами, операции над графами, матрицы смежности и инцидентности.

5.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Определение 5.1.1 *Прямым произведением* множеств A и B называется множество упорядоченных пар $\langle x; y \rangle$, таких, что $x \in A$ и $y \in B$.

Это множество обозначается $A \times B = \{ \langle x; y \rangle \mid x \in A \wedge y \in B \}$.

Определение 5.1.2 *Прямым произведением n множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$ называется множество всех кортежей $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ длины n , где $x_i \in A_i$ и $i = \overline{1, n}$:*
 $A_1 \times \dots \times A_n = \{ \langle x_1; \dots; x_n \rangle \mid x_1 \in A_1 \wedge \dots \wedge x_n \in A_n \}.$

Определение 5.1.3 *Бинарным отношением называется любое множество упорядоченных пар.*

Таким образом, бинарное отношение является подмножеством прямого произведения множеств.

Областью определения бинарного отношения R называется множество $Dom(R) = \{x \mid \exists y, \langle x; y \rangle \in R\}$, а областью значения этого отношения является множество $Im(R) = \{y \mid \exists x, \langle x; y \rangle \in R\}$. Композиция двух бинарных отношений R и S представляет собой множество $R \circ S = \{ \langle x; y \rangle \mid \exists z, xSz \wedge zRy \}$, а инверсия отношения R — множество $R^\cup = \{ \langle x; y \rangle \mid \langle y; x \rangle \in R \}.$

n -местным отношением ($n \geq 1$) называется любое множество кортежей длины n , то есть множество упорядоченных наборов n объектов. Таким образом, n -местное отношение является подмножеством прямого произведения n множеств.

Определение 5.1.4. *Графом называется фигура на плоскости, которая состоит из конечного числа точек (вершин графа) и линий (рёбер), соединяющих некоторые из вершин.*

Граф, на котором указаны стрелками направления всех его рёбер, называется *ориентированным графом* или *орграфом*. Если граф не имеет ориентированных рёбер, то он называется *неориентированным* или *неографом*. Каждой упорядоченной паре $\langle a; b \rangle$ сопоставляется ребро графа со стрелкой, идущей от точки a к точке b . Упорядоченной паре $\langle a; a \rangle$ сопоставим петлю с направлением против часовой стрелки.

Матрицей смежности Sm для неориентированного графа, порядка n называется матрица, состоящая из чисел sm_{ij} , равных сумме чисел неориентированных ребер, соединяющих вершины графа. Если дуга отсутствует, то $sm_{ij} = 0$.

Матрицей инцидентности In размерности $m \times n$ для неориентируемого графа называется матрица, элементами которой являются числа

$$in_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если ребро } u_j \text{ существует,} \\ 0, & \text{если такого ребра } u_j \text{ не существует.} \end{cases}$$

Матрицей смежности Sm порядка n для ориентируемого графа называется матрица, состоящая из чисел sm_{ij} , равных сумме чисел ориентированных ребер, идущих из вершины x_i в вершину x_j . Если дуга отсутствует, то $sm_{ij} = 0$.

Матрицей инцидентности In размерности $m \times n$, для ориентируемого графа называется матрица, элементами которой являются числа

$$in_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если дуга } u_j \text{ выходит из вершины } x_i, \\ -1, & \text{если дуга } u_j \text{ входит в вершину } x_i, \\ 0, & \text{если такой дуги нет.} \end{cases}$$

Объединением графов называется граф, у которого множество вершин и множество дуг объединены, то есть одинаковые вершины и дуги совпадают. Суммой графов называется граф, определяемый как объединение графов, причём каждая вершина, не вошедшая в объединение, соединяется с другими вершинами графа. Произведением двух графов называется граф, вершины которого являются парой (первый элемент совпадает с вершинами первого графа, а второй элемент – второго), а рёбра соединяют те вершины, у которых нет ни одного совпадения.

5.2 Примеры решения типовых задач

5.2.1 Даны два множества $A = \{1; 3; 5\}$ и $B = \{2; 4; 6\}$. Найти прямые произведения множеств.

Решение. Составляем всевозможные прямые произведения множеств.

$$\begin{aligned} A \times B &= \{\langle 1; 2 \rangle; \langle 1; 4 \rangle; \langle 1; 6 \rangle; \langle 3; 2 \rangle; \langle 3; 4 \rangle; \langle 3; 6 \rangle; \langle 5; 2 \rangle; \langle 5; 4 \rangle; \langle 5; 6 \rangle\}; \\ B \times A &= \{\langle 2; 1 \rangle; \langle 2; 3 \rangle; \langle 2; 5 \rangle; \langle 4; 1 \rangle; \langle 4; 3 \rangle; \langle 4; 5 \rangle; \langle 6; 1 \rangle; \langle 6; 3 \rangle; \langle 6; 5 \rangle\}; \\ A \times A &= \{\langle 1; 1 \rangle; \langle 1; 3 \rangle; \langle 1; 5 \rangle; \langle 3; 1 \rangle; \langle 3; 3 \rangle; \langle 3; 5 \rangle; \langle 5; 1 \rangle; \langle 5; 3 \rangle; \langle 5; 5 \rangle\}; \\ B \times B &= \{\langle 2; 2 \rangle; \langle 2; 4 \rangle; \langle 2; 6 \rangle; \langle 4; 2 \rangle; \langle 4; 4 \rangle; \langle 4; 6 \rangle; \langle 6; 2 \rangle; \langle 6; 4 \rangle; \langle 6; 6 \rangle\}. \end{aligned}$$

5.2.2 Доказать равенство множеств:

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C).$$

Решение. Выбираем произвольную упорядоченную пару принадлежащую левой части равенства и докажем, что эта пара принадлежит множеству, которое принадлежит правой части:

$$\begin{aligned} \forall \langle x; y \rangle \in (A \cup B) \times C &\rightarrow x \in A \cup B \wedge y \in C \rightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge y \in C \rightarrow \\ &\rightarrow (x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge y \in C) \rightarrow \langle x; y \rangle \in A \times C \vee \langle x; y \rangle \in B \times C \rightarrow \\ &\rightarrow \langle x; y \rangle \in (A \times C) \cup (B \times C). \end{aligned}$$

Выбираем теперь произвольную упорядоченную пару принадлежащую правой части равенства и докажем, что эта пара принадлежит множеству, которое принадлежит левой части:

$$\begin{aligned} \forall \langle a; b \rangle \in (A \times C) \cup (B \times C) &\rightarrow \langle a; b \rangle \in A \times C \vee \langle a; b \rangle \in B \times C \rightarrow \\ &\rightarrow (a \in A \wedge b \in C) \vee (a \in B \wedge b \in C) \rightarrow (a \in A \vee a \in B) \wedge b \in C \rightarrow \\ &\rightarrow x \in A \cup B \wedge y \in C \rightarrow \langle x; y \rangle \in (A \cup B) \times C. \end{aligned}$$

На основании равенства множеств, равенство доказано.

5.2.3 В условии примера 5.2.1. найти бинарное отношение $R = \{\langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in B \wedge "x \text{ больше } y"\}$. Указать область определения и множество значений бинарного отношения.

Решение. Бинарное отношение представляет собой следующее множество упорядоченных пар $R = \{\langle 3, 2 \rangle; \langle 5, 2 \rangle; \langle 5, 4 \rangle\}$. Область определения бинарного отношения: $Dom R = \{3; 5\}$. Множество значений бинарного отношения $Im R = \{2; 4\}$.

5.2.4 Заданы два бинарных отношения $R = \{\langle 3, 2 \rangle; \langle 5, 2 \rangle; \langle 5, 4 \rangle\}$ и $T = \{\langle 5, 3 \rangle; \langle 2, 5 \rangle\}$. Найти инверсии бинарных отношений и все композиции двух бинарных отношений $R \circ T$ и $T \circ R$.

Решение. Записываем инверсии бинарных отношений: $T^\cup = \{\langle 3, 5 \rangle; \langle 5, 2 \rangle\}$, $R^\cup = \{\langle 2, 3 \rangle; \langle 2, 5 \rangle; \langle 4, 5 \rangle\}$. Составим композиции бинарных отношений: $R \circ T = \{\langle 5, 2 \rangle; \langle 2, 2 \rangle; \langle 2, 4 \rangle\}$; $T \circ R = \{\langle 3, 5 \rangle; \langle 5, 5 \rangle\}$.

5.2.5 Дана матрица Sm . Необходимо: а) построить соответствующий ей граф (в общем случае считаем, что граф является не ориентируемым), который имеет заданную матрицу Sm матрицей смежности и определить матрицу инцидентности In для построенного графа; б) построить орграф (ориентируемый граф), который имеет матрицу смежности Sm . Найдите матрицу инцидентности In для построенного орграфа.

$$Sm = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение:

1. Построим не ориентируемый граф, который имеет заданную матрицу Sm матрицей смежности.

$$Sm = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} \end{matrix}$$

Пусть граф имеет вершины A, B, C, D . Ребра графа обозначим числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Для построения графа, каждой вершине однозначно сопоставим точку на плоскости. Проанализируем элементы матрицы Sm , для не ориентируемого графа. Так как $sm_{11} = 0$, то при вершине A нет петель. Значение $sm_{12} = 2$, следовательно, из вершины A проведено два ребра, соединяющих

вершину A с вершиной B . Значение элемента матрицы $sm_{13} = 1$, следовательно, из вершины A проведено одно ребро, которое соединяет вершину A с вершиной C . Элемент матрицы $sm_{14} = 3$, из вершины A проведено три ребра, которые соединяют данную вершину графа с вершиной D . Аналогичным образом проведем ребра из вершин B, C, D .

$sm_{21} = 2$ – проведено два ребра, которые соединяют вершину B с вершиной A .

$sm_{22} = 0$ – при вершине B нет петель.

$sm_{23} = 1$ – проведено одно ребро, которое соединяет вершину B с вершиной C .

$sm_{24} = 0$ – нет ребер, которые соединяют вершины B и D .

$sm_{31} = 1$ – проведено одно ребро, которое соединяет вершину C с вершиной A .

$sm_{32} = 1$ – проведено одно ребро, которое соединяет вершину C с вершиной B .

$sm_{33} = 2$ – в вершине C имеется две петли.

$sm_{34} = 1$ – проведено одно ребро, которое соединяет вершину C с вершиной D .

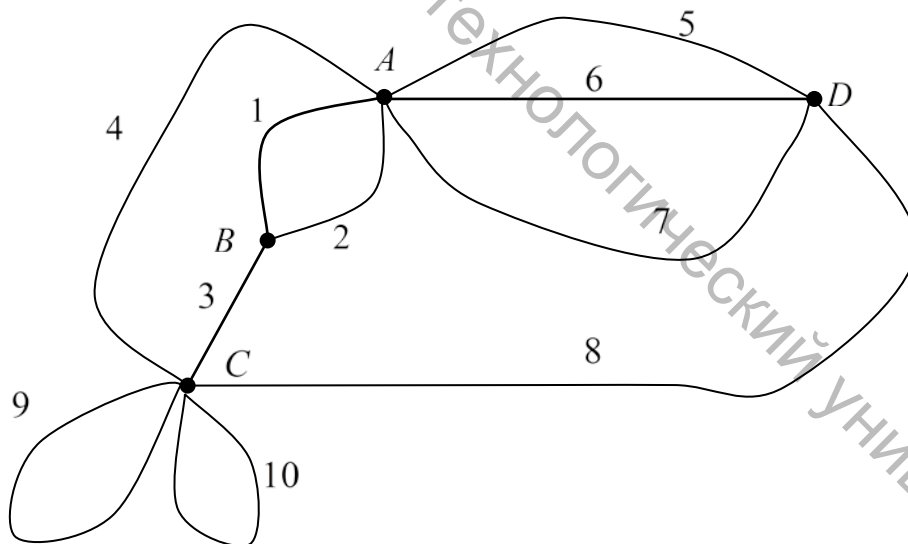
$sm_{41} = 3$ – из вершины D проведено три ребра, которые соединяют данную вершину графа с вершиной A .

$sm_{42} = 0$ – нет ребер, которые соединяют вершины D и B .

$sm_{43} = 1$ – проведено одно ребро, которое соединяет вершину D с вершиной C .

$sm_{44} = 0$ – при вершине D нет петель.

Строим не ориентированный граф.



Для построенного графа составим матрицу инцидентности.

Для составления матрицы инцидентности проанализируем ребра, не ориентированного графа. При вершине A имеется шесть ребер 1, 2, 4, 5, 6, 7. Следовательно, $in_{11} = in_{12} = in_{14} = in_{15} = in_{16} = in_{17} = 1$, а остальные элементы первой строки матрицы равны 0. При вершине B имеется три ребра 1, 2, 3. Следовательно, $in_{21} = in_{22} = in_{23} = 1$, а остальные элементы второй строки матрицы равны 0. При вершине C имеется пять ребер 3, 4, 8, 9, 10. Следовательно,

$in_{33} = in_{34} = in_{38} = in_{39} = in_{310} = 1$, остальные элементы третьей строки матрицы равны 0. При вершине D имеется четыре ребра 5, 6, 7, 8. Следовательно, $in_{45} = in_{46} = in_{47} = in_{48} = 1$, остальные элементы четвертой строки матрицы In равны 0.

Тогда в условиях данной задачи матрица инцидентности не ориентированного графа имеет вид:

$$In = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix}$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

2. Построим орграф, который имеет заданную матрицу Sm матрицей смежности.

$$Sm = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} \end{matrix}$$

Пусть граф имеет вершины A, B, C, D . Ребра графа обозначим числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18. Для построения графа, каждой вершине $n \in N$ однозначно сопоставим точку на плоскости. Проанализируем элементы матрицы Sm , для ориентированного графа. Так как $sm_{11} = 0$, то при вершине A нет петель. Значение $sm_{12} = 2$, следовательно, из вершины A проведены две стрелки к вершине B . Значение элемента матрицы $sm_{13} = 1$, следовательно, из вершины A проведена одна стрелка к вершине C . Элемент матрицы $sm_{14} = 3$, из вершины A проведены три стрелки к вершине D . Аналогичным образом проведем ребра из вершин B, C, D .

$sm_{21} = 2$ – проведены две стрелки от вершины B к вершине A .

$sm_{22} = 0$ – при вершине B нет петель.

$sm_{23} = 1$ – проведена одна стрелка от вершины B к вершине C .

$sm_{24} = 0$ – нет ребер, которые соединяют вершины B и D .

$sm_{31} = 1$ – проведена одна стрелка от вершины C к вершине A .

$sm_{32} = 1$ – проведена одна стрелка от вершины C к вершине B .

$sm_{33} = 2$ – в вершине C имеется две петли.

$sm_{34} = 1$ – проведена одна стрелка от вершины C к вершине D .

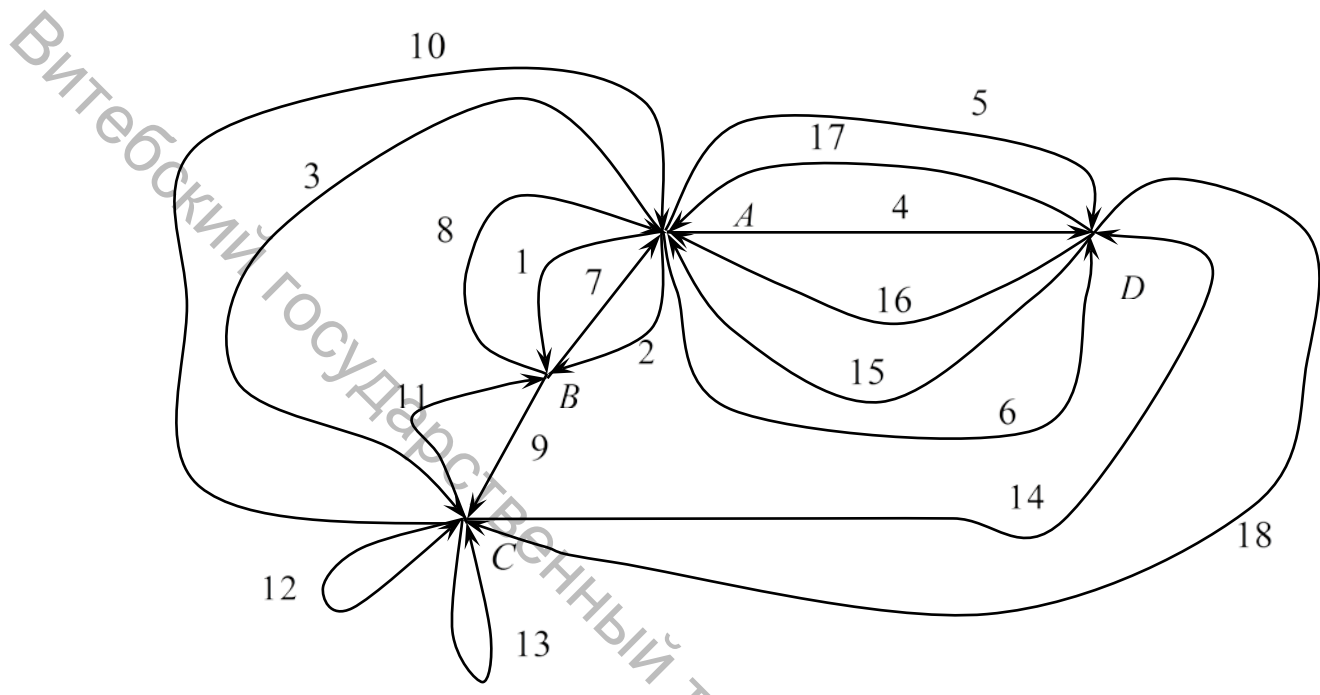
$sm_{41} = 3$ – из вершины D проведены три стрелки в вершину A .

$sm_{42} = 0$ – нет ребер, которые соединяют вершины D и B .

$sm_{43} = 1$ – проведена одна стрелка из вершины D в вершину C .

$sm_{44} = 0$ – при вершине D нет петель.

Строим оргграф, который соответствует заданной матрице смежности.



Определим матрицу инцидентности для построенного графа. В матрице будет четыре строки (по числу вершин) и восемнадцать столбцов (по числу ребер). Рядом с матрицей инцидентности в правом крайнем столбце указываются вершины графа A, B, C, D , а в нижней строке номера ориентированных ребер графа.

Для составления матрицы инцидентности проанализируем ребра оргграфа. Из вершины A выходят шесть ребер 1, 2, 3, 4, 5, 6. Следовательно, элементы первой строки с этими номерами равны 1. В вершину A входят шесть ребер 7, 8, 10, 15, 16, 17. Следовательно, элементы первой строки с этими номерами равны (-1) , а остальные элементы первой строки матрицы равны 0. Из вершины B выходят три ребра 7, 8, 9. Следовательно, элементы второй строки с этими номерами равны 1. В вершину B входят три ребра 1, 2, 11. Следовательно, элементы второй строки с этими номерами равны (-1) , а остальные элементы второй строки матрицы равны 0. Из вершины C выходят три ребра 10, 11, 14. Следовательно, элементы третьей строки с этими номерами равны 1. В вершину A входят три ребра 3, 9, 18. Следовательно, элементы третьей строки с этими номерами равны (-1) , а остальные элементы третьей строки матрицы равны 0. В вершине C имеется две петли 12 и 13. В матрице им будут соответствовать нулевые элементы, так как эти дуги входят и выходят из вершины одновременно. Из вершины D выходят четыре ребра 15, 16, 17, 18. Следовательно, элементы

четвертой строки с этими номерами равны 1. В вершину D входят четыре ребра 4, 5, 6, 14. Следовательно, элементы четвертой строки с этими номерами равны (-1) , а остальные элементы четвертой строки матрицы равны 0. Тогда в условиях данной задачи матрица инцидентности орграфа имеет вид:

$$In = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix}$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18

Петле соответствует нулевой столбец. Матрица инцидентности указывает на наличие петель в орграфе, но не указывает, каким вершинам они инцидентны.

5.3 Задания для решения на практическом занятии

5.3.1 Даны два множества $A = \{2, 3, 5\}$ и $B = \{4, 7, 9\}$. Найти прямые произведения $A \times B$, $B \times A$ и бинарные отношения $R = \{\langle a, b \rangle \mid a \in A \wedge b \in B \wedge "a \text{ делит } b"\}$, $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a \in A \wedge b \in B \wedge "b \text{ больше } a"\}$.

5.3.2 Пусть A – множество всех натуральных чисел из отрезка $[1; 4]$, а B – множество всех натуральных чисел из отрезка $[10; 15]$. Найти прямые произведения $A \times B$, $B \times A$ отношение $R = \{\langle a, b \rangle \mid a \in A \wedge b \in B \wedge "b \text{ делится } a"\}$.

5.3.3 При каких условиях выполняется равенство упорядоченных троек $\langle \langle a; b \rangle; c; \langle b; c \rangle \rangle$ и $\langle \langle d; e \rangle; m; \langle a; d \rangle \rangle$?

5.3.4 Доказать, что при любом наборе элементов, для произвольных множеств A, B, C, D выполняются равенства

- | | |
|--|---|
| а) $Dom(A \times B) = A$; | б) $Im(A \times B) = B$; |
| в) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$; | г) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$; |
| д) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$; | е) $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$. |

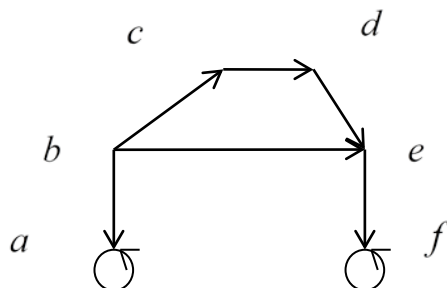
5.3.5 Для бинарного отношения R найти $Dom(R)$, $Im(R)$, $R^\cup$, $R \circ R$, $R \circ R^\cup$, $R^\cup \circ R$.

- а) $R = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{N} \wedge "x \text{ делит } y"\}$;
 б) $R = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{Q} \wedge x + y \leq 0\}$;
 в) $R = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{Q} \wedge 2 \cdot x \leq 3 \cdot y\}$.

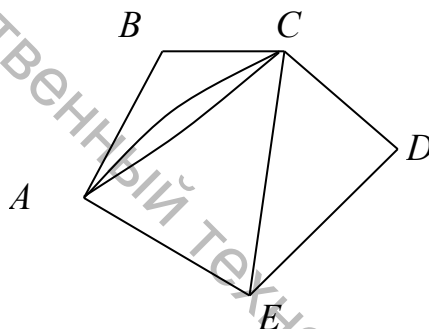
5.3.6 Для бинарных отношений $R = \{\langle 4, 5 \rangle; \langle 3, 1 \rangle; \langle 2, 4 \rangle; \langle 3, 6 \rangle; \langle 1, 5 \rangle; \langle 8, 5 \rangle\}$ и $S = \{\langle 3, 4 \rangle; \langle 5, 2 \rangle; \langle 7, 1 \rangle; \langle 4, 9 \rangle; \langle 6, 8 \rangle\}$ найти области определения и значения, инверсии и всевозможные их композиции, а также их инверсий.

5.3.7 Построить граф бинарного отношения $R = \{\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, d \rangle, \langle b, k \rangle, \langle b, m \rangle, \langle m, n \rangle, \langle n, n \rangle, \langle e, e \rangle\}$.

5.3.8 Записать бинарное отношение, которому соответствует орграф, изображённый на рисунке



5.3.9 Для неориентированного графа, который изображён на рисунке, записать матрицу смежности Sm и матрицу инцидентности In .

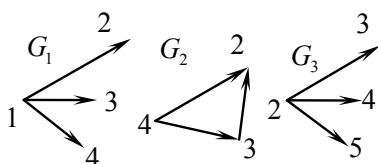


5.3.10 Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Построить соответствующий ей

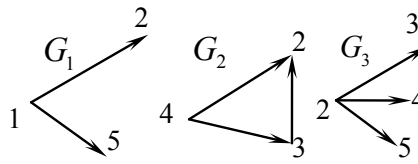
ориентированный граф, имеющий матрицу A , своей матрицей смежности. Найти матрицу инцидентности для построенного графа.

5.3.11 Построить матрицу смежности и инцидентности объединения графов $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$.

а)

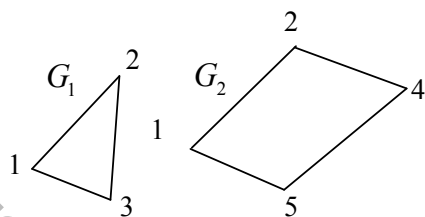


б)

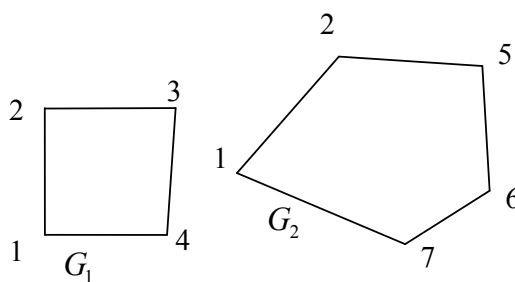


5.3.12 Найти сумму графов G_1 и G_2 .

а)

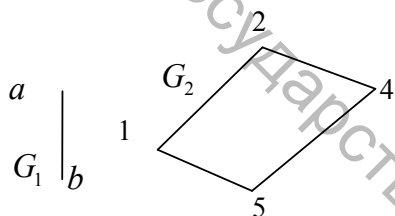


б)

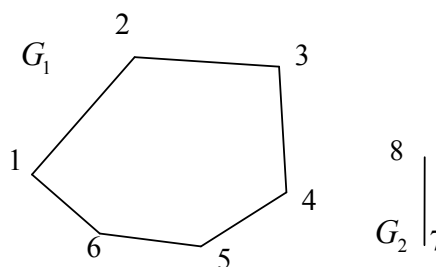


5.3.13 Найти произведение графов G_1 и G_2 .

а)



б)



5.4 Задания для контроля знаний студентов по пройденной теме

5.4.1 Пусть A – множество всех натуральных чисел из отрезка $[1; 4]$, а B – множество всех натуральных чисел из отрезка $[4; 9]$. Найти прямые произведения $A \times B$, $B \times A$ отношение $R = \{\langle a, b \rangle \mid a \in A \wedge b \in B \wedge "b \text{ квадрат } a"\}$.

5.4.2 При каких условиях выполняется равенство упорядоченных пар $\langle \langle a; b \rangle; c \rangle$ и $\langle \langle d; e \rangle; f \rangle$?

5.4.3 Доказать, что при любом наборе элементов для произвольных множеств A, B, C выполняется равенство $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

5.4.4 Для бинарного отношения $R = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \{1; 2; 3; 4\} \wedge "y \text{ делит } x"\}$ найти $Dom(R)$, $Im(R)$, $R^\cup$, $R \circ R$, $R \circ R^\cup$, $R^\cup \circ R$.

5.4.5 Для бинарных отношений $R = \{\langle 1, 3 \rangle; \langle 2, 4 \rangle; \langle 3, 5 \rangle; \langle 4, 6 \rangle; \langle 5, 7 \rangle; \langle 6, 8 \rangle\}$ и $S = \{\langle 4, 1 \rangle; \langle 2, 3 \rangle; \langle 5, 7 \rangle; \langle 8, 5 \rangle; \langle 3, 6 \rangle\}$ найти область определения и область значений, инверсии и всевозможные композиции отношений, а также их инверсий.

5.4.6 Дана матрица $Sm = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Необходимо: а) построить соот-

ветствующий ей не ориентируемый граф, который имеет заданную матрицу Sm

матрицей смежности, определить матрицу инцидентности In для построенного графа; б) построить орграф (ориентируемый граф), который имеет матрицу смежности Sm . Найдите матрицу инцидентности In для построенного орграфа.

6 ДИСКРЕТНОЕ СЕТЕВОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

Содержание: сетевой график, критические работы, критический путь, оптимизация сетевой модели по критерию минимума времени.

6.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Сетевой график должен удовлетворять условиям:

- 1) существует единственная вершина R_0 графа, из которой дуги выходят;
- 2) существует единственная вершина R_n графа, в которую дуги входят;
- 3) в графе отсутствуют замкнутые пути;
- 4) для любой вершины графа существует единственный путь, проходящий из вершины R_0 в вершину R_n , который содержит дугу при данной вершине.

В сетевом планировании вершины называются событиями, а дуги – работами; t_j – время выполнения j -ой работы; работа r_j называется *опорной* работой r_i , если она предшествует ей; *критический путь* – самый длинный путь от начальной до конечной вершины.

Для оптимизации сетевой модели по критерию минимума времени изображаем график в масштабе реального времени. Из него определяем критические и некритические работы. *Критические работы* – это работы, которые не имеют запаса времени. Критический путь – это самый длинный путь прохождения от начального до конечного события, но при этом необходимо выполнить весь комплекс работ.

Оптимизация производится путем переноса средств с некритических работ, которые имеют резерв времени, на работы критического пути. Нельзя переносить средства на работы, принадлежащие одному пути.

Перенос средств с некритической работы r_i пути T_n на работу r_j критического пути $T_{кр}$ (с учетом коэффициентов пересчета) осуществляется по формулам:

$$\begin{cases} \tilde{x}_i = \tilde{x}_j, \\ T_{кр} - t_j \cdot c_j \cdot \tilde{x}_j = T_n + t_i \cdot c_i \cdot \tilde{x}_i, \end{cases} \quad (6.1.1)$$

$$\tilde{x}_i = \tilde{x}_j = \frac{T_{кр} - T_n}{t_i \cdot c_i + t_j \cdot c_j}. \quad (6.1.2)$$

При этом необходимо учитывать условие допустимости:

$$\tilde{x}_i \leq \frac{t_{исрв}}{t_i \cdot c_i}. \quad (6.1.3)$$

Далее выполняем пересчет длительности работ по формулам:

$$\begin{cases} t_j^{(1)} = t_j - t_j \cdot c_j \cdot \tilde{x}_j, \\ t_i^{(1)} = t_i + t_i \cdot c_i \cdot \tilde{x}_i. \end{cases} \quad (6.1.4)$$

Определяем новый критический путь

$$\begin{cases} T_{кр}^{(1)} = T_{кр} - t_j + t_j^{(1)}, \\ T_{кр}^{(1)} = T_n - t_i + t_i^{(1)}. \end{cases} \quad (6.1.5)$$

Оптимизация модели по критерию минимума времени считается законченной, если все пути от начального события до конечного события оказываются равными.

6.2 Примеры решения типовых задач

6.2.1 Дана упорядоченная структурно-временная таблица перечня работ r_i , где $i = \overline{1, 12}$. Необходимо построить сетевой график, определить критический путь, критические работы, резерв времени, провести графический анализ комплекса работ и оптимизацию сетевой модели по критерию минимума времени, при заданных ресурсах. Определить экономию. Построить сетевой план работ.

Работа r_i ($i = \overline{1, 12}$)	Опорная работа r_j	Коэффициент перерасчета c_i ($i = \overline{1, 12}$)	Время работы t_i ($i = \overline{1, 12}$)
r_1	—	0,1	5
r_2	—	0,2	8
r_3	r_1	0,3	3
r_4	r_1	0,4	8
r_5	r_3	0,5	2
r_6	r_2	0,6	4

r_7	r_3	0,7	7
r_8	r_4, r_5	0,8	5
r_9	r_8	0,9	3
r_{10}	r_6, r_7	1,0	5
r_{11}	r_9	1,1	4
r_{12}	r_{10}	1,2	3

Решение. Построим сетевой график для заданной структурно-временной таблицы (рис. 6.2.1.1). Опорная работа r_1 предшествует работе r_3 и r_4 . Следовательно, из конца стрелки r_1 выходят две стрелки r_3 и r_4 . Опорная работа r_3 предшествует работе r_5 . Следовательно, из конца стрелки r_3 выходит стрелка r_5 . Проведя аналогичные рассуждения для остальных ребер и используя свойства ориентируемого графа, строим сетевой график.

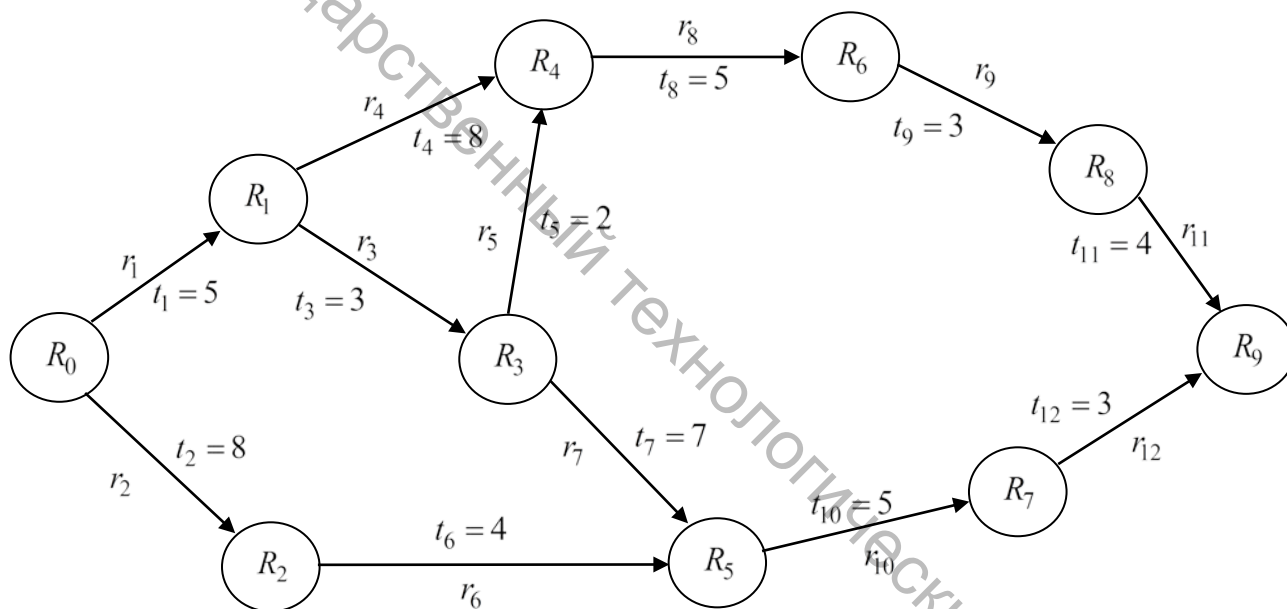


Рисунок 6.2.1.1 – Сетевой граф задачи 6.2.1

Из сетевого графика видим, что существуют четыре пути из вершины R_0 в вершину R_9 : первый путь – $R_0R_1R_4R_6R_8R_9$; второй путь – $R_0R_1R_3R_4R_6R_8R_9$; третий путь – $R_0R_1R_3R_5R_7R_9$; четвертый путь – $R_0R_2R_5R_7R_9$. Рассчитаем длительность путей от вершины R_0 до вершины R_9 по времени.

$$T_1 = t_1 + t_4 + t_8 + t_9 + t_{11} = 5 + 8 + 5 + 3 + 4 = 25 \text{ (дней)},$$

$$T_2 = t_1 + t_3 + t_5 + t_8 + t_9 + t_{11} = 5 + 3 + 2 + 5 + 3 + 4 = 22 \text{ (дня)},$$

$$T_3 = t_1 + t_3 + t_7 + t_{10} + t_{12} = 5 + 3 + 7 + 5 + 3 = 23 \text{ (дня)},$$

$$T_4 = t_2 + t_6 + t_{10} + t_{12} = 8 + 4 + 5 + 3 = 20 \text{ (дней)}.$$

Критическим является самый длинный путь, то есть путь $T_1 = 25$ дням. Остальные пути имеют резервы времени $\Delta T_2 = 3$ дня, $\Delta T_3 = 2$ дня, $\Delta T_4 = 5$ дней. Таким образом, критический путь T_{kp} , равный 25 дням, означает, что за это время удастся выполнить все работы. То есть 25 дней это минимальное время, за которое необходимо выполнить весь комплекс работ заданного технологического процесса. Если работы имеют резервы времени, то при выполнении работ по критическому пути, мы можем не «спешить», в пределах ресурсов времени, которые мы имеем.

Изобразим сетевой график в масштабе времени (рис. 6.2.1.2), который начнем строить с изображения критического пути.

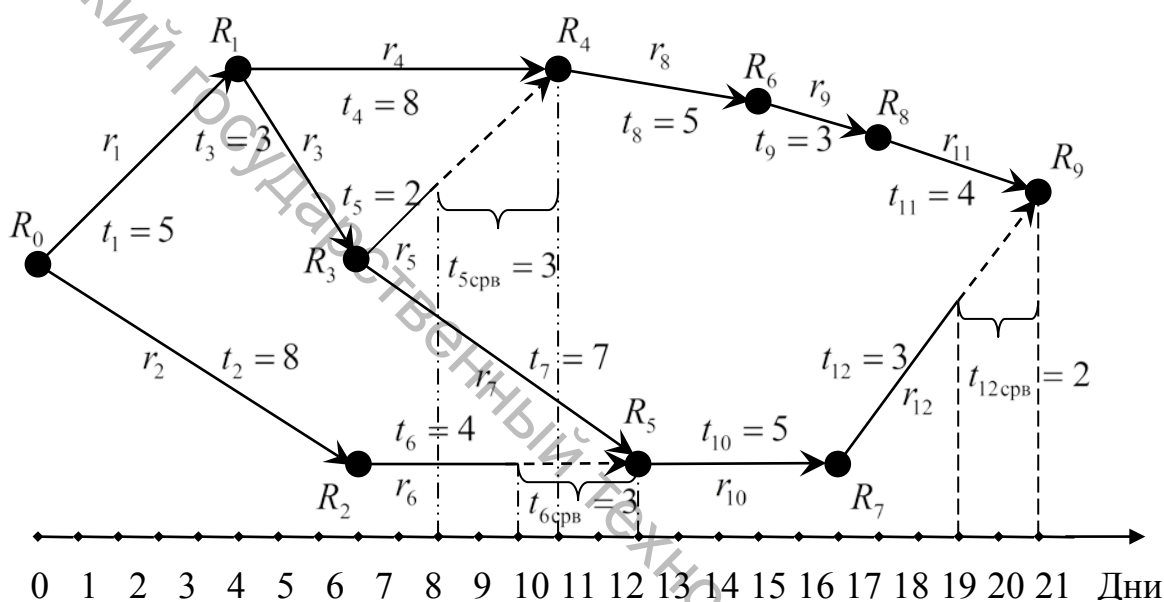


Рисунок 6.2.1.2 – Начальный сетевой график в масштабе времени

График в масштабе времени показывает, что свободные резервы времени имеют работы:

- работа r_2 имеет резерв времени три свободных дня ($t_{5\text{срв}} = 3$ дня);
- работа r_6 имеет резерв времени три свободных дня ($t_{6\text{срв}} = 3$ дня);
- работа r_{10} имеет резерв времени два свободных дня ($t_{12\text{срв}} = 2$ дня).

Таким образом, критическими работами являются работы, которые не имеют резерва времени, то есть работы $r_1, r_2, r_3, r_4, r_7, r_8, r_9, r_{10}, r_{11}$.

Оптимизация графика состоит в ликвидации свободных резервов времени, для того чтобы изменить критический путь. Оптимизация производится путем переноса средств с некритических работ r_5, r_6, r_{12} , которые имеют резерв времени, на работы критического пути. При оптимизации необходимо учитывать, что нельзя переносить средства на работы, принадлежащие одному и тому же пути. То есть нельзя переносить, например, средства с работы r_2 на работу r_8 , так как эти работы принадлежат одному и тому же пути T_2 .

Проведем первый этап оптимизации. Перенесем часть средств с некритической работы r_2 пути T_2 на работу r_1 критического пути T_1 .

Рассчитаем величину переносимых средств $\tilde{x}$.

$$\begin{cases} \tilde{x}_5 = \tilde{x}_4, \\ T_{кр} - t_4 c_4 \tilde{x}_4 = T_2 + t_5 c_5 \tilde{x}_5. \end{cases}$$

$$\tilde{x}_5 = \tilde{x}_4 = \frac{T_{кр} - T_2}{t_4 c_4 + t_5 c_5} = \frac{25 - 22}{8 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,5} \approx 0,71.$$

Проверим условие допустимости решения.

$$\tilde{x}_5 = 0,71 \leq \frac{t_{срв}}{t_5 \cdot c_5} = \frac{3}{2 \cdot 0,5} = 3.$$

Таким образом, условие допустимости решения выполняется. Проведем расчет длительности работ с учетом оптимизации.

$$t_4^{(1)} = t_4 - t_4 \cdot c_4 \cdot \tilde{x}_4 = 8 - 8 \cdot 0,4 \cdot 0,71 = 5,728 \approx 5,5 \text{ (дней)};$$

$$t_5^{(1)} = t_5 + t_5 \cdot c_5 \cdot \tilde{x}_5 = 2 + 2 \cdot 0,5 \cdot 0,71 = 2,71 \approx 2,5 \text{ (дня)}.$$

Рассчитываем новый критический путь, после первого этапа оптимизации.

$$T_{кр}^{(1)} = T_{кр} - t_4 + t_4^{(1)} = 25 - 8 + 5,5 = 22,5 \text{ (дня)};$$

$$T_{кр}^{(1)} = T_2 - t_5 + t_5^{(1)} = 22 - 2 + 2,5 = 22,5 \text{ (дня)}.$$

Таким образом, новый максимальный путь работ составил 22,5 дня. Оптимизация позволила получить экономию в два с половиной дня. Рассчитаем длительность путей от вершины R_0 до вершины R_9 по времени после первого этапа оптимизации.

$$T_1^{(1)} = t_1 + t_4^{(1)} + t_8 + t_9 + t_{11} = 5 + 5,5 + 5 + 3 + 4 = 22,5 \text{ (дня)};$$

$$T_2^{(1)} = t_1 + t_3 + t_5^{(1)} + t_8 + t_9 + t_{11} = 5 + 3 + 2,5 + 5 + 3 + 4 = 22,5 \text{ (дня)};$$

$$T_3 = t_1 + t_3 + t_7 + t_{10} + t_{12} = 5 + 3 + 7 + 5 + 3 = 23 \text{ (дня)};$$

$$T_4 = t_2 + t_6 + t_{10} + t_{12} = 8 + 4 + 5 + 3 = 20 \text{ (дней)}.$$

В результате оптимизации получаем путь, который по времени выполнения работы оказывается меньше первоначального пути $T_3 = 23$ дня, а, следовательно, новым критическим путем является путь $T_3 = T_{кр}^{(2)} : (R_0 R_1 R_3 R_5 R_7 R_9)$, так

как он является самым длинным путем, равным 23 дням запланированной работы.

Изобразим новый сетевой график в масштабе времени (рис. 6.2.1.3).

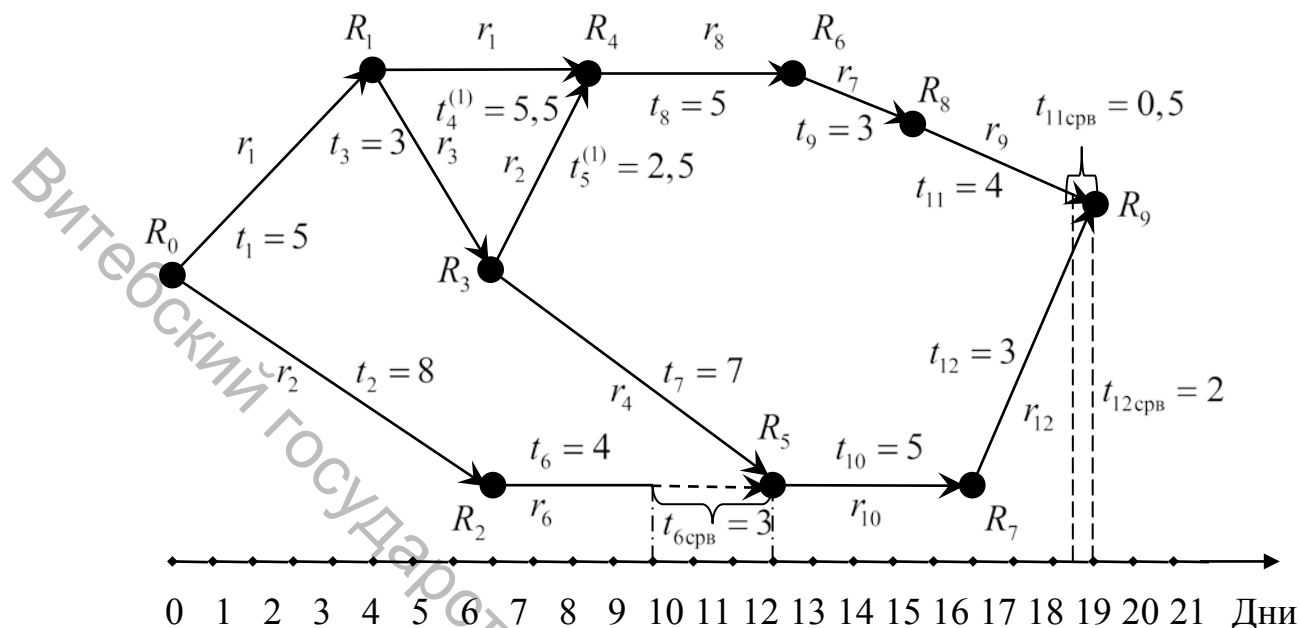


Рисунок 6.2.1.3 – Первый сетевой график в масштабе времени

Новый график в масштабе времени показывает, что свободные резервы времени имеют работы:

- работа r_6 имеет резерв времени три свободных дня ($t_{6срв} = 3$ дня);
- работа r_9 имеет резерв времени половину свободного дня ($t_{11срв} = 0,5$ дня).

Таким образом, критическими работами являются работы, которые не имеют резерва времени, после первого этапа оптимизации, то есть работы $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_7, r_8, r_9, r_{10}, r_{12}$.

Проведем второй этап оптимизации. Перенос часть средств с не критической работы r_6 пути T_4 мы можем осуществлять на работы r_1, r_3, r_7 критического пути $T_3 = T_{kp}^{(2)}$. Перенесем, на пример, часть средств с не критической работы r_6 пути T_4 на работу r_1 критического пути $T_3 = T_{kp}^{(2)}$.

Рассчитаем величину переносимых средств.

$$\begin{cases} \tilde{x}_6 = \tilde{x}_1, \\ T_{kp}^{(2)} - t_1 c_1 \tilde{x}_1 = T_4 + t_6 c_6 \tilde{x}_6. \end{cases}$$

$$\tilde{x}_6 = \tilde{x}_1 = \frac{T_{kp}^{(2)} - T_4}{t_1 c_1 + t_6 c_6} = \frac{23 - 20}{5 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,6} \approx 1,03.$$

Проверим условие допустимости решения.

$$\tilde{x}_6 = 1,03 \leq \frac{t_{6\text{срв}}}{t_6 \cdot c_6} = \frac{3}{4 \cdot 0,6} = 1,25.$$

Таким образом, условие допустимости решения выполняется. Проведем расчет длительности работ с учетом второго этапа оптимизации.

$$\begin{aligned} t_1^{(1)} &= t_1 - t_1 \cdot c_1 \cdot \tilde{x}_1 = 5 - 5 \cdot 0,1 \cdot 1,03 = 4,485 \approx 4,5 \text{ (дня)}; \\ t_6^{(1)} &= t_6 + t_6 \cdot c_6 \cdot \tilde{x}_6 = 4 + 4 \cdot 0,6 \cdot 1,03 = 6,472 \approx 6,5 \text{ (дней)}. \end{aligned}$$

Проведем расчет нового критического пути.

$$\begin{aligned} T_{kp}^{(3)} &= T_{kp}^{(2)} - t_1 + t_1^{(1)} = 23 - 5 + 4,5 = 22,5 \text{ (дня)}; \\ T_{kp}^{(3)} &= T_4 - t_6 + t_6^{(1)} = 20 - 4 + 6,5 = 22,5 \text{ (дня)}. \end{aligned}$$

Таким образом, новый критический путь, после второго этапа оптимизации составил 22,5 дня. Оптимизация позволила получить экономию в два с половиной дня. Рассчитаем длительность путей от вершины R_0 до вершины R_9 по времени после второго этапа оптимизации.

$$\begin{aligned} T_1^{(2)} &= t_1^{(1)} + t_4^{(1)} + t_8 + t_9 + t_{11} = 4,5 + 5,5 + 5 + 3 + 4 = 22 \text{ (дня)}; \\ T_2^{(2)} &= t_1^{(1)} + t_3 + t_5^{(1)} + t_8 + t_9 + t_{11} = 4,5 + 3 + 2,5 + 5 + 3 + 4 = 22 \text{ (дня)}; \\ T_3^{(1)} &= t_1^{(1)} + t_3 + t_7 + t_{10} + t_{12} = 4,5 + 3 + 7 + 5 + 3 = 22,5 \text{ (дней)}; \\ T_4^{(1)} &= t_2 + t_6^{(1)} + t_{10} + t_{12} = 8 + 6,5 + 5 + 3 = 22,5 \text{ (дней)}. \end{aligned}$$

В результате второго этапа оптимизации получаем новый критический путь $T_3^{(1)} = T_4^{(1)} = T_{kp}^{(3)} = 22,5$ дня. Изобразим новый сетевой график в масштабе времени (рис. 6.2.1.4).

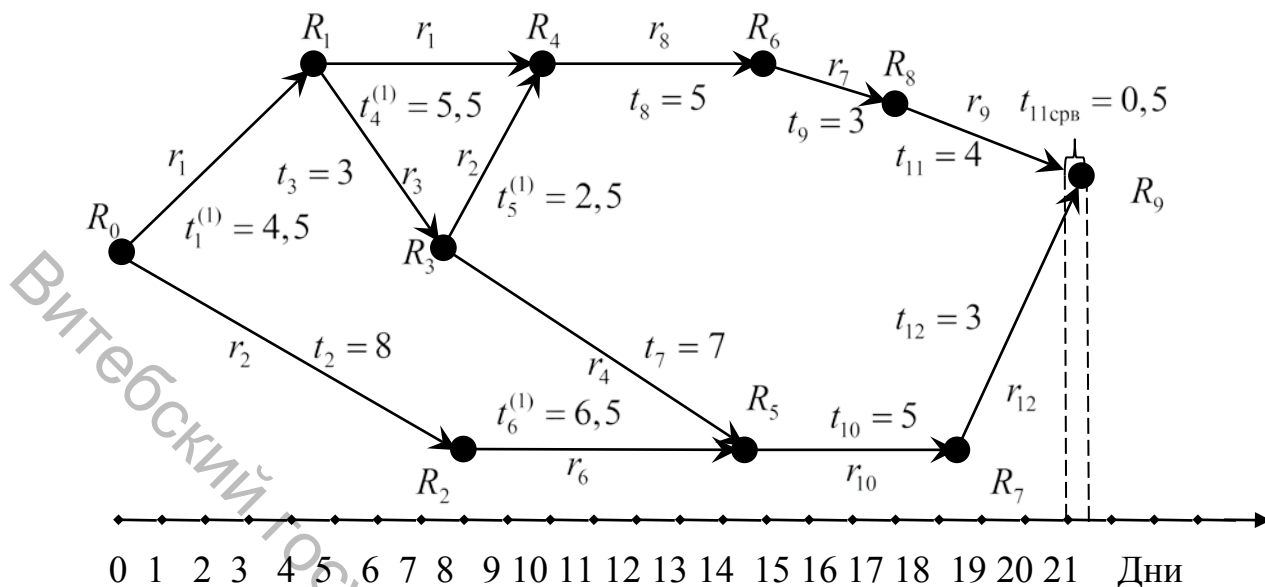


Рисунок 6.2.1.4 – Второй сетевой график в масштабе времени

Новый график в масштабе времени показывает, что свободные резервы времени имеет работа r_9 ($t_{11\text{срв}} = 0,5$ дня).

Таким образом, критическими работами являются работы, которые не имеют резерва времени, после первого этапа оптимизации, то есть работы $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, r_{10}, r_{12}$.

Проведем третий этап оптимизации. Перенесем часть средств с не критической работы r_{11} , которая принадлежит первому и второму пути, на работу r_{10} лежащей на критическом пути $T_3^{(1)} = T_4^{(1)} = T_{кр}^{(3)}$.

Рассчитаем величину переносимых средств.

$$\begin{cases} \tilde{x}_{11} = \tilde{x}_{10}, \\ T_{кр}^{(3)} - t_{10}c_{10}\tilde{x}_{10} = T_{1,2}^{(2)} + t_{11}c_{11}\tilde{x}_{11}. \end{cases}$$

$$\tilde{x}_{11} = \tilde{x}_0 = \frac{T_{кр}^{(3)} - T_{1,2}^{(2)}}{t_{11}c_{11} + t_{10}c_{10}} = \frac{22,5 - 22}{4 \cdot 1,1 + 5 \cdot 1} \approx 0,053.$$

Проверим условие допустимости решения.

$$\tilde{x}_6 = 0,053 \leq \frac{t_{11\text{срв}}}{t_{11} \cdot c_{11}} = \frac{0,5}{4 \cdot 1,1} = 0,114.$$

Таким образом, условие допустимости решения выполняется. Проведем расчет длительности работ с учетом третьего этапа оптимизации.

$$t_{10}^{(1)} = t_{10} - t_{10} \cdot c_{10} \cdot \tilde{x}_{10} = 5 - 5 \cdot 1 \cdot 0,053 = 4,735 \approx 4,5 \text{ (дней);}$$

$$t_{11}^{(1)} = t_{11} + t_{11} \cdot c_{11} \cdot \tilde{x}_{11} = 4 + 4 \cdot 1,1 \cdot 0,053 = 4,2332 \approx 4 \text{ (дня).}$$

Проведем расчет нового критического пути.

$$T_{кр}^{(4)} = T_{кр}^{(3)} - t_{10} + t_{10}^{(1)} = 22,5 - 5 + 4,5 = 22 \text{ (дня);}$$

$$T_{кр}^{(4)} = T_{1(2)} - t_{11} + t_{11}^{(1)} = 22 - 4 + 4 = 22 \text{ (дня).}$$

Таким образом, новый критический путь, после третьего этапа оптимизации составил 22 дня. Оптимизация позволила получить экономию в три дня. Рассчитаем длительность путей от вершины R_0 до вершины R_9 после третьего этапа оптимизации.

$$T_1^{(3)} = t_1^{(1)} + t_4^{(1)} + t_8 + t_9 + t_{11}^{(1)} = 4,5 + 5,5 + 5 + 3 + 4 = 22 \text{ (дня);}$$

$$T_2^{(3)} = t_1^{(1)} + t_3 + t_5^{(1)} + t_8 + t_9 + t_{11}^{(1)} = 4,5 + 3 + 2,5 + 5 + 3 + 4 = 22 \text{ (дня);}$$

$$T_3^{(2)} = t_1^{(1)} + t_3 + t_7 + t_{10}^{(1)} + t_{12} = 4,5 + 3 + 7 + 4,5 + 3 = 22 \text{ (дней);}$$

$$T_4^{(2)} = t_2 + t_6^{(1)} + t_{10}^{(1)} + t_{12} = 8 + 6,5 + 4,5 + 3 = 22 \text{ (дней).}$$

Длительность всех четырех путей от вершины R_0 до вершины R_9 , после третьего этапа оптимизации, стали равны. Следовательно, процесс оптимизации сетевой модели, по критерию минимума времени, завершен.

Критический путь составляет двадцать два дня. Три этапа оптимизации позволили получить экономию в три дня.

Оптимальный сетевой план работ можно изобразить в виде сетевого графика, структурно-временной таблицы перечня работ по организации производства или в виде графика в масштабе времени.

Изобразим оптимальный сетевой план работ в виде сетевого графика (рис. 6.2.1.5).

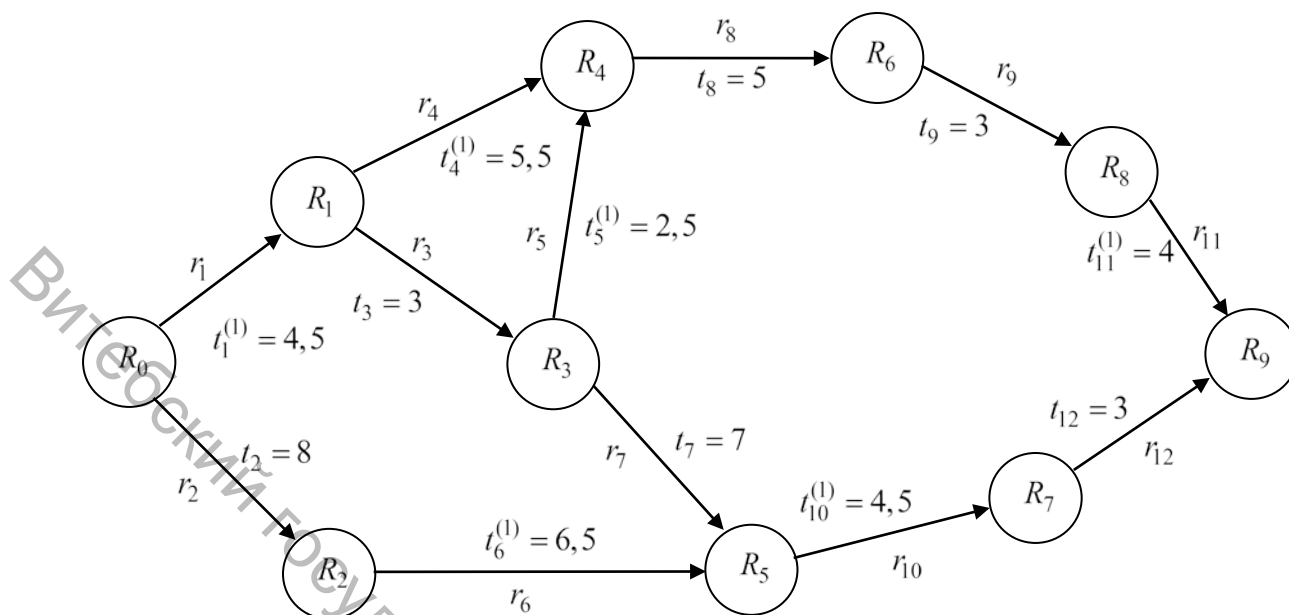


Рисунок 6.2.1.5 – Сетевой граф задачи 6.2.1 после оптимизации

6.3 Задания для решения на практическом занятии

6.3.1 Дана упорядоченная структурно-временная таблица перечня работ r_i . Необходимо построить сетевой график, определить критический путь, критические и не критические работы, резервы времени.

а)

Работа r_i	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9
Опорная работа r_j	—	—	—	r_1	r_1	r_2, r_4	r_3	r_5, r_6, r_7	r_8
Время работы t_i	2	4	1	3	5	2	7	3	3
Коэффициент перерасчета c_i	0,1	0,2	0,3	0,8	1	0,4	0,7	0,2	0,5

б)

Работа r_i	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8
Опорная работа r_j	—	—	r_1	r_2, r_3	r_2, r_3	r_1	r_4	r_5, r_6, r_7
Время работы t_i	1	2	3	1	5	6	4	2
Коэффициент перерасчета c_i	0,2	0,5	0,6	1,1	0,2	0,6	0,4	0,9

в)

Работа r_i	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}
Опорная работа r_j	—	—	—	—	r_1	r_3	r_3	r_2, r_5, r_6	r_4	r_7, r_8, r_9
Время работы t_i	3	5	2	4	1	3	7	3	5	4
Коэффициент перерасчета c_i	0,1	0,3	0,6	0,2	0,4	0,5	0,8	0,9	1	0,9

6.3.2 По данным задачи 6.3.1 провести оптимизацию сетевой модели по критерию минимума времени. Определить экономию. Построить новый сетевой план работ.

6.4 Задания для контроля знаний студентов по пройденной теме

6.4.1 Дана упорядоченная структурно-временная таблица перечня работ по производству некоторого вида продукции товаров.

Работа r_i	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9
Опорная работа r_j	–	r_1	–	r_1	r_3, r_4	r_2, r_5	r_2, r_5	r_6	r_7
Время работы t_i	3	5	7	5	4	7	8	6	5
Коэффициент перерасчета c_i	0,2	0,4	0,3	0,7	1	0,3	0,8	0,4	0,6

Постройте сетевой график, определите критический путь, критические работы, резерв времени, проведите графический анализ комплекса работ и оптимизацию сетевой модели по критерию минимума времени при заданных ресурсах. Определить экономию. Построить новый сетевой план работ.

7 ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

Содержание: функции (отображения), инъективность и обратимость функций, виды бинарных отношений, бинарные и n-местные операции.

7.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Бинарное отношение f называется *функцией* (отображением), если для любых x, y, z из того, что $\langle x, y \rangle \in f$ и $\langle x, z \rangle \in f$, следует, что $y = z$. Если $\langle x, y \rangle \in f$, то используется общепринятая запись $y = f(x)$. Областью определения функции f называется множество $\text{Dom } f = \{x \in A \mid \exists y \in B, \langle x, y \rangle \in f\}$, а областью значений – множество $\text{Im } f = \{y \in B \mid \exists x \in A, \langle x, y \rangle \in f\}$. Композиция функций понимается как композиция отношений.

Функция f называется отображением множества A в множество B ($f: A \xrightarrow{B} B$), если выполняется равенство $A = \text{Dom } f$ и включение $\text{Im } f \subset B$.

Функция f называется отображением множества A на множество B ($f: A \xrightarrow{\text{на}} B$), если выполняются равенства $A = \text{Dom } f$ и $B = \text{Im } f$.

Функция f называется *инъективной*, если для любых $x, y \in \text{Dom } f$ из условия $f(x) = f(y)$ следует, что $x = y$. В силу закона контрапозиции следует, что функция f инъективна тогда и только тогда, когда для любых x, y , если $x \neq y$, то $f(x) \neq f(y)$. Функция $\varphi: B \xrightarrow{\text{на}} A$ называется обратной к функции $f: A \xrightarrow{\text{на}} B$, если по определению $\varphi \circ f = i_A$, $f \circ \varphi = i_B$, где i_A, i_B – соответствующие тождественные отображения A на множество A и B на B .

Пусть бинарное отношение $R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \}$ определено на непустом множестве A . Бинарное отношение R называется *рефлексивным*, если $\langle x, x \rangle \in R$ и *антирефлексивным*, если $\langle x, x \rangle \notin R$. Бинарное отношение R называется *симметричным*, если $\langle x, y \rangle \in R \rightarrow \langle y, x \rangle \in R$ и *антисимметричным*, если $\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R \rightarrow x = y$. Бинарное отношение R называется *транзитивным*, если $\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \rightarrow \langle x, z \rangle \in R$.

Бинарное отношение R является *отношением эквивалентности*, если оно обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности. Бинарное отношение R является *отношением порядка*, если оно обладает свойствами антисимметричности и транзитивности. Бинарное отношение R является *отношением линейного порядка*, если $\forall x, y \in A \rightarrow \langle x, y \rangle \in R \vee \langle y, x \rangle \in R \vee x = y$.

Пусть A – непустое множество. *Бинарной операцией* на множестве A называется отображение прямого произведения $A \times A$ в A . Отображение A^n в A называется n -местной операцией на множестве A , а число n – рангом операции. Нульместной операцией называется выделение какого-либо элемента.

Пусть $\top$ и $\perp$ – произвольные бинарные операции на множестве A .

Бинарная операция $\top$ называется *коммутативной*, если $a \top b = b \top a$, и *ассоциативной*, если $a \top (b \top c) = (a \top b) \top c$. Бинарная операция $\top$ называется *дистрибутивной* относительно бинарной операции $\perp$, если выполняются равенства $a \top (b \perp c) = (a \top b) \perp (a \top c)$ и $(a \perp b) \top c = (a \top c) \perp (b \top c)$, для любых $a, b, c \in A$.

7.2 Примеры решения типовых задач

7.2.1 Доказать, что бинарное отношение $f = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge y = x^4 \}$ является функцией.

Решение. $\left. \begin{array}{l} \langle x; y \rangle \in f \rightarrow y = x^4 \\ \langle x; z \rangle \in f \rightarrow z = x^4 \end{array} \right\} \rightarrow y - z = x^4 - x^4 = 0 \rightarrow y = z$. Следовательно,

на основании определения функции, бинарное отношение f является функцией.

7.2.2 Доказать, что бинарное отношение $f = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in \mathbb{R}^+ \wedge y \in \mathbb{R} \wedge y = \ln x \}$ является функцией. Доказать инъективность функции и найти обратную функцию.

Решение. $\left. \begin{array}{l} \langle x, y \rangle \in f \rightarrow y = \ln x \\ \langle x, z \rangle \in f \rightarrow z = \ln x \end{array} \right\} \rightarrow y - z = \ln x - \ln x = 0 \rightarrow y = z.$ Следова-

тельно, на основании определения функции, бинарное отношение f является функцией.

Докажем инъективность функции, используя закон контрапозиции.

Пусть $x_1 \neq x_2$. Тогда $f(x_1) - f(x_2) = \ln x_1 - \ln x_2 = \ln \frac{x_1}{x_2}$. Так как, $x_1 \neq x_2$, то

$\frac{x_1}{x_2} \neq 1$. Следовательно, $\ln \frac{x_1}{x_2} \neq \ln 1 = 0$, но тогда $\ln x_1 - \ln x_2 \neq 0$, то есть

$f(x_1) - f(x_2) \neq 0$ или $f(x_1) \neq f(x_2)$. На основании закона контрапозиции, функция является инъективной, а, следовательно, обратима, то есть имеет обратную. Найдём обратную функцию для функции $y = \ln x$. Выражаем переменную x : $x = e^y$.

Заменяя переменную x на переменную y , а y на переменную x , получаем функцию, которая зависит от переменной x , то есть функцию обратную к данной $y = e^x$: $f^{-1} = f^{\cup} = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}^+ \wedge y = e^x \}$.

7.2.3 Дано множество $\mathbb{R} = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$. На данном множестве задана бинарная операция $\perp$: $a \perp b = a + b$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$. Показать, что операция « $\perp$ » является коммутативной и ассоциативной. Проверить дистрибутивность операции « $\top$ » относительно операции « $\perp$ » и дистрибутивность операции « $\perp$ » относительно операции « $\top$ », где бинарная операция « $\top$ »: $a \top b = a \cdot b$.

Решение. Проверим коммутативность и ассоциативность бинарной операции:

$$a \perp b = a + b = b + a = b \perp a,$$

$$a \perp (b \perp c) = a + (b + c) = (a + b) + c = (a \perp b) \perp c.$$

Таким образом, операция « $\perp$ » является коммутативной и ассоциативной. Проверим дистрибутивность операции « $\top$ » относительно операции « $\perp$ »: $a \top (b \perp c) = a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c = (a \top b) \perp (a \top c)$, что и требовалось доказать. Обратно,

$$a \perp (b \top c) = a + (b \cdot c) \neq (a + b) \cdot (a + c) = (a \perp b) \top (a \perp c),$$

то есть, операция $\perp$ не является дистрибутивной относительно операции $\top$.

7.3 Задания для решения на практическом занятии

7.3.1 Какие из следующих отношений являются функциями? Найти область определения и множество значений. Исследовать функции на инъективность:

- а) $f = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{N} \wedge y = x^2\}$;
- б) $f = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{N} \wedge x < y \leq x + 1\}$;
- в) $f = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{Z} \wedge y = x^2\}$;
- г) $f = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{N} \wedge y : x\}$;
- д) $f = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{Z} \wedge y = |x|\}$;
- е) $f = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge x = y^2\}$;
- ж) $f = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge y = 7^x\}$;
- з) $f = \{\langle x, y \rangle \mid x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R} \wedge y = \log_7 x\}$.

7.3.2 Пусть A – двухэлементное множество $\{0;1\}$. Найти все отображения множества A в себя и указать, какие из этих отображений являются инъективными.

7.3.3 Доказать, что каждая из следующих функций имеет обратную функцию. Найти область определения обратной функции:

- а) $f = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{N} \wedge y = 2x + 1\}$;
- б) $f = \{\langle n, n^2 \rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$;
- в) $f = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge y = x^3\}$;
- г) $f = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge y = 6^x\}$;
- д) $f = \{\langle x, y \rangle \mid x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R} \wedge y = \log_6 x\}$.

7.3.4 Проверить, являются ли бинарные отношения рефлексивными, антирефлексивными, симметричными, антисимметричными и транзитивными. С точки зрения наличия этих свойств рассмотреть бинарные отношения:

- а) $R = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{Z} \wedge x \leq y + 1\}$;
- б) $R = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{Z} \wedge |x| = |y|\}$;
- в) $R = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{N} \wedge y : x\}$;
- г) $R = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{N} \wedge x < y\}$;
- д) $R = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{Z} \wedge x^2 + x = y^2 + y\}$.

7.3.5 Показать, что отношение $R = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{Z} \wedge (y : x \vee x < y)\}$ – линейный порядок.

7.3.6 Пусть имеется множество $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. На этом множестве задано отношение $R = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge x > y\}$. Построить граф отношения. Построить график и проверить свойства заданного отношения.

7.3.7 Дано множество $Z^+ = \{z \mid z \in Z \wedge z > 0\}$. На данном множестве задана бинарная операция $\perp: a \perp b = a^b, \forall a, b \in Z^+$. Показать, что операция $\perp$ не является коммутативной и ассоциативной.

7.3.8 Пусть $a \neq b$ – фиксированные рациональные числа. На множестве рациональных чисел задана бинарная операция $\perp: x \perp y = ax + by, \forall x, y \in Q$. Показать, что операция $\perp$ не является коммутативной и ассоциативной.

7.3.9 Дано множество натуральных чисел N . На данном множестве задана бинарная операция $\perp: x \perp y = \text{НОД}(x; y)$. Показать, что операция $\perp$ является коммутативной и ассоциативной.

7.3.10 Дано непустое множество U и множество $P(U)$ – множество всех подмножеств U . На данном множестве $P(U)$ задана бинарная операция Δ , которая носит название симметрической разности множеств X и Y и определяется по формуле $X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$. Показать, что операция симметрической разности обладает свойством коммутативности и ассоциативности. Доказать дистрибутивность операции пересечения относительно симметрической разности.

7.4 Задания для контроля знаний студентов по пройденной теме

7.4.1 Какие из следующих отношений являются функциями? Найти область определения и множество значений. Исследовать функции на инъективность. Найти обратную функцию:

а) $f = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in N \wedge y = x^3\};$

б) $f = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in R \wedge y = 3x + 5\};$

в) $f = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in R \wedge y = 10^x\};$

г) $f = \{\langle x, y \rangle \mid x \in R^+, y \in R \wedge y = \log_6 x\}.$

7.4.2 Найти все отображения множества $A = \{0; 1; 2\}$ на двухэлементное множество $B = \{0; 1\}$, и указать, какие из этих отображений являются инъективными.

7.4.3 Проверить является ли отношение $R = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in N \wedge x \geq y\}$ рефлексивным, антирефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным. С точки зрения наличия этих свойств рассмотреть отношение R .

7.4.4 Пусть имеется множество $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Показать, что отношение $R = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge (x - y): 2\}$ есть отношение порядка. Построить граф отношения. Построить график и проверить все свойства заданного отношения.

7.4.5 Дано множество натуральных чисел N . На данном множестве задана бинарная операция $\perp: x \perp y = \text{НОК}(x; y)$. Показать, что операция $\perp$ является коммутативной и ассоциативной.

7.4.6 Проверить на выполнения свойства коммутативности и ассоциативности скалярного произведения геометрических векторов, а также дистрибутивность скалярного произведения, относительно сложения векторов.

7.4.7 Проверить на выполнения свойства коммутативности и ассоциативности векторного произведения геометрических векторов, а также дистрибутивность векторного произведения, относительно сложения векторов.

8 АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Содержание: алгебры, гомоморфизм и изоморфизм алгебр, подалгебры, группы, гомоморфизм и изоморфизм групп, подгруппы, циклические группы, кольца, гомоморфизм и изоморфизм колец, подкольца, алгебраические системы, подсистемы.

8.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Алгеброй называется упорядоченная пара $\mathcal{A} = \langle A, \Omega \rangle$, где A – непустое множество и Ω – множество операций на множестве A . Пусть $f_1, f_2, \dots, f_n \in \Omega$ главные операции алгебры $\mathcal{A}$, а $f'_1, f'_2, \dots, f'_n \in \Omega'$ главные операции алгебры $\mathcal{B} = \langle B, \Omega' \rangle$. *Типом алгебры* $\mathcal{A} = \langle A, \Omega \rangle$ называется последовательность $(r(f_1), r(f_2), \dots, r(f_n))$, где $r(f_i)$ – ранг операции f_i , причём $i = \overline{1; n}$. Алгебры $\mathcal{A} = \langle A, \Omega \rangle$ и $\mathcal{B} = \langle B, \Omega' \rangle$ называются *однотипными*, если их типы совпадают, то есть ранг операции f_i алгебры $\mathcal{A}$ совпадает с рангом f'_i алгебры $\mathcal{B}$.

Пусть $f_{\mathcal{A}}$ главная операция алгебры $\mathcal{A}$, а $f_{\mathcal{B}}$ – соответствующая ей главная операция однотипной алгебры $\mathcal{B}$. Говорят, что отображение $h: A \xrightarrow{B} B$ сохраняет операцию $f_{\mathcal{A}}$ алгебры $\mathcal{A}$, если

$$h(f_{\mathcal{A}}(x_1, x_2, \dots, x_n)) = f_{\mathcal{B}}(h(x_1), h(x_2), \dots, h(x_n)), \quad \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in A$$

Гомоморфизмом алгебры $\mathcal{A}$ в (на) алгебру $\mathcal{B}$ называется отображение h множества A в (на) множество B , сохраняющее все главные операции $\mathcal{A}$. Гомоморфизм h алгебры $\mathcal{A}$ на алгебру $\mathcal{B}$ называется *изоморфизмом*

$(\mathcal{A} \cong \mathcal{B})$, если h есть инъективное отображение множества A на B . В случае отображение «в» имеем мономорфизм алгебры $\mathcal{A}$ в алгебру $\mathcal{B}$.

Определение 8.1.1. Алгебра $\mathcal{G} = \langle G, *, ' \rangle$ типа $(2;1)$ называется *группой*, если её главные операции удовлетворяют аксиомам:

- 1) бинарная операция $*$ ассоциативна $a * (b * c) = (a * b) * c, \forall a, b, c \in G$;
- 2) существует правый нейтральный элемент $a * e = a, \forall a \in G$;
- 3) унарная операция $'$ удовлетворяет условию $\forall a \in G, \exists a' \in G : a * a' = e$.

Группа называется *абелевой*, если введенная операция « $*$ » коммутативна. Основное множество группы является замкнутым относительно главных операций группы, если применение операций к элементам группы приводит к элементам этой же группы. Если бинарная операция представляет собой операцию сложения, то группа называется *аддитивной группой*, если же операцию умножения – то *мультипликативной группой*.

Определение 8.1.2. Алгебра $\mathcal{H} = \langle H, *, ^{-1} \rangle$ типа $(2;1)$ называется *подгруппой* $\mathcal{G} = \langle G, *, ^{-1} \rangle$, если $H \subset G$ и тождественное отображение множества H в множество G является мономорфизмом алгебры $\mathcal{H}$ в алгебру $\mathcal{G}$, то есть выполняются условия:

- 1) $x * y = x \cdot y, \forall x, y \in H$;
- 2) $x^{-1} = x^{-1}, \forall x \in H$.

Группа называется *циклической*, если она порождена одним элементом. Для нахождения подгрупп циклической группы используют тот факт, что порядок подгруппы является делителем порядка группы.

Так как группа является частным случаем алгебры, то определения гомоморфизма и изоморфизма групп аналогичны таким же определениям для алгебр.

Определение 8.1.3 *Кольцом* называется алгебра $\mathcal{K} = \langle K, +, -, \cdot, 1 \rangle$ типа $(2,1,2,0)$, главные операции которой удовлетворяют аксиомам:

- 1) $a + (b + c) = (a + b) + c, \forall a, b, c \in K$ (ассоциативность);
- 2) $\exists 0 \in K : a + 0 = a, \forall a \in K$ (существование нейтрального элемента по сложению);
- 3) $\forall a \in K, \exists (-a) \in K : a + (-a) = 0$ (существование симметричного элемента), то есть алгебра $\langle K, +, - \rangle$ является абелевой группой;
- 4) $a + b = b + a, \forall a, b \in K$ (коммутативность);
- 5) $\forall a \in K \Rightarrow a \cdot 1 = a$, то есть алгебра $\langle K, \cdot, 1 \rangle$ является моноидом;
- 6) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ и $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \forall a, b, c \in K$ (дистрибутивность умножения относительно сложения).

Кольцо $\mathcal{K}$ называется *коммутативным*, если для любых элементов кольца a и b выполняется равенство $a \cdot b = b \cdot a$. Кольцо $\mathcal{K}$ называется *нуле-*

вым, если $K = 0_{\mathcal{K}}$. Кольцо $\mathcal{K}$ называется *областью целостности*, если оно коммутативно, $0_{\mathcal{K}} \neq 1_{\mathcal{K}}$ и для любых $a, b \in K$ из равенства $a \cdot b = 0$ следует $a = 0 \vee b = 0$.

Подкольцом кольца $\mathcal{K}$ называется любая подалгебра этого кольца. При этом любое подкольцо является кольцом, при этом нуль и единица кольца является нулём и единицей любого его подкольца.

Так как кольцо является частным случаем алгебры, то определения гомоморфизма и изоморфизма колец аналогичны таким же определениям для алгебр.

Определение 8.1.4. *Алгебраической системой* называется упорядоченная тройка $\mathcal{A} = \langle A, \Omega, \Omega_0 \rangle$, где A – непустое множество, Ω – множество операций на множестве A , Ω_0 – множество отношений на A .

Определения и свойства для алгебраических систем аналогичны определениям и свойствам для алгебр, с учётом введения отношений на основном множестве системы.

8.2 Примеры решения типовых задач

8.2.1 Даны алгебры $\mathcal{R} = \langle \mathbb{R}, +, 0 \rangle$ и $\mathcal{R}_1 = \langle \mathbb{R}^+, \cdot, 1 \rangle$. Являются ли отображение $h: \mathbb{R}^+ \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{R}$, $h(x) = \log_{12} x$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$ гомоморфизмом и изоморфизмом?

Решение. Пусть операция сложения определена на множестве действительных чисел, а операция умножения определена на множестве положительных действительных чисел. Каждая из алгебр $\mathcal{R} = \langle \mathbb{R}, +, 0 \rangle$ и $\mathcal{R}_1 = \langle \mathbb{R}^+, \cdot, 1 \rangle$ имеет тип $(2, 0)$. Покажем, что отображение h сохраняет операции.

$$1) \quad h(1) = \log_{12} 1 = 0;$$

$$2) \quad h(x_1 \cdot x_2) = \log_{12}(x_1 \cdot x_2) = \log_{12} x_1 + \log_{12} x_2 = h(x_1) + h(x_2).$$

Отображение логарифмирования h сохраняет операции, следовательно, отображение h является гомоморфным.

Операции сохранены, а, следовательно, отображение h является гомоморфизмом.

Для доказательства изоморфизма алгебр, покажем, что отображение h является инъективным.

$$\text{Пусть } x_1 \neq x_2. \text{ Тогда } h(x_1) - h(x_2) = \log_{12} x_1 - \log_{12} x_2 = \log_{12} \frac{x_1}{x_2}.$$

Так как, $x_1 \neq x_2$, то $\frac{x_1}{x_2} \neq 1$. Следовательно, $\log_{12} \frac{x_1}{x_2} \neq \log_{12} 1 = 0$, но тогда

$$\log_{12} x_1 - \log_{12} x_2 \neq 0,$$

то есть $h(x_1) - h(x_2) \neq 0$ или $h(x_1) \neq h(x_2)$. На основании закона контрапозиции, функция является инъективной, а, следовательно, отображение h инъективно. Отображение h является изоморфизмом.

8.2.2 Составить таблицу умножения поворотов правильного десятиугольника вокруг его центра и совмещения десятиугольника.

Решение. Для совмещения десятиугольника многоугольник необходимо повернуть на угол кратный 36 градусам. Обозначим поворот на угол α градусов через g_α . Композиция $g_{252} \circ g_{288} = g_{540} = g_{180}$ означает: поворачиваем десятиугольник на 288 градусов, а затем на 252 градуса вокруг центра многоугольника. В результате поворачиваем многоугольник на 540 градусов или с учётом периода на угол 180 градусов. Тогда таблица умножения поворотов правильного десятиугольника вокруг его центра и совмещения его вершин имеет вид:

	g_0	g_{36}	g_{72}	g_{108}	g_{144}	g_{180}	g_{216}	g_{252}	g_{288}	g_{324}
g_0	g_0	g_{36}	g_{72}	g_{108}	g_{144}	g_{180}	g_{216}	g_{252}	g_{288}	g_{324}
g_{36}	g_{36}	g_{72}	g_{108}	g_{144}	g_{180}	g_{216}	g_{252}	g_{288}	g_{324}	g_0
g_{72}	g_{72}	g_{108}	g_{144}	g_{180}	g_{216}	g_{252}	g_{288}	g_{324}	g_0	g_{36}
g_{108}	g_{108}	g_{144}	g_{180}	g_{216}	g_{252}	g_{288}	g_{324}	g_0	g_{36}	g_{72}
g_{144}	g_{144}	g_{180}	g_{216}	g_{252}	g_{288}	g_{324}	g_0	g_{36}	g_{72}	g_{108}
g_{180}	g_{180}	g_{216}	g_{252}	g_{288}	g_{324}	g_0	g_{36}	g_{72}	g_{108}	g_{144}
g_{216}	g_{216}	g_{252}	g_{288}	g_{324}	g_0	g_{36}	g_{72}	g_{108}	g_{144}	g_{180}
g_{252}	g_{252}	g_{288}	g_{324}	g_0	g_{36}	g_{72}	g_{108}	g_{144}	g_{180}	g_{216}
g_{288}	g_{288}	g_{324}	g_0	g_{36}	g_{72}	g_{108}	g_{144}	g_{180}	g_{216}	g_{252}
g_{324}	g_{324}	g_0	g_{36}	g_{72}	g_{108}	g_{144}	g_{180}	g_{216}	g_{252}	g_{288}

8.2.3 Найти все подгруппы циклической группы $\mathcal{G} = \langle G, \cdot^{-1} \rangle$ порядка $|\mathcal{G}| = 10$ и $m = 24$, где множество $G = \{e, g^1, g^2, \dots, g^9\}$ порождено элементом g .

Решение. Порядок любой циклической подгруппы является делителем порядка группы. Делителями числа 10 являются числа 1; 2; 5 и 10. Следовательно, число элементов подгрупп равны одному, двум, пяти и десяти, причём любая подгруппа должна содержать единичный элемент:

$$H_1 = \{e\}, H_2 = \{e, g^5\}, H_5 = \{e, g^2; g^4; g^6; g^8\}, H_{10} = G.$$

8.3 Задания для решения на практическом занятии

8.3.1 Пусть «+» и «·» являются обычными операциями сложения и умножения на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$, а $\mathbb{R}^+$ – множество положи-

тельных действительных чисел. Даны алгебры $\mathcal{R} = \langle \mathbb{R}, + \rangle$ и $\mathcal{R}_1 = \langle \mathbb{R}^+, \cdot \rangle$. Являются ли следующие отображения гомоморфизмами и изоморфизмами?

- а) $h: \mathbb{R} \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{R}^+, h(x) = 2^x, \forall x \in \mathbb{R}$;
- б) $f: \mathbb{R}^+ \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{R}, f(x) = \log_2 x, \forall x \in \mathbb{R}^+$;
- в) $g: \mathbb{R}^+ \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{R}^+, g(x) = \sqrt{x}, \forall x \in \mathbb{R}^+$;
- г) $p: \mathbb{R}^+ \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{R}^+, p(x) = |x|, \forall x \in \mathbb{R}^+$.

8.3.2 Пусть h – гомоморфизм алгебры $\mathcal{A} = \langle A, T \rangle$ на алгебру $\mathcal{B} = \langle B, \perp \rangle$, где $T, \perp$ – некоторые бинарные операции. Доказать:

- 1) если операция T – коммутативна, то и операция $\perp$ – коммутативна;
- 2) если операция T – ассоциативна, то и операция $\perp$ – ассоциативна;
- 3) если e – нейтральный элемент относительно операции T , то $h(e)$ – нейтральный элемент относительно операции $\perp$;
- 4) если a' – симметричный элемент относительно операции T для элемента a , то $h(a')$ – симметричный элемент относительно операции $\perp$ элемента $h(a)$.

8.3.3 Выяснить, являются ли следующие множества действительных чисел замкнутыми относительно главных операций аддитивной группы действительных чисел:

- а) множество всех натуральных чисел;
- б) множество всех целых чисел;
- в) множество всех чётных целых чисел;
- г) множество всех нечётных целых чисел;
- д) множество всех целых чисел, кратных заданному целому числу n ;
- е) множество всех рациональных чисел с нечётным знаменателем;
- ж) множество всех рациональных чисел с чётным знаменателем.

8.3.4 Выяснить, являются ли следующие множества действительных чисел замкнутыми относительно главных операций мультипликативной группы действительных чисел:

- а) множество всех отличных от нуля рациональных чисел с чётным знаменателем;
- б) множество всех отличных от нуля рациональных чисел с нечётным знаменателем;
- в) множество всех целочисленных степеней числа 3;
- г) множество чисел, которые принадлежат множеству $\{1; -1\}$.

8.3.5 Пусть задано множество $G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \varphi \in \mathbb{R} \right\}$. Доказать, что

алгебра $\mathcal{G} = \langle G, \cdot, {}^{-1} \rangle$ является группой. Будет ли данная группа абелевой.

8.3.6 Доказать, что алгебры с введёнными очевидным образом операциями являются группами. Являются ли группы абелевыми. Составить таблицу умножения для элементов следующих групп:

- а) алгебра вращений правильного треугольника относительно его центра;
- б) алгебра вращений правильного пятиугольника относительно его центра;

тра;

- в) алгебра всех симметрий правильного треугольника;

- г) алгебра всех симметрий ромба.

8.3.7 Доказать, что алгебра $\mathcal{H} = \langle H, \oplus, - \rangle$ является подгруппой аддитивной группы действительных чисел $\mathcal{R} = \langle \mathbb{R}, +, - \rangle$, если множество $H = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Показать, что алгебра $\mathcal{H} = \langle H, \oplus, - \rangle$ – группа.

8.3.8 Найти все подгруппы циклической группы $\mathcal{G} = \langle G, \cdot, {}^{-1} \rangle$ порядка $m = 6$ и $m = 24$, где множество $G = \{e, g^1, g^2, \dots, g^{m-1}\}$ порождено элементом g . Предварительно доказать, что алгебра $\mathcal{G} = \langle G, \cdot, {}^{-1} \rangle$ является группой.

8.3.9 Пусть заданы две алгебры $\mathcal{G} = \langle G, \cdot, 1 \rangle$ и $\mathcal{G}' = \langle G', \cdot, E \rangle$ с основными множествами $G = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ и $G' = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$, причем $a^2 + b^2 > 0$. Определим отображение $h: G \rightarrow G'$ следующим образом: $h(a + b\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix}$. Доказать, что алгебры $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}'$ являются группами, а отображение является гомоморфным и изоморфным.

8.3.10 В условии предыдущей задачи определим отображение $\varphi: G' \rightarrow H$, где $H = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $\varphi(x) = |x|$, $x \in G'$. Доказать, что отображение является гомоморфным и изоморфным.

8.3.11 Выяснить, являются ли следующие множества действительных чисел замкнутыми относительно главных операций кольца действительных чисел:

- а) множество всех нечетных целых чисел;
- б) множество всех рациональных чисел, знаменатели которых равны единице или чётному числу;
- в) множество всех рациональных чисел с нечётным знаменателем.

8.3.12 Является ли алгебра $\mathcal{K} = \langle K, \oplus, -, *, 1 \rangle$ кольцом. Установить, будет ли являться кольцо областью целостности, если основное множество кольца определено следующим образом:

- а) K – множество всех четных чисел с введёнными операциями сложения и умножения обычным образом;

- б) $K = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$, где операции на множестве определены по формулам $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2, y_1 \cdot y_2)$;

в) $K = Z(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in Z\}$, с введёнными операциями сложения и умножения обычным образом.

8.3.13 Проверить, являются ли гомоморфизмом и изоморфизмом колец следующие отображения:

а) $\varphi: Z \rightarrow 2Z, \varphi(z) = 2z, \forall z \in Z$;

б) $f: A \rightarrow Z$, где $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in Z \right\}$, $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\right) = a - b$;

в) $h: K \rightarrow K'$, где $K = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in 2Z\}$, $K' = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in 2Z \right\}$,
 $h\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\right) = a + \sqrt{3}b$.

8.3.14 Пусть $\mathcal{K}$ – ненулевое кольцо. Докажите, что кольцо 2×2 матриц над кольцом $\mathcal{K}$ является некоммутативным кольцом с делителями нуля.

8.4 Задания для контроля знаний студентов по пройденной теме

8.4.1 Пусть «+» и « $\cdot$ » являются обычными операциями сложения и умножения на множестве действительных чисел R , а R^+ – множество положительных действительных чисел. Даны алгебры $\mathcal{R} = \langle R, + \rangle$ и $\mathcal{R}_1 = \langle R^+, \cdot \rangle$. Являются ли следующие отображения гомоморфизмами и изоморфизмами?

а) $h: R \xrightarrow{\text{на}} R^+, h(x) = 5^x, \forall x \in R$;

б) $f: R^+ \xrightarrow{\text{на}} R, f(x) = \log_5 x, \forall x \in R^+$;

в) $g: R^+ \xrightarrow{\text{на}} R^+, g(x) = \sqrt[3]{x}, \forall x \in R^+$;

г) $p: R^+ \xrightarrow{\text{на}} R^+, p(x) = x^2, \forall x \in R^+$;

д) $q: R \xrightarrow{\text{на}} R, q(x) = x^3, \forall x \in R$.

8.4.2 Доказать, что алгебры с введёнными очевидным образом операциями являются группами. Являются ли группы абелевыми. Составить таблицу умножения для элементов следующих групп:

а) алгебра вращений квадрат относительно его центра;

б) алгебра вращений ромба относительно его центра;

в) алгебра вращений прямоугольника, не являющегося квадратом;

г) алгебра всех симметрий параллелограмма;

д) алгебра всех симметрий квадрата.

8.4.3 Пусть задано множество $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}, a, b \in R \right\}$. Доказать, что алгебра $\mathcal{G} = \langle G, \cdot, {}^{-1} \rangle$ является группой. Будет ли данная группа абелевой.

8.4.4 Определить, образуют ли следующие множества аддитивную и мультипликативную группы:

- а) множество всех натуральных чисел;
- б) множество всех действительных чисел;
- в) множество всех отрицательных действительных чисел;
- г) множество всех целых положительных степеней тройки.

8.4.5 Доказать, что алгебра $\mathcal{A} = \langle H, \oplus, - \rangle$ является подгруппой аддитивной группы действительных чисел $\mathcal{R} = \langle \mathbb{R}, +, - \rangle$, если множество $H = \{ \sqrt{2} \cdot a + \sqrt{7} \cdot b \mid a, b \in \mathbb{Z} \}$. Показать что алгебра $\mathcal{A} = \langle H, \oplus, - \rangle$ – группа.

8.4.6 Пусть заданы две алгебры $\mathcal{G} = \langle G, \cdot, 1 \rangle$ и $\mathcal{G}' = \langle G', \cdot, E \rangle$ с основными множествами $G = \{ a + b\sqrt{11} \mid a, b \in \mathbb{Q} \}$ и $G' = \left\{ \begin{pmatrix} a & 11b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$, причем $a^2 + b^2 > 0$. Определим отображение $h: G \rightarrow G'$ следующим образом: $h(a + b\sqrt{11}) = \begin{pmatrix} a & 11b \\ b & a \end{pmatrix}$. Доказать, что алгебры $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}'$ являются группами, а отображение является гомоморфным и изоморфным.

8.4.7 Найти все подгруппы циклической группы $\mathcal{G} = \langle G, \cdot, {}^{-1} \rangle$ порядка $m = 18$, где множество $G = \{ e, g^1, g^2, \dots, g^{m-1} \}$ порождено элементом g . Предварительно доказать, что алгебра $\mathcal{G} = \langle G, \cdot, {}^{-1} \rangle$ является группой.

8.4.8 Найти все подгруппы циклической группы $\mathcal{G} = \langle G, \cdot, {}^{-1} \rangle$ порядка $m = 25$, где множество $G = \{ e, g^1, g^2, \dots, g^{m-1} \}$ порождено элементом g . Предварительно доказать, что алгебра $\mathcal{G} = \langle G, \cdot, {}^{-1} \rangle$ является группой.

8.4.9 Проверить является ли отображение $h: G \rightarrow G'$ гомоморфизмом и изоморфизмом, где $G = \{ (a_{ij}) \mid a_{ij} \in \mathbb{R}, i, j = \overline{1, n} \}$ и $G' = \{ x \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \}$ основные множества групп $\mathcal{G} = \langle G, \cdot, 1 \rangle$ и $\mathcal{G}' = \langle G', \cdot, 1 \rangle$ соответственно, а отображение h определяется по формуле $h(A) = \det(A)$, $\forall A \in G$.

8.4.10 Является ли алгебра $\mathcal{K} = \langle K, \oplus, -, *, 1 \rangle$ кольцом, если основное множество $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5}) = \{ a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q} \}$. Установить, будет ли являться кольцо областью целостности.

8.4.11 Является ли алгебра $\mathcal{K} = \langle K, \oplus, -, *, 1 \rangle$ кольцом, если основное множество $K = \mathbb{Q}(\sqrt{10}) = \{ a - b\sqrt{10} \mid a, b \in \mathbb{Q} \}$. Установить, будет ли являться кольцо областью целостности.

8.4.12 Проверить, является ли гомоморфизмом и изоморфизмом колец отображения $h: K \rightarrow K'$, где $K = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in 2\mathbb{Z}\}$, $K' = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in 2\mathbb{Z} \right\}$,

$$h\left(\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}\right) = a + \sqrt{2} \cdot b.$$

Витебский государственный технологический университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Волкова, В. Н. Теория систем и системный анализ : учебник для академического бакалавриата / В. Н. Волкова, А. А. Денисов. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2019. – 462 с.
2. Гаврилов, Г. П. Сборник задач по дискретной математике : учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по спец. «Прикладная математика» / Г. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко. – Москва : Наука, 1977. – 368 с.
3. Дискретная математика : методические указания к практическим занятиям для студентов спец. 1-36 01 01, 1-36 01 03, 1-36 01 04, 1-36 08 01 дневной формы обучения / УО «ВГТУ» ; сост. А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск, 2010. – 35 с.
4. Дискретная математика : методические указания и контрольные задания для студентов заочной формы обучения спец. 36 01 01 / УО «ВГТУ» ; сост.: А. В. Коваленко, А. П. Дмитриев, Ю. А. Завацкий. – Витебск, 2004. – 31 с.
5. Карпов, В. Г. Математическая логика и дискретная математика : учебное пособие для студентов университетов по спец. «Прикладная математика» / В. Г. Карпов, В. А. Мощенский. – Минск : Вышэйшая школа, 1977. – 254 с.
6. Куликов, В. В. Дискретная математика : учебное пособие для студентов вузов / В. В. Куликов. – Москва : РИОР, 2013. – 173 с.
7. Кузнецов, О. П. Дискретная математика для инженера / О. П. Кузнецов, Г. М. Адельсон-Вельский ; рецензент Е. В. Гливенко. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Энергоатомиздат, 1988. – 480 с.
8. Матвеев, В. В. Дискретная математика : учебно-методическое пособие / В. В. Матвеев, Т. М. Кривоносова ; Учреждение образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», Факультет информационных технологий и управления, Кафедра вычислительных методов и программирования. – Минск : БГУИР, 2016. – 65 с.
9. Поттосина, С. А. Основы дискретной математики и теории алгоритмов : типовая учебная программа для вузов по направлению спец. 1-40 01 02-02 Информационные системы и технологии (в экономике) / УО «БГУИР» ; сост. С. А. Поттосина ; № ТД-I.078/тип. – Минск : БГУИР, 2008.
10. Просветов, Г. И. Дискретная математика. Задачи и решения : учебное пособие / Г. И. Просветов. – Москва : Бином : Лаборатория знаний, 2008. – 222 с.
11. Рейнгольд, Э. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика / Э. Рейнгольд, Ю. Нивергельт, Н. Део ; пер. с англ. Е. П. Липатова ; под ред. В. Б. Алексеева. – Москва : Мир, 1980. – 476 с.
12. Сачков, В. Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики : учебное пособие для студентов вузов / В. Н. Сачков. – Москва : Наука, 1982. – 384 с.

13. Хаггартс, Р. Дискретная математика для программистов : учебное пособие для студентов высших учебных заведений ; пер. с англ. / Р. Хаггартс ; под ред. С. А. Кулешова. – 2-е изд., испр. – Москва : Техносфера, 2018. – 399 с.
14. Харари, Ф. Перечисление графов / Ф. Харари, Э. Палмер ; пер. с англ. Г. П. Гаврилова. – Москва : Мир, 1977. – 324 с.
15. Харари, Ф. Теория графов / Ф. Харари ; пер. с англ. В. П. Козырева ; под ред. Г. П. Гаврилова. – Москва : Мир, 1973. – 300 с.
16. Ху, Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях / Т. Ху; пер. с англ.: П. Л. Бузыцкого, Е. В. Левнера, Б. Г. Литвака ; под ред. А. А. Фридмана. – Москва : Мир, 1974. – 519 с.
17. Шапорев, С. Д. Дискретная математика. Курс лекций и практических занятий : учебное пособие для студентов вузов / С. Д. Шапорев. – Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2009. – 396 с.
18. Фудзисава, Т. Математика для радиоинженеров. Теория дискретных структур / Т. Фудзисава, Т. Касами ; пер. с яп. А. В. Кузнецова. – Москва : Радио и связь, 1984. – 240 с.
19. Яблонский, С. В. Введение в дискретную математику : учебное пособие для студентов вузов / С. В. Яблонский. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Наука, 1986. – 384 с.

Учебное издание

**ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА.
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА. МНОЖЕСТВА, ГРАФЫ И
АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ**

Практикум

Составитель:

Коваленко Александр Вильямович

Редактор *А.В. Пухальская*

Корректор *А.В. Пухальская*

Компьютерная верстка *А.В. Коваленко*

Подписано к печати 18.05.2023. Формат $60 \times 90 \frac{1}{16}$. Усл. печ. листов 3,9.
Уч.-изд. листов 5,0 Тираж 70 экз. Заказ № 143.

Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет»
210038, г. Витебск, Московский пр., 72.

Отпечатано на ризографе учреждения образования

«Витебский государственный технологический университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/172 от 12 февраля 2014 г.

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 3/1497 от 30 мая 2017 г.