

Дальнейшее развитие обобщенного метода Фурье разделения переменных

И.Е. Андрушкевич*, В.А. Жизневский**

* Учреждение образования «Полоцкий государственный университет»

** Учреждение образования «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова»

В данной работе исследуются и развиваются возможности обобщенного метода Фурье разделения переменных (ОМФ) для построения аналитических решений линейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка. Развиваемый метод является обобщением хорошо известного классического метода Фурье разделения переменных, возможности которого ограничены задачами простой геометрии. Существует несколько подходов для повышения универсальности этого метода. В качестве отправной точки данных исследований выбран ОМФ как наиболее обоснованный и многообещающий по своим возможностям. Развитие этого метода, в рамках данной работы, направлено на преодоление математических проблем его практического использования. В процессе построения аналитических решений с использованием ОМФ возникает необходимость рассмотрения переопределенных систем разделенных уравнений. Найдены и доказаны закономерности, позволяющие уменьшить количество неопределенных коэффициентов и, тем самым, снять переопределенность систем. Благодаря проведенным исследованиям появилась возможность алгоритмизации ОМФ и создания его программной реализации.

Ключевые слова: обобщенный метод Фурье, матрица, невырожденное унитарное преобразование.

Further development of generalized Fourier method of separation of variables

I.Ye. Andrushkevich*, V.A. Zhiznevskiy**

*Educational establishment «Polotsk State University»

**Educational establishment «Vitebsk State University named after P.M. Masherov»

Summary. In this work the mathematical problem of practical application of generalized Fourier method of separation of variables is presented with reference to the differential equations in private derivatives. As a result of the carried out research generalization of Fourier method has obtained completed kind, suitable for the decision of applied sums.

Постановка задачи. Настоящую статью следует рассматривать как продолжение предыдущих [1, 2], посвященных проблематике развития обобщенного метода Фурье разделения переменных в целях практического применения. Напомним, что для построения аналитических решений исходного линейного дифференциального уравнения в частных производных,

$$L\Psi(x, y) = U(x, y), \quad (1)$$

предлагается сопоставление этому уравнению эквивалентной на определенном классе функций системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Достигается это сведением (1) к билинейному функциональному уравнению вида:

$$\sum_{\zeta=1}^N f_{\zeta}(x)g_{\zeta}(y) = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) получается из (1) при обеспечении разделимости оператора L и подстановке представления формального решения в виде:

$$\Psi(x, y) = \sum_{k=1}^S X_k(x)Y_k(y).$$

Такой подход принято называть обобщенным методом Фурье [1].

При рассмотрении уравнения (2) его удобно записать в матричном виде:

$$\mathbf{f}^T \times \mathbf{g} = 0, \quad (3)$$

где $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \dots \\ f_N(x) \end{pmatrix}$; $\mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_1(y) \\ \dots \\ g_N(y) \end{pmatrix}$, \mathbf{f}^T – матрица, транспонированная к \mathbf{f} .

Для нахождения решений (3) из множества N функций f_{ζ} выбирается подмножество r линейно-независимых, выступающих в качестве базисных, и строится система разделенных уравнений, из которой следует:

$$\mathbf{f} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_r(x) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = (\mathbf{E} - \mathbf{A}' \begin{bmatrix} i^r \\ j_1, \dots, j_{N-r} \end{bmatrix}) \begin{bmatrix} g_1(y) \\ \vdots \\ g_{N-r}(y) \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где $\mathbf{A}[i^r]_{k_1, \dots, k_s}$, $\mathbf{A}^T[i^r]_{k_1, \dots, k_s}$ – матрицы, образованные столбцами k_1, \dots, k_s матриц $\mathbf{A}[i^r]$, $\mathbf{A}^T[i^r]$ соответственно, а элементы матрицы $\mathbf{A}[i^r]$ определяются следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \in \{i^r\}, \\ 0, i \in \{i^r\}, j \in \{i^r\}, i \neq j, \\ \alpha_{ij}, i \in \{j^r\}, j \in \{i^r\}, \\ 0, j \in \{j^r\}, \end{cases} \quad (5)$$

где α_{ij} – произвольные числовые коэффициенты, $\{i^r\}, \{j^r\}$ – упорядоченные целочисленные множества, такие, что

$$\begin{aligned} \{i^r\} &= \{i_1, \dots, i_r\}; \{j^r\} = \{j_1, \dots, j_{N-r}\}; r = \overline{1, N}; \\ 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq N; 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{N-r} \leq N; \\ \{i^r\} \cup \{j^r\} &= \{1, 2, \dots, N\}; \{i^r\} \cap \{j^r\} = \emptyset. \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, задача о разделении переменных, т.е. построении систем обыкновенных дифференциальных уравнений, теоретически решается. Но, с точки зрения создания расчетных моделей для прикладных задач, интерес представляет возможность получения аналитических решений (4) относительно неизвестных функций в замкнутом виде. На пути построения таких решений возникает проблема математического характера. Это – переопределенность этих систем, т.к. каждая из них содержит $(N-r) \times r$ постоянных разделения α_{ji} , подлежащих дополнительному определению. Решение данной математической проблемы было начато в [2]. В этой работе доказаны три теоремы, позволяющие уменьшить количество неопределенных коэффициентов для различных случаев соотношения между размерностью билинейного функционального уравнения N и количеством базисных функций r .

1. Для случая N – четное, $r = N/2$ матрица $\mathbf{A}[i^r]$ заменяется подобной ей $\mathbf{B}[i^r]$, с элементами

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \in \{i^{N/2}\}, \\ 0, i \in \{i^{N/2}\}, j \in \{i^{N/2}\}, i \neq j, \\ \beta_{i_k, j_n} \delta_{kn}, i \in \{j^{N/2}\}, j \in \{i^{N/2}\}, \\ 0, j \in \{j^{N/2}\} \end{cases}$$

Здесь и далее под δ_{ij} понимается 1, если $i = j$ и 0 если $i \neq j$.

В этом случае количество коэффициентов, которые необходимо определить, уменьшается с $(N-r) \times r$ до r . Например, при $N = 6$, $r = 3$ вместо 9 коэффициентов достаточно найти 3.

2. Для случая $r < N/2$ матрица $\mathbf{A}[i^r]$ заменяется подобной ей $\mathbf{B}[i^r]$, с элементами

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \in \{i^r\}, \\ 0, i \in \{i^r\}, j \in \{i^r\}, i \neq j, \\ \beta_{i_n, j_k} \delta_{nk}, 1 \leq n, k \leq r, i_n \in \{j^r\}, j_k \in \{i^r\}, \\ \beta_{i_n, j_k}, n > r, i_n \in \{j^r\}, j_k \in \{i^r\}, \\ 0, j \in \{j^r\}. \end{cases} \quad (7)$$

В этом случае количество коэффициентов, которые необходимо определить, уменьшается с $(N-r) \times r$ до $(N-2r) \times r + r$. Например, при $N = 9$, $r = 3$ вместо 18 коэффициентов достаточно найти 12.

3. Для случая $r > N/2$ матрица $\mathbf{A}[i^r]$ заменяется подобной ей $\mathbf{B}[i^r]$, с элементами

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \in \{i^r\}, \\ 0, i \in \{i^r\}, j \in \{i^r\}, i \neq j, \\ \beta_{i_n, j_k} \delta_{nk}, 1 \leq n, k \leq N-r, i_n \in \{j^r\}, j_k \in \{i^r\}, \\ \beta_{i_n, j_k}, k > N-r, i_n \in \{j^r\}, j_k \in \{i^r\}, \\ 0, j \in \{j^r\}. \end{cases} \quad (8)$$

В этом случае количество коэффициентов, которые необходимо найти, уменьшается с $(N-r) \times r$ до $(2r-N) \times (N-r) + (N-r)$. Например, при $N = 10$, $r = 6$ вместо 24 коэффициентов достаточно определить 12.

Очевидно, что исследования, результаты которых изложены в [2], позволили значительно сократить многовариативность при решении систем разделенных уравнений. Однако в случаях 2 и 3 не удается снять переопределенность систем уравнений в полной степени. Дальнейшие исследования свойств матриц коэффициентов для этих случаев привели к результатам, излагаемым ниже. При этом использована сквозная с работой [2] нумерация утверждений, требующих строгого математического обоснования.

Результаты и их обсуждение.

Теорема 4. Если $r < N/2$, то для матриц $\mathbf{B}[i^r]$, определенных (7), существует невырожденное унитарное преобразование, сохраняющее их структуру и уменьшающее количество неопределенных коэффициентов с $(N-2r) \times r + r$ до $N-r$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим невырожденную матрицу $\mathbf{\Pi}$, для которой выполняется $\det \mathbf{\Pi} = 1$, и, следовательно, существует одно-

значно определяемая обратная матрица Π^{-1} . Элементы такой матрицы определяются следующим образом:

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \in \{i^r\}, \\ 0, i \in \{i^r\}, j \in \{i^r\}, i \neq j, \\ \beta_{i_n, j_k} - \chi_{i_n, j_k} \delta_{lk}, 1 \leq k \leq r, l = n - mr, 0 \leq m \leq \frac{(N-r)}{r}, i_n \in \{j^r\}, j_k \in \{i^r\}, \\ 0, i \in \{i^r\}, j \in \{j^r\} \\ 1, i = j \in \{j^r\}, \\ 0, i \in \{j^r\}, j \in \{j^r\}, i \neq j. \end{cases}$$

Осуществляя для матрицы $B[i^r]$, определенной в (7), преобразование вида $\Pi^{-1}B\Pi = C$, получим для элементов C :

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \in \{i^r\}, \\ 0, i \in \{i^r\}, j \in \{i^r\}, i \neq j, \\ \chi_{i_n, j_k} \delta_{lk}, 1 \leq k \leq r, l = n - mr, 0 \leq m \leq \frac{(N-r)}{r}, i_n \in \{j^r\}, j_k \in \{i^r\} \\ 0, j \in \{j^r\}. \end{cases}$$

Что и требовалось для доказательства.

Теорема 5. Если $r > N/2$, то для матриц $B[i^r]$, определенных (8), существует невырожденное унитарное преобразование, сохраняющее их структуру и уменьшающее количество неопределенных коэффициентов с $(2r - N) \times (N - r) + (N - r)$ до r .

Доказательство. Рассмотрим невырожденную матрицу Π , для которой выполняется $\det \Pi = 1$, и, следовательно, существует однозначно определяемая обратная матрица Π^{-1} . Элементы такой матрицы определяются следующим образом:

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \in \{i^r\}, \\ 0, i \in \{i^r\}, j \in \{i^r\}, i \neq j, \\ \beta_{i_n, j_k} - \chi_{i_n, j_k} \delta_{nl}, l = k - mr, 0 \leq m \leq \frac{r}{(N-r)}, i_n \in \{j^r\}, j_k \in \{i^r\}, \\ 0, i \in \{i^r\}, j \in \{j^r\} \\ 1, i = j \in \{j^r\}, \\ 0, i \in \{j^r\}, j \in \{j^r\}, i \neq j. \end{cases}$$

Осуществляя для матрицы $B[i^r]$, определенной в (8), преобразование вида $\Pi^{-1}B\Pi = C$, получим для элементов C :

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \in \{i^r\}, \\ 0, i \in \{i^r\}, j \in \{i^r\}, i \neq j, \\ \chi_{i_n, j_k} \delta_{nl}, 1 \leq k \leq r, l = k - mr, 0 \leq m \leq \frac{r}{(N-r)}, i_n \in \{j^r\}, j_k \in \{i^r\}, \\ 0, j \in \{j^r\}. \end{cases}$$

Что и требовалось для доказательства.

Иллюстрация эффективности доказанных утверждений. Рассмотрим применение результатов исследований для упомянутых выше примеров.

Для случая $N = 9, r = 3$ с учетом результатов работы [2] необходимо использовать матрицу вида:

$$B[\{1,2,3\}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{52} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{63} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{71} & \beta_{72} & \beta_{73} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{81} & \beta_{82} & \beta_{83} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{91} & \beta_{92} & \beta_{93} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} f_4 - \chi_{41}f_1 = 0 \\ f_5 - \chi_{52}f_2 = 0 \\ f_6 - \chi_{63}f_3 = 0 \\ f_7 - \chi_{71}f_1 = 0 \\ f_8 - \chi_{82}f_2 = 0 \\ f_9 - \chi_{93}f_3 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} g_1 + \chi_{41}g_4 + \chi_{71}g_7 = 0 \\ g_2 + \chi_{52}g_5 + \chi_{82}g_8 = 0 \\ g_3 + \chi_{63}g_6 + \chi_{93}g_9 = 0 \end{cases}$$

и решать соответствующие ей системы разделенных уравнений

$$\begin{cases} f_4 - \beta_{41}f_1 = 0 \\ f_5 - \beta_{52}f_2 = 0 \\ f_6 - \beta_{63}f_3 = 0 \\ f_7 - \beta_{71}f_1 - \beta_{72}f_2 - \beta_{73}f_3 = 0 \\ f_8 - \beta_{81}f_1 - \beta_{82}f_2 - \beta_{83}f_3 = 0 \\ f_9 - \beta_{91}f_1 - \beta_{92}f_2 - \beta_{93}f_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_1 + \beta_{41}g_4 + \beta_{71}g_7 + \beta_{81}g_8 + \beta_{91}g_9 = 0 \\ g_2 + \beta_{52}g_5 + \beta_{72}g_7 + \beta_{82}g_8 + \beta_{92}g_9 = 0 \\ g_3 + \beta_{63}g_6 + \beta_{73}g_7 + \beta_{83}g_8 + \beta_{93}g_9 = 0 \end{cases}$$

Благодаря теореме 4 нам достаточно матрица вида:

$$C[\{1,2,3\}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \chi_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{52} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{63} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \chi_{71} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{82} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{93} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом системы уравнений упростятся до следующих:

Как видим, благодаря проведенным исследованиям удастся уменьшить количество коэффициентов с 12 до 6.

Рассматривая случай $N = 10, r = 6$ вместо решения систем уравнений с 12 неопределенными коэффициентами

$$\begin{cases} f_7 - \beta_{71}f_1 - \beta_{75}f_5 - \beta_{76}f_6 = 0 \\ f_8 - \beta_{82}f_2 - \beta_{85}f_5 - \beta_{86}f_6 = 0 \\ f_9 - \beta_{93}f_3 - \beta_{95}f_5 - \beta_{96}f_6 = 0 \\ f_{10} - \beta_{104}f_4 - \beta_{105}f_5 - \beta_{106}f_6 = 0 \\ g_1 + \beta_{71}g_7 = 0 \\ g_2 + \beta_{82}g_8 = 0 \\ g_3 + \beta_{93}g_9 = 0 \\ g_4 + \beta_{104}g_{10} = 0 \\ g_5 + \beta_{75}g_7 + \beta_{85}g_8 + \beta_{95}g_9 + \beta_{105}g_{10} = 0 \\ g_6 + \beta_{76}g_7 + \beta_{86}g_8 + \beta_{96}g_9 + \beta_{106}g_{10} = 0 \end{cases}$$

достаточно найти решение для систем, содержащих 6 коэффициентов:

$$\begin{cases} f_7 - \chi_{71}f_1 - \chi_{75}f_5 = 0 \\ f_8 - \chi_{82}f_2 - \chi_{86}f_6 = 0 \\ f_9 - \chi_{93}f_3 = 0 \\ f_{10} - \chi_{104}f_4 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} g_1 + \chi_{71}g_7 = 0 \\ g_2 + \chi_{82}g_8 = 0 \\ g_3 + \chi_{93}g_9 = 0 \\ g_4 + \chi_{104}g_{10} = 0 \\ g_5 + \chi_{75}g_7 = 0 \\ g_6 + \chi_{76}g_7 = 0 \end{cases}$$

Как видно из этих примеров, количество коэффициентов, подлежащих определению, уменьшается до количества уравнений в системах (9), (10) по одной из переменных. Это позволяет однозначно найти их значения при наличии нетривиального решения.

Заключение. С учетом доказанных утверждений необходимо переформулировать основную теорему [3, с. 51], определяющую схему применения обобщенного метода Фурье разделения переменных в линейных дифференциальных уравнениях с частными производными.

Для построения общего решения уравнения (1)–(3) достаточно получить решения $N - 2S$ систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$(\mathbf{E} - \mathbf{C}[i^r])\mathbf{f} = 0, \mathbf{C}^T[i^r]\mathbf{g} = 0, \quad (11)$$

где $\mathbf{C}[i^r]$ – матрица размерности $N \times N$, элементы которой определяются следующими соотношениями для случаев соответственно:

1. $r = N/2$

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \in \{i^r\}, \\ 0, i \in \{i^r\}, j \in \{i^r\}, i \neq j, \\ \chi_{i_n, j_k} \delta_{lk}, i_n \in \{j^r\}, j_k \in \{i^r\}, \\ 0, j \in \{j^r\}. \end{cases}$$

2. $r < N/2$

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \in \{i^r\}, \\ 0, i \in \{i^r\}, j \in \{i^r\}, i \neq j, \\ \chi_{i_n, j_k} \delta_{lk}, l = n - mr, 0 \leq m \leq \frac{(N-r)}{r}, i_n \in \{j^r\}, j_k \in \{i^r\}, \\ 0, j \in \{j^r\}. \end{cases}$$

3. $r > N/2$

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \in \{i^r\}, \\ 0, i \in \{i^r\}, j \in \{i^r\}, i \neq j, \\ \chi_{i_n, j_k} \delta_{ml}, l = k - mr, 0 \leq m \leq \frac{r}{(N-r)}, i_n \in \{j^r\}, j_k \in \{i^r\}, \\ 0, j \in \{j^r\}. \end{cases}$$

где χ_{ij} – произвольные числовые коэффициенты, $\{i^r\}, \{j^r\}$ – для каждого $r = \overline{S, N-S}$ одна из возможных пар упорядоченных целочисленных множеств, таких, что

$$\{i^r\} = \{i_1, \dots, i_r\}; \{j^r\} = \{j_1, \dots, j_{N-r}\}; \{i^0\} = \emptyset; \{j^0\} = \{1, 2, \dots, N\},$$

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq N; 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{N-r} \leq N;$$

$$\{i^r\} \cup \{j^r\} = \{1, 2, \dots, N\}; \{i^r\} \cap \{j^r\} = \emptyset.$$

С использованием схемы применения метода, основанной на этой теореме, создан алгоритм и его программная реализация в системе компьютерной алгебры Maple. Данное программное обеспечение можно рассматривать как инструмент для проведения математического моделирования и вычислительного эксперимента через аналитические решения при изучении процессов, описываемых линейными дифференциальными уравнениями с частными производными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андрушкевич, И.Е. Об одном обобщении метода Фурье разделения переменных / И.Е. Андрушкевич // Электромагнитные волны & Электронные системы. – 1998. – Т. 3, № 4. – С. 4–17.
2. Андрушкевич, И.Е. Развитие обобщенного метода Фурье разделения переменных / И.Е. Андрушкевич, В.А. Жизневский // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2006. – № 4. – С. 26–35.
3. Андрушкевич, И.Е. Новые возможности применения метода разделения переменных в электродинамике неоднородных и нестационарных сред / И.Е. Андрушкевич, В.А. Жизневский // «Вестник БГУ», серия «Физика. Математика. Информатика». – 2006. – № 2. – С. 47–53.

Поступила в редакцию 29.04.2010

Адрес для корреспонденции: 210027, г. Витебск, пр-т Черняховского, д. 32, корп. 2, кв. 13, тел.: +37529 621-49-15 – Андрушкевич И.Е.