УДК 537.8; 517.951

И.Е. Андрушкевич, В.А. Жизневский

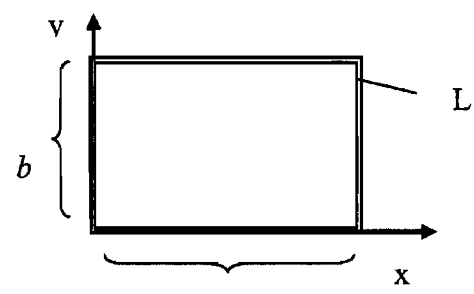
Решение краевых задач для уравнений Лапласа и Гельмгольца в прямоугольной области

При исследовании стационарных и волновых процессов различной физической природы (колебания, теплопроводность, диффузия и др.) часто приходят к уравнениям Лапласа и Гельмгольца:

$$\Delta U = 0$$

$$\Delta\ U + \lambda U = 0$$

В электродинамике в качестве функции U может выступать потенциал электрического поля, созданного зарядами или токами при условии отсутствия объемных зарядов в рассматриваемой области. С точки зрения иллюстративности применения обобщенного метода Фурье разделения переменных (ОМФ) интерес представляет внутренняя смешанная краевая задача для этих уравнений на плоскости в прямоугольной области. Геометрия этой задачи поясняется рисунком.



Рисунок

Постановку этой задачи можно сформулировать следующим образом: найти функцию U(x,y), удовлетворяющую внутри области, ограниченной контуром L, уравнению:

$$\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y^2} = 0 \qquad (1)$$

либо уравнению:

$$\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y^2} + \lambda U(x,y) = 0 \qquad (1')$$

и граничным условиям на отдельных участках рассматриваемого контура:

$$U(0,y)=\varphi_1(y), U(a,y)=\varphi_2(y), \frac{\partial U(x,0)}{\partial x}=\phi_1(x), \frac{\partial U(x,b)}{\partial x}=\phi_2(x) \quad (2)$$

Можно показать, что решения приведенных уравнений, получаемые классическим методом Фурье разделения переменных, т.е. при представлении искомой функции в виде $U(x,y)=X(x)Y(y)$, не могут удовлетворить граничным условиям рассматриваемых задач. Находясь в рамках классического метода Фурье, эти задачи можно решить благодаря искусственному приему. А именно, пользуясь линейностью уравнений (1) и (1'), рассматриваемые задачи разбивают на вспомогательные подзадачи. Например, для задачи с уравнением Гельмгольца (1') – (2) вспомогательные задачи (3) – (4) и (5) – (6) выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial^2 U_1(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_2(x,y)}{\partial y^2}+\lambda U_2(x,y)=0, \quad (3)$$

$$U_1(0,y)=\varphi_1(y),\ U_1(a,y)=\varphi_2(y),\ \frac{\partial U_1(x,0)}{\partial x}=0,\ \frac{\partial U_1(x,b)}{\partial x}=0; \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 U_2(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_2(x,y)}{\partial y^2}+\lambda U_2(x,y)=0, \quad (5)$$

$$U_2(0,y)=0, U_2(a,y)=0, \frac{\partial U_2(x,0)}{\partial x}=\phi_1(x), \frac{\partial U_2(x,b)}{\partial x}=\phi_2(x). \quad (6)$$

Решение задачи (1') – (2) представляется в виде суперпозиции решений (3) – (4) и (5) – (6), т.е. $U(x,y)=U_1(x,y)+U_2(x,y)$. Аналогично можно поступить и для задачи с уравнением Лапласа (1)-(2).

Проиллюстрируем на примере краевой задачи для уравнения Гельмгольца, как более сложного из рассматриваемых, мощь и возможности обобщенного метода Фурье разделения переменных, позволяющего исключить необходимость рассмотрения вспомогательных задач. Для этого частные решения задачи (1') – (2) U_i будем искать в виде ОМФ-2 [1]

$$\tilde{U}(x,y)=X_{1i}(x)Y_{1i}(y)+X_{2i}(x)Y_{2i}(y), \quad (7)$$

где функции $X_{1i}(x)$, $X_{2i}(x)$, как и функции $Y_{1i}(y)$, $Y_{2i}(y)$, являются линейно независимыми. Тогда уравнение (1) может быть приведено к виду:

$$X_1(Y_1''+\lambda Y_1)+(X_2''+\lambda X_2)Y_2+X_1''Y_1+X_2Y_2''=0. \quad (8)$$

Поступая в соответствии с теорией ОМФ [1] (ОМФ-2, $r=2$), вместо (8) получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\left.\begin{aligned} X_1'' &= \alpha_{31}X_1+\alpha_{32}(X_2''+\lambda X_2)\\ X_2'' &= \alpha_{41}X_1+\alpha_{42}(X_2''+\lambda X_2)\\ Y_1''+\lambda Y_1 &= -\alpha_{31}Y-\alpha_{41}Y_2''\\ Y_2'' &= -\alpha_{32}Y_1-\alpha_{42}Y_2 \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

где $\alpha_{31},\alpha_{32},\alpha_{41},\alpha_{42}$ – постоянные решения билинейных функциональных уравнений. Используя требование независимости функций в (7) и гипотезу о достаточности размерности функционального базиса полагаем $\alpha_{32} = \alpha_{41} = 0$. Система (9) примет вид:

$$\left.\begin{aligned} X_1'' + b_{31} X_1 &= 0 \\ X_2'' + (\lambda - b_{42}) X_2 &= 0 \\ Y_1'' + (\lambda - b_{31} Y_1) &= 0 \\ Y_2'' + b_{42} Y_2 &= 0 \end{aligned}\right\}, \tag{10}$$

где использованы обозначения: $b_{31} = -\alpha_{31}$; $b_{42} = \dfrac{1}{\alpha_{42}}$.

Общие решения системы (10) имеют вид

$$\begin{cases} X_1(x) = C_1\, e^{i\sqrt{b_{31}}x} + C_2\, e^{-i\sqrt{b_{31}}x} \\ Y_1(y) = C_3\, e^{i\sqrt{\lambda - b_{31}}y} + C_4\, e^{-i\sqrt{\lambda - b_{31}}y} \\ X_2(x) = C_5\, e^{i\sqrt{\lambda - b_{42}}x} + C_6\, e^{-i\sqrt{\lambda - b_{42}}x} \\ Y_2(y) = C_7\, e^{i\sqrt{b_{42}}y} + C_8\, e^{-i\sqrt{b_{42}}y} \end{cases} \tag{11}$$

где $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8$ – постоянные интегрирования ОДУ.
С учетом (11), частные решения (8) будут иметь вид

$$\begin{aligned} \tilde{U} = &\left(C_1\, e^{i\sqrt{b_{31}}x} + C_2\, e^{-i\sqrt{b_{31}}x}\right)\left(C_3\, e^{i\sqrt{\lambda - b_{31}}y} + C_4\, e^{-i\sqrt{\lambda - b_{31}}y}\right) + \\ &+ \left(C_5\, e^{i\sqrt{\lambda - b_{42}}x} + C_6\, e^{-i\sqrt{\lambda - b_{42}}x}\right)\left(C_7\, e^{i\sqrt{b_{42}}y} + C_8\, e^{-i\sqrt{b_{42}}y}\right) \end{aligned} \tag{12}$$

Общее решение уравнения (1') будет представлять собой суперпозицию всех частных решений (12) с различными значениями постоянных b_{31}, b_{42}, т.е.

$$U = \sum \tilde{U}. \tag{13}$$

Значения констант интегрирования в этом решении определим из граничных условий (2). Граничное условие по оси x, имеющее вид $U(0, y) = \varphi_1(y)$, приводит к выражению:

$$\begin{aligned} &\sum (C_1 + C_2)\left(C_3\, e^{i\sqrt{\lambda - b_{31}}y} + C_4\, e^{-i\sqrt{\lambda - b_{31}}y}\right) + \\ &+ \sum (C_5 + C_6)\left(C_7\, e^{i\sqrt{b_{42}}y} + C_8\, e^{-i\sqrt{b_{42}}y}\right) = \varphi_1(y) \end{aligned} \tag{14}$$

Это выражение при условии

$$C_3 = C_4, C_5 + C_6 = 0 \tag{15}$$

преобразуется к виду:

$$\sum \left(2C_3 (C_1 + C_2) \cos\left(\sqrt{\lambda - b_{31}}\, y\right)\right) = \varphi_1(y). \tag{16}$$

Если принять, что

$$\sqrt{\lambda - b_{31}} = \frac{\pi n}{b}, \text{ где } n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{17}$$

то выражение (16) можно рассматривать как разложение функции $\varphi_1(y)$ в ряд Фурье по косинусам в интервале (0, *b*). Коэффициенты этого разложения определяются следующим образом:

$$A = 2C_3(C_1 + C_2) = \frac{2}{b}\int_0^b \varphi_1(y)\cos\frac{\pi n}{b} y dy . \qquad (18)$$

Граничное условие по оси x, имеющее вид $U(a,y)=\varphi_2(y)$, с учетом (15) и (17) приводит к выражению:

$$\begin{aligned} &\sum\left(C_1 e^{i\sqrt{b_{31}}a} + C_2 e^{-i\sqrt{b_{31}}a}\right)2C_3 \cos\frac{\pi n}{b} y + \\ &+\sum\left(2iC_5 \sin\sqrt{\lambda - b_{42}}a\right)\left(C_7 e^{i\sqrt{b_{42}}y} + C_8 e^{-i\sqrt{b_{42}}y}\right) = \varphi_2(y) \end{aligned} \qquad (19)$$

При условии $\sqrt{\lambda - b_{42}} = \frac{\pi k}{a}$, где $k = 1,2,3,...$ (20)

выражение (19) сводится к ряду Фурье для $\varphi_2(y)$:

$$\sum\left(C_1 e^{i\sqrt{b_{31}}a} + C_2 e^{-i\sqrt{b_{31}}a}\right)2C_3 \cos\frac{\pi n}{b} y = \varphi_2(y) . \qquad (21)$$

Коэффициенты этого ряда определяются:

$$B = 2C_3\left(C_1 e^{i\sqrt{b_{31}}a} + C_2 e^{-i\sqrt{b_{31}}a}\right) = \frac{2}{b}\int_0^b \varphi_2(y)\cos\frac{\pi n}{b} y dy . \qquad (22)$$

Граничное условие по оси *y*, имеющее вид $\frac{\partial U(x,0)}{\partial x} = \phi_1(x)$, с учетом условий (15), (17) и (20) приводит к выражению:

$$\sum\left(2C_5\sqrt{b_{42}}(C_8 - C_7)\sin\frac{\pi k}{a} x\right) = \phi_1(x) . \qquad (23)$$

Это выражение можно рассматривать как разложение функции $\phi_1(x)$ в ряд Фурье по синусам в интервале (0, *a*). Коэффициенты этого разложения определяются следующим образом:

$$C = 2C_5\sqrt{b_{42}}(C_8 - C_7) = \frac{2}{a}\int_0^a \phi_1(x)\sin\frac{\pi k}{a} x dx . \qquad (24)$$

Граничное условие по оси *y*, имеющее вид $\frac{\partial U(x,b)}{\partial x} = \phi_2(x)$, с учетом условий (15), (17) и (20) приводит к разложению функции $\phi_2(x)$ в ряд Фурье вида:

$$\sum\left(2C_5\sqrt{b_{42}}\left(C_8 e^{-i\sqrt{b_{42}}b} - C_7 e^{i\sqrt{b_{42}}b}\right)\sin\frac{\pi k}{a} x\right) = \phi_2(x) . \qquad (25)$$

Коэффициенты этого ряда определяются:

$$D = 2C_5\sqrt{b_{42}}\left(C_8 e^{-i\sqrt{b_{42}}b} - C_7 e^{i\sqrt{b_{42}}b}\right) = \frac{2}{a}\int_0^a \phi_2(x)\sin\frac{\pi k}{a}x dx. \quad (26)$$

Окончательно, с учетом условий (15), (17) и (20) частные решения краевой задачи(1')-(2) примут вид:

$$\tilde{U} = \left(C_1 e^{i\sqrt{b_{31}}x} + C_2 e^{-i\sqrt{b_{31}}x}\right)2C_3\cos\frac{\pi n}{b}y + \\ + \left(2iC_5\sin\frac{\pi k}{a}x\right)\left(C_7 e^{i\sqrt{b_{42}}y} + C_8 e^{-i\sqrt{b_{42}}y}\right) \quad (27)$$

где $n = 1,2,3,\ldots$ и $k = 1,2,3,\ldots$.

Выражения определяющие коэффициенты этих решений вытекают из уравнений (18), (22), (24), (26):

$$C_1 = \frac{A(2i\sin\sqrt{b_{31}}a - 1) + B}{2C_3 2i\sin\sqrt{b_{31}}a} \quad C_2 = \frac{A - B}{2C_3 2i\sin\sqrt{b_{31}}a}$$

$$C_7 = \frac{Ce^{-i\sqrt{b_{42}}b} - D}{2C_5\sqrt{b_{42}}2i\sin\sqrt{b_{42}}b} \quad C_8 = \frac{C\left(2i\sin\sqrt{b_{42}}b + e^{-i\sqrt{b_{42}}b}\right) - D}{2C_5\sqrt{b_{42}}2i\sin\sqrt{b_{42}}b} \quad (28)$$

Используя приведенную методику, для краевой задачи (1)-(2) с уравнением Лапласа можно получить следующий вид частных решений:

$$\tilde{U} = 2C_3\left(C_1 e^{-\frac{\pi n}{b}x} + C_2 e^{\frac{\pi n}{b}x}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{b}y\right) + \\ + 2iC_5\sin\left(\frac{\pi k}{a}x\right)\left(C_7 e^{-\frac{\pi k}{a}y} + C_8 e^{\frac{\pi k}{a}y}\right) \quad (29)$$

где

$$C_1 = \frac{Ae^{\frac{\pi n}{b}a} - B}{2C_3 2sh\frac{\pi n}{b}a} \quad C_2 = \frac{B - Ae^{-\frac{\pi n}{b}a}}{2C_3 2sh\frac{\pi n}{b}a}$$

$$C_7 = \frac{D - Ce^{\frac{\pi k}{a}b}}{2iC_5 2sh\frac{\pi k}{a}b} \quad C_8 = \frac{D - Ce^{-\frac{\pi k}{a}b}}{2iC_5 2sh\frac{\pi k}{a}b} \quad (30)$$

Выражения для коэффициентов в этих решениях получены из следующих уравнений:

$$2C_3(C_1 + C_2) = \frac{2}{b}\int_0^b \varphi_1(y)\cos\frac{\pi n}{b}y\, dy = A \quad (31)$$

$$2C_3(C_1 e^{-\frac{\pi n}{b}a} + C_2 e^{\frac{\pi n}{b}a}) = \frac{2}{b}\int_0^b \varphi_2(y)\cos\frac{\pi n}{b}y\, dy = B \quad (32)$$

$$2iC_5(C_8 - C_7) = \frac{2}{\pi k}\int_0^a \phi_1(x)\sin\frac{\pi k}{a}x\,dx = C \qquad (33)$$

$$2iC_5\left(C_8 e^{\frac{\pi k}{a}b} - C_7 e^{-\frac{\pi k}{a}b}\right) = \frac{2}{\pi k}\int_0^a \phi_2(x)\sin\frac{\pi k}{a}x\,dx = D \qquad (34)$$

Приведенные примеры использования ОМФ позволяют сделать однозначный вывод о преимуществах этого метода перед классическим методом разделения переменных. Наиболее наглядно эти преимущества проявляются именно в краевых задачах с граничными условиями определенного вида. Классификация таких задач представляется авторам направлением дальнейших исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Андрушкевич И.Е.*** Об одном обобщении метода Фурье разделения переменных. ЭВ & ЭС, 1998, № 2.

S U M M A R Y

In article is considered the strategy of using the generalized Fourier method separation of variables at decision of marginal problems with lumpy border conditions. Graphically advantage is shown over classical method of division variable at decision of marginal problems for Laplace and Helmgoltce equations.

Поступила в редакцию 5.04.2002

УДК 658.512

Н.В. Беляков, М.И. Жемчужный, Е.И. Махаринский

Достаточность задания допусков относительных поворотов на чертежах корпусных деталей и проблема синтеза схем базирования

На чертежах корпусных деталей машин инженерами-конструкторами задаются допуски относительных поворотов согласно ГОСТ 24642-81 и ГОСТ 2.308-79, однако ГОСТы лишь в самых общих чертах определяют необходимость и, самое главное, не говорят вообще о достаточности задания тех или иных допусков, а лишь дают определения понятий и графические обозначения. Поэтому часто конструктор задает на чертеже необоснованно много информации в виде допусков, хотя это некорректно и не является необходимым. Кроме того, это необходимо для решения задачи формализации синтеза схем базирования заготовок корпусных деталей машин [1].

В работе [1] приводится классификация возможных комплектов номинальных поверхностей (конструкторских баз) корпусных деталей машин, относительно которых возможны различные варианты угловой и размерной ориен-