

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ  
И  
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ  
№ 4, 2012  
Электронный журнал,  
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010  
ISSN 1817-2172

<http://www.math.spbu.ru/diffjournal>  
e-mail: [jodiff@mail.ru](mailto:jodiff@mail.ru)

Приложения в физике, электротехнике и  
электронике

## Аналитические решения в задачах прикладной электродинамики

**В.А. ЖИЗНЕВСКИЙ**

[jvalera@vsu.by](mailto:jvalera@vsu.by)

### 1. Введение

Актуальность поиска аналитических решений краевых задач электродинамики в целях математического моделирования и исследования электромагнитного поля не вызывает сомнений. Успех построения таких решений в прикладных задачах ограничен возможностями используемых методов и математическими проблемами их применения.

В основе развиваемого подхода лежит важнейший метод построения аналитических решений задач математической физики – метод разделения переменных. Под разделением переменных будем понимать поиск и сопоставление системы обыкновенных дифференциальных уравнений, эквивалентной на определенном классе функций исходному уравнению в частных производных или системе таких уравнений. При этом открываются возможности использовать хорошо развитую качественную теорию обыкновенных дифференциальных уравнений для исследования решений уравнений в частных производных.

Математической основой макроскопической электродинамики являются уравнения Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} + \vec{J}^{cm}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho + \rho^{cm}, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (1)$$

После дополнения материальными уравнениями ( $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ ,  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ ,  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ ) систему уравнений Максвелла преобразуют к волновым.

Для линейных неоднородных и нестационарных сред, в которых электродинамические параметры представляют собой функции от координат и времени ( $\varepsilon = \varepsilon(\vec{r}, t)$ ,  $\mu = \mu(\vec{r}, t)$ ,  $\sigma = \sigma(\vec{r}, t)$ ), волновые уравнения могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{H} + \operatorname{grad} \left( \frac{1}{\mu} (\vec{H} \cdot \operatorname{grad} \mu) \right) - \varepsilon \left[ \operatorname{grad} \frac{1}{\varepsilon}, \operatorname{rot} \vec{H} \right] - \\ - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \left( \frac{\partial \mu}{\partial t} \vec{H} + \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) - \varepsilon \left( \frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2} \vec{H} + 2 \frac{\partial \mu}{\partial t} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \right) - \sigma \left( \frac{\partial \mu}{\partial t} \vec{H} + \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) + (2), \\ + \varepsilon \left[ \operatorname{grad} \left( \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right), \vec{E} \right] + \varepsilon \left[ \operatorname{grad} \frac{\sigma}{\varepsilon}, \vec{E} \right] = -\varepsilon \operatorname{rot} \left( \frac{1}{\varepsilon} \vec{J}^{cm} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} + \operatorname{grad} \left( \frac{1}{\varepsilon} (\vec{E} \cdot \operatorname{grad} \varepsilon) \right) - \mu \left[ \operatorname{grad} \frac{1}{\mu}, \operatorname{rot} \vec{E} \right] - \\ - \frac{\partial \mu}{\partial t} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma \vec{E} \right) - \mu \left( \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} \vec{E} + 2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} \vec{E} + \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) - (3) \\ - \mu \left[ \operatorname{grad} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial t} \right), \vec{H} \right] = \operatorname{grad} \left( \frac{1}{\varepsilon} (\rho + \rho^{cm}) \right) + \frac{\partial \mu}{\partial t} \vec{J}^{cm} + \mu \frac{\partial \vec{J}^{cm}}{\partial t} \end{aligned}$$

Суть дальнейших традиционных преобразований выражений (2), (3) состоит в выделении скалярных волновых уравнений для отдельных компонент полевых векторов или электродинамических потенциалов, т.е. разделения (скаляризации) уравнений Максвелла. В случае рассматриваемых сред сама процедура формирования волновых уравнений представляет нетривиальную проблему [1]. В таких средах в общем случае разделить уравнения Максвелла в традиционном смысле невозможно, но с точки зрения предлагаемого способа моделирования и

исследования электромагнитного поля, основанного на процедуре разделения переменных, необходимость в этом отсутствует. Для успешного построения аналитических решений относительно компонент полевых векторов можно работать и с системами скалярных волновых уравнений, вытекающих из (2), (3). Размерность этих систем и вид уравнений в них будут определять только последовательность и объем требуемых для получения решения расчетов. При этом достаточно выделения независимого уравнения для одного из них. Очевидно (3) позволяет получить уравнения для  $\vec{E}$  в средах с однородными ( $grad\mu = 0$ ) или стационарными  $\left(\frac{d\mu}{dt} = 0\right)$  магнитными свойствами, что соответствует большинству реальных сред.

Для определения электромагнитного поля в области, содержащей сторонние заряды и токи, часто оказывается удобным формирование волновых уравнений для вспомогательных функций, называемых электродинамическими потенциалами. Используя кулоновскую калибровку, выражения для векторного потенциала можно записать в следующем виде:

$$\Delta\vec{A} - \mu \left[ grad \frac{1}{\mu}, rot\vec{A} \right] - \mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\mu \vec{J}^{cm};$$

$$\left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \frac{grad \varepsilon}{\varepsilon} = -\frac{\rho + \rho^{cm}}{\varepsilon}.$$
(4)

Из анализа выражений (2) – (4) следует, что для поляризованной волны в рассматриваемых средах компонента одного из полевых векторов или потенциала в соответственно выбранной системе координат должна удовлетворять дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка вида:

$$\sum_{i,j=1}^4 A_{ij}(x_1, \dots, x_4) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^4 B_i(x_1, \dots, x_4) \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} + C(x_1, \dots, x_4) \Psi + D(x_1, \dots, x_4) = 0, \quad (5)$$

где  $\Psi$  – неизвестная функция, их может быть несколько при неполном разделении уравнений Максвелла,

$A, B, C$  – непостоянные коэффициенты, в которые входят известные функциональные зависимости или их производные параметров среды, а также характеристики источников поля при их наличии. При конкретизации зависимостей параметров среды, а также учета пространственно-временной геометрии задачи при выборе системы координат волновые уравнения упрощаются [1].

Из аналитических методов решений уравнений в частных производных метод разделения переменных является одним из основных. С одной стороны, его возможности и условия применения достаточно изучены вследствие давней истории. Но, с другой стороны, в современной литературе этот метод, как правило, рассматривается на простых примерах и подчеркивается, что успех разделения переменных при его использовании ограничивается задачами простой геометрии. Систематизируя результаты исследований применения классического метода Фурье разделения переменных (КМФ), можно утверждать, что успех этого применения определяется возможностями следующих преобразований (далее рассматривается двумерный случай):

1) в исходную задачу, содержащую уравнение с частными производными

$$L\left(x, y, \Psi, \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}\right) = 0$$

и дополнительные условия (начальные, граничные и др.), подставляется формальное частное решение в виде

$$\Psi(x, y) = X(x)Y(y); \quad (6)$$

2) в получившемся уравнении выделяют части по независимым переменным (предполагается, что это возможно):

$$L_1(x, X, X', X'') + L_2(y, Y, Y', Y'') = 0;$$

3) строится система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$L(x, X, X', X'') = \lambda, \quad L(y, Y, Y', Y'') = -\lambda.$$

Попытка применить этот метод к уравнению (5) приводит к необходимости решения уравнения вида  $\sum_i F_{i1}(x) F_{i2}(y) = 0$ , где  $i$  – для рассматриваемых сред не менее 4.

Это билинейное функциональное уравнение. Классический метод разделения переменных, а именно второй этап его применения, для подобных выражений с успехом работает при двух слагаемых, но в общем случае не применим.

## 2. Решение билинейных уравнений

В этой связи представляет интерес работа [2], в которой предложен вариант развития КМФ. Суть идеи автора работы [2] состоит в следующем.

Рассматривается дифференциальное уравнение в частных производных:

$$L\Psi(x, y) = U(x, y), \tag{7}$$

где  $\Psi(x, y)$  – искомая функция;  $U(x, y)$  – неоднородность;  $L$  – дифференциальный оператор.

Предполагается, что частные решения этого уравнения могут быть представлены в виде:

$$\Psi(x, y) = \sum_{k=1}^S X_k(x) Y_k(y). \tag{8}$$

Для функции  $U(x, y)$  принимается:

$$U(x, y) = \sum_{k=1}^t \Phi_k(x) T_k(y). \tag{9}$$

При этом требуется, чтобы оператор уравнения (7) являлся разделяющимся, т.е. существовала совокупность операторов  $L_{j_x}, L_{j_y}$  ( $j = \overline{1, l}$ ;  $l$  – некоторое натуральное число) таких, что  $L_{j_x}, L_{j_y}$  действуют только по переменным  $x$  и  $y$  соответственно, и для всех функций вида (8), на которых определен оператор  $L$ , выполняется тождество

$$L\Psi(x, y) = \sum_{i=1}^l L_{i_x}(X_1(x), X_2(x), \dots, X_S(x)) L_{i_y}(Y_1(y), Y_2(y), \dots, Y_S(y)). \tag{10}$$

Выражение (10) с учетом линейности дифференциального оператора может быть представлено в виде:

$$L\Psi(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^S \tilde{L}_{i,x}(X_k(x)) \tilde{L}_{i,y}(Y_k(y)). \quad (11)$$

Очевидно, что уравнение (7) в результате подстановки (8) приобретает вид билинейного функционального

$$\sum_{k=1}^N f_k(x) g_k(y) = 0, \quad (12)$$

где  $N = m \times S + t$ .

Уравнение (12) записывается в матричной форме  $\mathbf{f}^T \times \mathbf{g} = 0$ ,

где

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \tilde{L}_{1,x}(X_1) \\ \dots \\ \tilde{L}_{1,x}(X_S) \\ \dots \\ \tilde{L}_{m,x}(X_1) \\ \dots \\ \tilde{L}_{m,x}(X_S) \\ -\Phi_1 \\ \dots \\ -\Phi_t \end{pmatrix}; \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} \tilde{L}_{1,y}(Y_1) \\ \dots \\ \tilde{L}_{1,y}(Y_S) \\ \dots \\ \tilde{L}_{m,y}(Y_1) \\ \dots \\ \tilde{L}_{m,y}(Y_S) \\ T_1 \\ \dots \\ T_t \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$\mathbf{f}^T$  – матрица, транспонированная к  $\mathbf{f}$ .

Далее в [2] строятся матрицы  $A[i^r]$ , элементы которых  $a_{ij}$  определяются соотношениями:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \in \{i^r\}, \\ 0, i \in \{i^r\}, j \in \{i^r\}, i \neq j, \\ \alpha_{ij}, i \in \{j^r\}, j \in \{i^r\}, \\ 0, j \in \{j^r\}, \end{cases} \quad (14)$$

где  $\alpha_{ij}$  – произвольные числовые коэффициенты,  $\{i^r\}, \{j^r\}$  – целочисленные множества, удовлетворяющие соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \{i^r\} &= \{i_1, \dots, i_r\}, 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq N, \\ \{j^r\} &= \{j_1, \dots, j_{N-r}\}, 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{N-r} \leq N \\ r &= \overline{1, N}, \{i^r\} \cup \{j^r\} = \{1, 2, \dots, N\}, \{i^r\} \cap \{j^r\} = \emptyset \end{aligned} \right\}.$$

Очевидно, что количество возможных пар множеств  $\{i^r\}, \{j^r\}$  равно

$$\sum_{r=1}^N C_N^r = 2^N.$$

С использованием введенных матриц в [2] строятся системы разделенных уравнений

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A}[i^r])\mathbf{f} = 0, \mathbf{A}^T[i^r]\mathbf{g} = 0. \quad (15)$$

Здесь  $\mathbf{E}$  – единичная матрица порядка  $N$ ,  $\mathbf{A}^T[i^r]$  – матрица, транспонированная к  $\mathbf{A}[i^r]$ .

В конечном итоге в работе [2] показано, что всякое решение системы (15) имеет вид:

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}[i^r]_{i_1, \dots, i_r} \begin{pmatrix} F_1(x) \\ \vdots \\ F_r(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = (\mathbf{E} - \mathbf{A}^T[i^r])_{j_1, \dots, j_{N-r}} \begin{pmatrix} G_1(y) \\ \vdots \\ G_{N-r}(y) \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где  $\mathbf{A}[i^r]_{k_1, \dots, k_s}, \mathbf{A}^T[i^r]_{k_1, \dots, k_s}$  – матрицы, образованные столбцами  $k_1, \dots, k_s$  матриц  $\mathbf{A}[i^r], \mathbf{A}^T[i^r]$  соответственно;  $F_1(x), \dots, F_r(x)$  – произвольная линейно независимая система функций от переменной  $x$ , выступающих в качестве базисных для определения остальных функций этой переменной, а  $G_1(y), \dots, G_{N-r}(y)$  – произвольная система функций от  $y$ .

Таким образом, любое решение уравнения (12) можно представить в виде (16) при соответствующем выборе матрицы  $\mathbf{A}[i^r]$  и системы функций

$F_1(x), \dots, F_r(x), G_1(y), \dots, G_{N-r}(y)$ , с указанными свойствами, и наоборот, всякая система функций, имеющая вид (16), является решением уравнения (12). Для нахождения всех решений уравнения (12) необходимо рассмотреть  $2^N$  систем уравнений, определяемых (16). В заключение автор [2] указывает, что данный метод построения решений для практики неудобен вследствие объемности и громоздкости требуемых вычислений, а также из-за того, что «...необходимо решать переопределенные системы уравнений с произвольными свободными членами, которые нужно подобрать так, чтобы системы были совместны» [2, с.205].

Рассматривая данную теорию применительно к прикладным задачам электродинамики, в первую очередь стоит подчеркнуть ее потенциальные возможности, которые обуславливают выбор этой теории в качестве отправной точки данных исследований и которые не были обнаружены автором работы [2]. Возможности эти заложены в представлении искомой функции (8). Для раскрытия этих возможностей воспользуемся теоремой Колмогорова [3], которая утверждает, «...что каждая непрерывная функция  $n$  переменных, заданная на единичном кубе  $n$ -мерного пространства, представима в виде:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{q=1}^{2n+1} h_q \left[ \sum_{p=1}^n \varphi_q^p(x_p) \right],$$

где функции  $h$  непрерывны, а функции  $\varphi$ , кроме того, еще и стандартны, т.е. не зависят от выбора функции  $f$ ».

Из теоремы Колмогорова следует, что для всякой непрерывной функции двух переменных  $f(x_1, x_2)$  справедливо представление:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \sum_{q=1}^5 h_q(u) \left[ \sum_{p=1}^2 \varphi_{pq}(x_p) \right] = \sum_{q=1}^5 h_q(u) (\varphi_{1q}(x_1) + \varphi_{2q}(x_2)) = h_1(u) (\varphi_{11}(x_1) + \varphi_{21}(x_2)) + \\ &+ h_2(u) (\varphi_{12}(x_1) + \varphi_{22}(x_2)) + h_3(u) (\varphi_{13}(x_1) + \varphi_{23}(x_2)) + h_4(u) (\varphi_{14}(x_1) + \varphi_{24}(x_2)) + \quad , \quad (17) \\ &+ h_5(u) (\varphi_{15}(x_1) + \varphi_{25}(x_2)) = h_1(u) \varphi_{11}(x_1) + h_1(u) \varphi_{21}(x_2) + h_2(u) \varphi_{12}(x_1) + h_2(u) \varphi_{22}(x_2) + \\ &+ h_3(u) \varphi_{13}(x_1) + h_3(u) \varphi_{23}(x_2) + h_4(u) \varphi_{14}(x_1) + h_4(u) \varphi_{24}(x_2) + h_5(u) \varphi_{15}(x_1) + h_5(u) \varphi_{25}(x_2) \end{aligned}$$



где  $u$  – одна из переменных  $x_1, x_2$ .

Данный факт позволяет относить операторы уравнений прикладной электродинамики к классу разделяющихся.

Возвращаясь к возможности применения подхода работы [2] для построения аналитических решений уравнений прикладной электродинамики, следует отметить, что проблема объемности требуемых вычислений была решена в работе [4], где исключена необходимость рассмотрения всей совокупности из  $2^N$  систем разделенных уравнений и доказано, что можно ограничиться решением не более чем  $N-2$  систем вида (16). В этой же работе впервые был использован термин «обобщенный метод Фурье разделения переменных» (ОМФ). В работе [5] этого же автора обосновано уменьшение количества систем, подлежащих рассмотрению, до  $N-2S$ .

Не умаляя значимости работ [4, 5], стоит отметить, что полученные результаты позволяют решать задачу о разделении переменных, т.е. о построении систем обыкновенных дифференциальных уравнений, эквивалентных исходному. Но с точки зрения создания расчетных моделей для прикладных задач интерес представляет возможность получения аналитических решений (16) относительно неизвестных функций в замкнутом виде. На пути построения таких решений возникает проблема математического характера – переопределенность этих систем, так как каждая из них содержит  $(N-r) \times r$  постоянных разделений  $\alpha_{ji}$ , подлежащих дополнительному определению.

### **3. Уменьшение количества неопределенных коэффициентов систем разделенных уравнений**

Решение данной математической проблемы было начато в [6]. В этой работе доказаны три теоремы, позволяющие уменьшить количество неопределенных коэффициентов для различных случаев соотношения между размерностью билинейного функционального уравнения  $N$  и количеством базисных функций  $r$ . Приведем эти теоремы и поясним результаты их применения.

#### **ТЕОРЕМА 1**

Если  $N$  – четное,  $r = N/2$ , то для матриц  $A[i^r]$ , определенных (14), существует невырожденное унитарное преобразование, сохраняющее их структуру и проводящее блок неопределенных коэффициентов  $\alpha_{ij}$  к диагональному виду.

В этом случае матрица  $A[i^r]$  заменяется подобной ей  $B[i^r]$ , с элементами

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \in \{i^{N/2}\}, \\ 0, i \in \{i^{N/2}\}, j \in \{i^{N/2}\}, i \neq j, \\ \beta_{i_k, j_n} \delta_{kn}, i \in \{j^{N/2}\}, j \in \{i^{N/2}\}, \\ 0, j \in \{j^{N/2}\}. \end{cases}$$

Здесь и далее под  $\delta_{ij}$  понимается 1, если  $i = j$ , и 0 если  $i \neq j$ .

Количество коэффициентов, которые необходимо определить, уменьшается с  $(N - r) \times r$  до  $r$ . Например, при  $N = 6$ ,  $r = 3$  вместо 9 коэффициентов достаточно найти 3.

ТЕОРЕМА 2

Если  $r < N/2$ , то для матриц  $A[i^r]$ , определенных (14), существует невырожденное унитарное преобразование, сохраняющее их структуру и проводящее квадратный блок  $r \times r$  неопределенных коэффициентов  $\alpha_{ij}$  к диагональному виду.

В этом случае матрица  $A[i^r]$  заменяется подобной ей  $B[i^r]$ , с элементами

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \in \{i^r\}, \\ 0, i \in \{i^r\}, j \in \{i^r\}, i \neq j, \\ \beta_{i_n, j_k} \delta_{nk}, 1 \leq n, k \leq r, i_n \in \{j^r\}, j_k \in \{i^r\}, \\ \beta_{i_n, j_k}, n > r, i_n \in \{j^r\}, j_k \in \{i^r\}, \\ 0, j \in \{j^r\}. \end{cases} \quad (18)$$

Количество коэффициентов, которые необходимо определить, уменьшается с  $(N - r) \times r$  до  $(N - 2r) \times r + r$ . Например, при  $N = 9$ ,  $r = 3$  вместо 18 коэффициентов достаточно найти 12.

ТЕОРЕМА 3

Если  $r > N/2$ , то для матриц  $A[i^r]$ , определенных (14), существует невырожденное унитарное преобразование, сохраняющее их структуру и проводящее квадратный блок  $(N - r) \times (N - r)$  неопределенных коэффициентов  $\alpha_{ij}$  к диагональному виду.

В этом случае матрица  $A[i^r]$  заменяется подобной ей  $B[i^r]$ , с элементами

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \in \{i^r\}, \\ 0, & i \in \{i^r\}, j \in \{i^r\}, i \neq j, \\ \beta_{i_n, j_k} \delta_{nk}, & 1 \leq n, k \leq N - r, i_n \in \{j^r\}, j_k \in \{i^r\}, \\ \beta_{i_n, j_k}, & k > N - r, i_n \in \{j^r\}, j_k \in \{i^r\}, \\ 0, & j \in \{j^r\}. \end{cases} \quad (19)$$

Количество коэффициентов, которые необходимо определить, уменьшается с  $(N - r) \times r$  до  $(2r - N) \times (N - r) + (N - r)$ . Например, при  $N = 10, r = 6$  вместо 24 коэффициентов достаточно определить 12.

Очевидно, что исследования, результаты которых изложены в [6], позволили значительно сократить многовариативность при решении систем разделенных уравнений. Однако в случаях теорем 2 и 3 не удается это сделать в полной степени. Дальнейшие исследования свойств матриц коэффициентов для этих случаев привели к следующим двум теоремам.

#### ТЕОРЕМА 4

Если  $r < N/2$ , то для матриц  $B[i^r]$ , определенных (18), существует невырожденное унитарное преобразование, сохраняющее их структуру и уменьшающее количество неопределенных коэффициентов с  $(N - 2r) \times r + r$  до  $N - r$ .

#### Доказательство:

Рассмотрим невырожденную матрицу  $\Pi$ , для которой выполняется  $\det \Pi = 1$  и, следовательно, существует однозначно определяемая обратная матрица  $\Pi^{-1}$ . Элементы такой матрицы определяются следующим образом:

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \in \{i^r\}, \\ 0, i \in \{i^r\}, j \in \{i^r\}, i \neq j, \\ \beta_{i_n, j_k} - \chi_{i_n, j_k} \delta_{lk}, 1 \leq k \leq r, l = n - mr, 0 \leq m \leq \frac{(N-r)}{r}, i_n \in \{j^r\}, j_k \in \{i^r\}, \\ 0, i \in \{i^r\}, j \in \{j^r\} \\ 1, i = j \in \{j^r\}, \\ 0, i \in \{j^r\}, j \in \{j^r\}, i \neq j. \end{cases}$$

Осуществляя для матрицы  $B[i^r]$ , определенной в (7), преобразование вида  $\Pi^{-1}B\Pi = C$ , получим для элементов  $C$ :

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \in \{i^r\}, \\ 0, i \in \{i^r\}, j \in \{i^r\}, i \neq j, \\ \chi_{i_n, j_k} \delta_{lk}, 1 \leq k \leq r, l = n - mr, 0 \leq m \leq \frac{(N-r)}{r}, i_n \in \{j^r\}, j_k \in \{i^r\} \\ 0, j \in \{j^r\}. \end{cases}$$

Что и требовалось доказать.

Благодаря этой теореме, например, для случая  $N=10, r=3$  вместо 15 коэффициентов достаточно найти 7.

#### ТЕОРЕМА 5

*Если  $r > N/2$ , то для матриц  $B[i^r]$ , определенных (19), существует невырожденное унитарное преобразование, сохраняющее их структуру и уменьшающее количество неопределенных коэффициентов с  $(2r - N) \times (N - r) + (N - r)$  до  $r$ .*

Доказательство этой теоремы аналогично предыдущей. Отметим только, что в этом случае матрица  $B[i^r]$  заменяется подобной ей  $C[i^r]$  с элементами

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \in \{i^r\}, \\ 0, i \in \{i^r\}, j \in \{i^r\}, i \neq j, \\ \chi_{i_n, j_k} \delta_{nl}, 1 \leq k \leq r, l = k - mr, 0 \leq m \leq \frac{r}{(N-r)}, i_n \in \{j^r\}, j_k \in \{i^r\}, \\ 0, j \in \{j^r\}. \end{cases}$$

Например, при  $N=11$ ,  $r=6$  вместо 10 коэффициентов достаточно определить 6.

Как видно из этих примеров, количество коэффициентов, подлежащих определению, уменьшается до количества уравнений в системах (16) по одной из переменных. Это позволяет однозначно найти их значения при наличии нетривиального решения.

#### 4. Расчет поля направляющей структуры треугольного сечения

Наглядным примером реализации возможностей ОМФ при решении прикладных задач электродинамики является задача полого волновода треугольного сечения (рис. 1), оболочка которого принимается за идеально проводящую, а внутренняя среда является однородной [7]. Такая модель в большинстве случаев оказывается удовлетворительной для практических расчетов. При необходимости она уточняется путем учета потерь в металле.

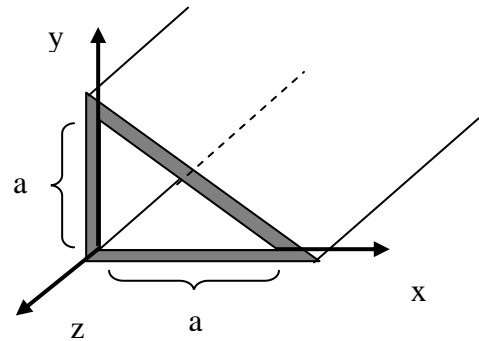


Рисунок 1 – Геометрия задачи.

Поиск векторов электромагнитного поля замыкается на рассмотрение уравнения Гельмгольца, которому должны удовлетворять компоненты этих векторов:

$$\frac{\partial^2 U(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U(x, y, z)}{\partial z^2} + kU(x, y, z) = 0 \quad (20)$$

Пространственная задача о распространении волн в подобной продольно-однородной структуре сводима к решению двумерного уравнения Гельмгольца путем классического отделения переменной  $z$ , т.е. представления искомой функции в виде:

$$U(x, y, z) = f(x, y)Z(z) \quad (21)$$

Уравнение для  $f(x, y)$  при этом принимает вид:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} + \lambda f(x, y) = 0 \quad (22)$$

Здесь неизвестна не только функция  $f(x, y)$ , но и параметр  $\lambda$ , имеющий смысл поперечного волнового числа. Само по себе уравнение (22) не имеет определенных решений с физической точки зрения. Необходимо поставить краевую (граничную) задачу. Известно, что для определения семейства  $E$ -волн той или иной направляющей структуры с однородной средой и при идеализации проводящих границ надо найти решения краевой задачи, содержащей, помимо уравнения (22), условие:

$$f(x, y) = 0 \text{ на } L, \quad (23)$$

где под  $L$  понимается идеально проводящий контур поперечного сечения полого волновода или совокупность контуров в более сложных случаях. В нашем примере, как видно из рисунка, в качестве  $L$  выступает прямоугольный равнобедренный треугольник. Применяя для решения этой краевой задачи классический метод Фурье, т.е. представляя искомую функцию в виде:

$$f(x, y) = X(x)Y(y) \quad (24)$$

можем получить следующее решение для рассматриваемого уравнения:

$$\begin{cases} X(x) = C_1 \sin(\lambda_x x) + C_2 \cos(\lambda_x x) \\ Y(y) = C_3 \sin(\lambda_y y) + C_4 \cos(\lambda_y y) \end{cases} \quad (25)$$

Неопределенные константы, содержащиеся в данном решении, должны быть определены из граничных условий, но получаемая при этом система уравнений не имеет нетривиальных решений. Следовательно, решение (25) не удовлетворяет поставленной краевой задаче. Построим решение, используя ОМФ.

Представляя искомую функцию в виде:

$$f(x, y) = X_1(x)Y_1(y) + X_2(x)Y_2(y) \quad (26)$$

уравнение (22) приводится к билинейному виду:

$$Y_1(X_1'' + \lambda X_1) + (X_2'' + \lambda X_2)Y_2 + X_1 Y_1'' + X_2 Y_2'' = 0 \quad (27)$$

Осуществляя необходимые построения в соответствии со схемой применения ОМФ при  $S=2, r=2$  получим следующую систему разделенных уравнений:

$$\begin{cases} X_1 = \alpha_{31}(X_1'' + \lambda X_1) \\ X_2 = \alpha_{42}(X_2'' + \lambda X_2) \\ Y_1 = -\alpha_{31}Y_1'' \\ Y_2 = -\alpha_{42}Y_2'' \end{cases} \quad (28)$$

Решение этой системы через тригонометрические функции имеет следующий вид:

$$\begin{cases} X_1(x) = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{a_{3.1}\lambda - 1}{a_{3.1}}}x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{a_{3.1}\lambda - 1}{a_{3.1}}}x\right) \\ X_2(x) = C_3 \sin\left(\sqrt{\frac{a_{4.2}\lambda - 1}{a_{4.2}}}x\right) + C_4 \cos\left(\sqrt{\frac{a_{4.2}\lambda - 1}{a_{4.2}}}x\right) \\ Y_1(x) = C_5 \sin\left(\frac{y}{\sqrt{a_{3.1}}}\right) + C_6 \cos\left(\frac{y}{\sqrt{a_{3.1}}}\right) \\ Y_2(x) = C_7 \sin\left(\frac{y}{\sqrt{a_{4.2}}}\right) + C_8 \cos\left(\frac{y}{\sqrt{a_{4.2}}}\right) \end{cases} \quad (29)$$

Это решение содержит восемь неопределенных коэффициентов и постоянные разделения  $a_{3,2}$ ,  $a_{4,1}$ , которые могут быть определены из граничных условий.

Условие по оси  $x$ , имеющее вид  $f(x,0)=0$ , приводит к уравнению:

$$\begin{aligned} & C_1 C_6 \sin\left(\sqrt{\frac{a_{3.1}\lambda - 1}{a_{3.1}}}x\right) + C_2 C_6 \cos\left(\sqrt{\frac{a_{3.1}\lambda - 1}{a_{3.1}}}x\right) + \\ & + C_3 C_8 \sin\left(\sqrt{\frac{a_{4.2}\lambda - 1}{a_{4.2}}}x\right) + C_4 C_8 \cos\left(\sqrt{\frac{a_{4.2}\lambda - 1}{a_{4.2}}}x\right) = 0 \end{aligned} \quad (30),$$

из которого следует :  $C_6 = 0$ ,  $C_8 = 0$ .

Условие по оси  $y$ , имеющее вид  $f(0,y)=0$ , приводит к уравнению:

$$C_2 C_5 \sin\left(\frac{y}{\sqrt{a_{3.1}}}\right) + C_3 C_7 \sin\left(\frac{y}{\sqrt{a_{4.2}}}\right) = 0 \quad (31),$$

из которого полагаем:  $C_2 = 0$ ,  $C_3 = 0$

Условие по гипотенузе рассматриваемого треугольника, имеющее вид  $f(y-a,y)=0$ , приводит к уравнению:

$$C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{a_{3.1}\lambda - 1}{a_{3.1}}}(y-a)\right) C_5 \sin\left(\frac{y}{\sqrt{a_{3.1}}}\right) + C_4 \sin\left(\sqrt{\frac{a_{4.2}\lambda - 1}{a_{4.2}}}(y-a)\right) C_7 \sin\left(\frac{y}{\sqrt{a_{4.2}}}\right) = 0$$

которое может быть преобразовано к виду:

$$\begin{aligned}
 & C_1 C_5 \sin\left(\frac{y}{\sqrt{a_{3.1}}}\right) \sin\left(\sqrt{\frac{a_{3.1}\lambda-1}{a_{3.1}}}y\right) \cos\left(\sqrt{\frac{a_{3.1}\lambda-1}{a_{3.1}}}a\right) - \\
 & - C_1 C_5 \sin\left(\frac{y}{\sqrt{a_{3.1}}}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{a_{3.1}\lambda-1}{a_{3.1}}}y\right) \sin\left(\sqrt{\frac{a_{3.1}\lambda-1}{a_{3.1}}}a\right) + \\
 & + C_4 C_7 \sin\left(\frac{y}{\sqrt{a_{4.2}}}\right) \sin\left(\sqrt{\frac{a_{4.2}\lambda-1}{a_{4.2}}}y\right) \cos\left(\sqrt{\frac{a_{4.2}\lambda-1}{a_{4.2}}}a\right) - \\
 & - C_4 C_7 \sin\left(\frac{y}{\sqrt{a_{4.2}}}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{a_{4.2}\lambda-1}{a_{4.2}}}y\right) \sin\left(\sqrt{\frac{a_{4.2}\lambda-1}{a_{4.2}}}a\right) = 0
 \end{aligned} \tag{32}$$

Решая данное тригонометрическое уравнение, можно обратить его в тождество при следующих ограничениях на неопределенные постоянные:

$$a_{4.2} = \frac{a^2}{\lambda a^2 - \pi^2 m^2}, \quad a_{3.1} = \frac{a^2}{\lambda a^2 - \pi^2 n^2}, \quad \lambda = \frac{\pi^2 (m^2 + n^2)}{a^2}, \quad |m - n| = 2k \tag{33},$$

где  $k, n, m$  – целые ненулевые числа.

При этих ограничениях искомая функция принимает следующий вид:

$$f(x, y) = C \left( \sin\left(\frac{\pi x n}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y m}{a}\right) - \sin\left(\frac{\pi x m}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y n}{a}\right) \right) \tag{34},$$

где  $C$  – неопределенная амплитудная константа, появившаяся вследствие следующих обозначений:  $C_1 C_5 = C$ ,  $C_4 C_7 = -C$ .

В первоначально поставленной задаче об определении семейства Е-волн рассматриваемой направляющей структуры в качестве  $f(x, y)$  выступают собственные функции  $E_z^{mn}$ , имеющие смысл продольной компоненты напряженности электрического поля для волны, определяемой выбором чисел  $m$  и  $n$ . Этим собственным функциям соответствуют собственные значения  $\lambda_{mn}$  из выражения (33). Полное электромагнитное поле для этого волновода может быть определено из зависимостей поперечных компонент ( $E_x$ ,  $E_y$ ,  $H_x$ ,  $H_y$ ) от  $E_z^{mn}$  и  $\lambda_{mn}$ , вытекающих из уравнений Максвелла:

$$E_x = \frac{iC\Gamma}{\lambda a} \left( m \cos\left(\frac{\pi x m}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y n}{a}\right) - n \cos\left(\frac{\pi x n}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y m}{a}\right) \right),$$



$$E_y = \frac{iC\Gamma}{\lambda a} \left( n \sin\left(\frac{\pi xm}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi yn}{a}\right) - m \sin\left(\frac{\pi xn}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi ym}{a}\right) \right),$$

$$H_x = \frac{iC\omega\epsilon_0}{\lambda a} \left( m \sin\left(\frac{\pi xn}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi ym}{a}\right) - n \sin\left(\frac{\pi xm}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi yn}{a}\right) \right),$$

$$H_y = \frac{iC\omega\epsilon_0}{\lambda a} \left( m \cos\left(\frac{\pi xm}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi yn}{a}\right) - n \cos\left(\frac{\pi xn}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi ym}{a}\right) \right),$$

где  $\Gamma = \sqrt{k - \lambda}$  - продольное волновое число, а  $\omega$  - круговая частота волнового процесса.

Анализируя данное решение, приходим к выводу о возможности передачи энергии в рассматриваемой направляющей структуре путем распространения сдвоенных связанных волн определенного частотного спектра, определяемого геометрией поперечного сечения волновода. Причем минимум критической частоты этого типа волн реализуется для  $E^{13}$ . Используя возможности визуализации СКА MAPLE можно получить изображение поля в поперечном сечении вс

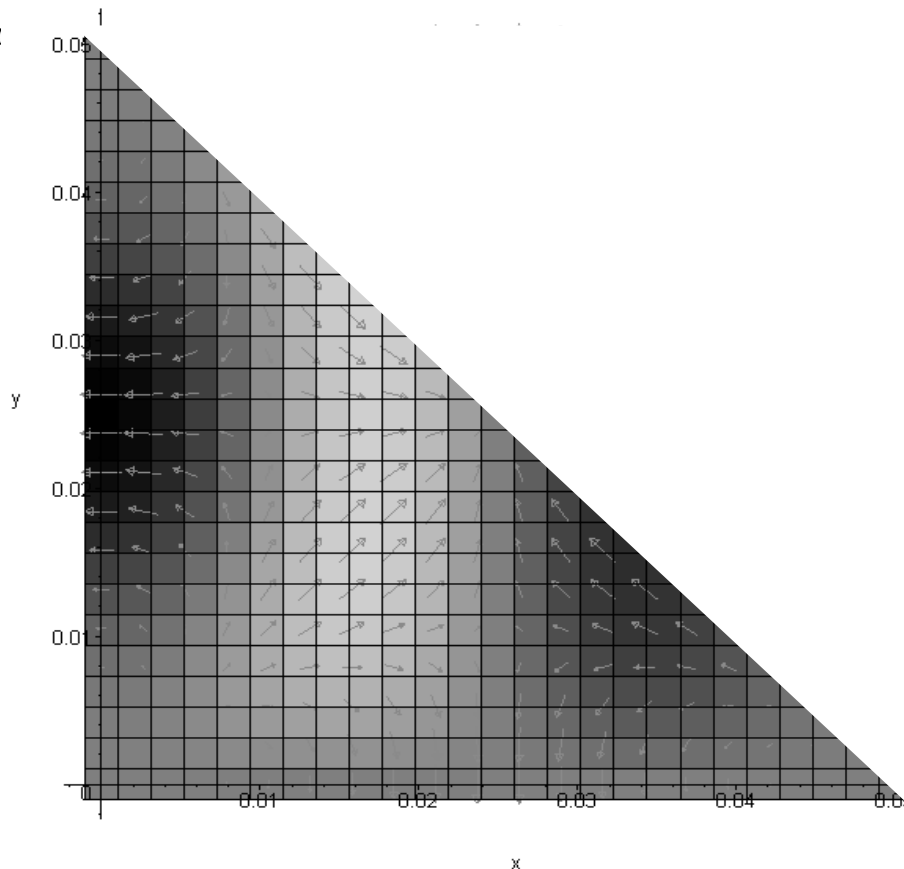


Рисунок 2- Полевой снимок волновода при  $a=0,05м$  для  $E^{13}$

Стоит отметить, что аналогично решается задача по нахождению семейства Н-волн для данного волновода. В этом случае, формулируя вторую краевую задачу для уравнения Гельмгольца, получим для продольной составляющей:

$$H_z^{mn} = C \left( \cos\left(\frac{\pi x m}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y n}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi x n}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y m}{a}\right) \right), \quad (35)$$

где  $m=(0), 1, 2, \dots; n=(0), 1, 2, \dots; |m-n|=2k; k=1, 2, \dots$

В этом случае минимум критической частоты реализуется для волны  $H^{20}$  и данная волна является основной для рассматриваемой направляющей структуры.

### 5. Алгоритм применения ОМФ

С учетом доказанных теорем ОМФ представляет собой метод, легко реализуемый в системах компьютерной алгебры, что немаловажно для создания инженерного проблемно-ориентированного программного обеспечения. В качестве основы алгоритма предлагается схема применения ОМФ, состоящая из следующих этапов:

1) в исходной задаче, содержащей

а) уравнение вида 
$$\sum_i A_i(x, y) L_i = 0,$$

где 
$$L_i = a_{i,0} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + a_{i,1} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + a_{i,2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + a_{i,3} \frac{\partial \Psi}{\partial y} + a_{i,4} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + a_{i,5} \Psi + a_{i,6}; \quad a_{i,j} -$$

числовые константы;

б) краевые условия 
$$\Phi[\Psi(a, y), \Psi'(b, y), \Psi(x, c), \Psi'(x, d), x, y] = 0,$$

где  $\Phi$  – функциональный оператор,  $a, b, c, d - \text{const}$ ,

в случае необходимости осуществляем невырожденную замену переменных  $x = U(u, v), y = V(u, v)$  для представления коэффициентов уравнения в виде

$$A_i(x, y) = \sum_{j=1}^{S_i} A_{uij}(u) A_{vij}(v);$$

2) путем выбора вида частных решений  $\Psi(u, v) = \sum_{i=1}^S X_i(u)Y_i(v)$ , ( $S = 1..10$ ,

значение выбирается из вида уравнения и краевых условий) исходное уравнение

приводим к виду билинейного функционального  $\sum_{k=1}^N f_k(u) \cdot g_k(v) = 0$ ,

где  $f_k = b_{k,0}(u) + \sum_{i=1}^S b_{k,1}(u)X_i + \sum_{i=1}^S b_{k,2}(u)X_i' + \sum_{i=1}^S b_{k,3}(u)X_i''$ ,

$g_k = c_{k,0}(v) + \sum_{i=1}^S c_{k,1}(v)Y_i + \sum_{i=1}^S c_{k,2}(v)Y_i' + \sum_{i=1}^S c_{k,3}(v)Y_i''$ ;

3) выбираем  $r = S$  линейно-независимых функций на множестве  $f_k$  и формируем матрицы функций

$\mathbf{F}_r^T = (f_1, \dots, f_r)$ ;  $\mathbf{F}_{N-r}^T = (f_{r+1}, \dots, f_N)$ ;  $\mathbf{G}_r^T = (g_{r+1}, \dots, g_N)$ ;  $\mathbf{G}_{N-r}^T = (g_1, \dots, g_r)$ ;

4) формируем матрицу  $\mathbf{A}_r$  параметров разделения с учетом обоснованного уменьшения количества коэффициентов систем разделенных уравнений по одному из следующих правил:

$$\text{а) } r = N/2 \quad a_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \in \{i^r\}, \\ 0, i \in \{i^r\}, j \in \{i^r\}, i \neq j, \\ \chi_{i_n, j_k} \delta_{lk}, i_n \in \{j^r\}, j_k \in \{i^r\}, \\ 0, j \in \{j^r\}. \end{cases}$$

$$\text{б) } r < N/2 \quad a_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \in \{i^r\}, \\ 0, i \in \{i^r\}, j \in \{i^r\}, i \neq j, \\ \chi_{i_n, j_k} \delta_{lk}, l = n - mr, 0 \leq m \leq \frac{(N-r)}{r}, i_n \in \{j^r\}, j_k \in \{i^r\}, \\ 0, j \in \{j^r\}. \end{cases}$$

$$\text{в) } r > N/2 \quad a_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \in \{i^r\}, \\ 0, i \in \{i^r\}, j \in \{i^r\}, i \neq j, \\ \chi_{i_n, j_k} \delta_{nl}, l = k - mr, 0 \leq m \leq \frac{r}{(N-r)}, i_n \in \{j^r\}, j_k \in \{i^r\}, \\ 0, j \in \{j^r\}. \end{cases}$$

где  $\chi_{ij}$  – произвольные числовые коэффициенты;  $\{i^r\}$ ,  $\{j^r\}$  такие, что

$$\begin{aligned} \{i^r\} &= \{i_1, \dots, i_r\}; \{j^r\} = \{j_1, \dots, j_{N-r}\}; \{i^0\} = \emptyset; \{j^0\} = \{1, 2, \dots, N\}, \\ 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq N; 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{N-r} \leq N; \\ \{i^r\} \cup \{j^r\} &= \{1, 2, \dots, N\}; \{i^r\} \cap \{j^r\} = \emptyset; \end{aligned}$$

5) для выбранных  $S$  и  $r$  формируем системы разделенных ОДУ:

а) по переменной  $u$   $\mathbf{F}_{N-r} = \mathbf{A}_r \mathbf{F}_r$ ;

б) по переменной  $v$   $\mathbf{G}_r + \mathbf{A}_r^T \mathbf{G}_{N-r} = 0$ ;

б) на основании краевых условий с учетом представления искомой функции (пункт 3) записываем требования вида:

а) по переменной  $u$   $\Phi_u[X_1(u), \dots, X_S(u), X'_1(u), \dots, X'_S(u), Y_1(a), \dots, Y_S(a), Y'_1(b), \dots, Y'_S(b)] = 0$ ;

б) по переменной  $v$   $\Phi_v[X_1(c), \dots, X_S(c), X'_1(d), \dots, X'_S(d), Y_1(v), \dots, Y_S(v), Y'_1(v), \dots, Y'_S(v)] = 0$ ,

где  $\Phi_u, \Phi_v$  – функциональные операторы;  $a, b, c, d$  – const;

7) решая задачу п. 5а, п. 6а, находим собственные значения параметров разделения  $\alpha_{i,j,n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и соответствующие им наборы собственных функций по переменной  $u$   $\{X_{1,n}, \dots, X_{S,n}\}$ ;

8) решая задачу п.5б, п.6б, находим наборы функций по переменной  $v$   $\{Y_{1,n}, \dots, Y_{S,n}\}$ , соответствующие уже известным собственным значениям параметров разделения  $\alpha_{i,j,n}$ ;

9) в случае несовместности полученных систем уравнений п. 7, п. 8 повторяем этапы построения решения, начиная с п. 3 с другим значением  $r$  из диапазона от  $S$  до  $N - S$ ;

10) в случае неудачи повторяем этапы построения решения, начиная с пункта 2, с другим значением  $s$  из диапазона от 1 до 10;

11) общее решение исходной задачи ищем на основе принципа суперпозиции в виде ряда  $\Psi(u, v) = \sum_n \sum_i h_n X_{n,i} Y_{n,i}$ , где коэффициенты  $h_n$  определяются из требований краевых условий;

12) на заключительном этапе исследуем сходимость ряда в заданной области изменения аргументов. При необходимости осуществляется переход обратный п. 1 к старым переменным.

## **6. Заключение**

В качестве основных результатов исследований можно отметить следующее:

- на основании анализа делимости уравнений Максвелла в средах с пространственно-временными изменениями параметров получен общий вид скалярных волновых уравнений, моделирующих электромагнитное поле и обоснован выбор в качестве метода для построения аналитических решений таких уравнений современного варианта развития классического метода разделения переменных – ОМФ, основанного на сведении исходного уравнения к билинейному функциональному;

- разработан и обоснован способ улучшения ОМФ, заключающийся в приведении матрицы постоянных разделения к специальному виду. Доказана достаточность матрицы этого вида для получения нетривиального решения систем разделенных уравнений эквивалентных на определенном классе функций исходному волновому уравнению с частными производными. В зависимости от соотношения между размерностью билинейного функционального уравнения  $N$  и количеством линейно-независимых функций определенных в качестве базисных  $r$  определены различные пути уменьшения количества постоянных разделения, подлежащих определению;

- разработан алгоритм применения улучшенного ОМФ для решения краевых задач электродинамики сред с пространственно-временными изменениями параметров.

Следует отметить, что при реализации предложенного алгоритма, помимо традиционных арифметико-логических процедур, необходимо выполнение большого объема символьных (аналитических) вычислений. Это явилось основным аргументом при выборе в качестве программной оболочки для реализации системы компьютерной алгебры «MAPLE». Программная реализация ОМФ, а также

тестирование достоверности установленных закономерностей на ряде модельных задач [7 – 9], свидетельствуют об эффективности данного подхода в случае построения аналитических решений краевых задач прикладной электродинамики.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Жизневский, В.А. О классификации сред с точки зрения разделимости уравнений Максвелла/ И.Е. Андрушкевич, В.А.Жизневский, Ю.В.Шиенок // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. - №1 (35), - 2005. - С.112-118.
2. Скоробогатько, В.Я. Исследования по качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными / Скоробогатько В.Я. – Киев: Наукова думка, 1980 – 244 с.
3. Колмогоров, А.Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения / А.Н. Колмогоров, // Докл. АН СССР. – 1957. – Т. 114. – С. 953-956
4. Андрушкевич, И.Е. Об одном обобщении метода Фурье разделения переменных. / И.Е Андрушкевич // Электромагнитные волны & Электронные системы. – 1998. – № 4. – Т.3. – С. 4-17.
5. Андрушкевич, И.Е. Обобщенный метод Фурье разделения переменных. / И.Е Андрушкевич // Вестник Полоцкого государственного университета. – №4. – 2005. – С.28-34.
6. Андрушкевич, И.Е Развитие обобщенного метода Фурье разделения переменных / И.Е. Андрушкевич, В.А. Жизневский // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С. Фундаментальные науки - №4. – 2006. – С.26–35.
7. Жизневский, В.А. Применение обобщенного метода Фурье в задаче полого волновода треугольного сечения. / И.Е. Андрушкевич, В.А. Жизневский // Журнал радиоэлектроники: электронный журнал. 2002. N5. URL: <http://jre.cplire.ru/alt/may02/4/text.html>

8. Андрушкевич, И.Е. Взаимодействие электромагнитной волны со средой особой проводимости. / И.Е. Андрушкевич, В.А. Жизневский // Вестник Витебского государственного университета. – 2003. – № 1 (27). – С.116-120.
9. Zhiznevskiy, V.A. Use of generalized Fourier method in solving interior hybrid boundary value problems / I.E. Andrushkevich, V.A. Zhiznevskiy // ElectroDynamic Systems Software Scientific <http://www.eds-soft.com> [Электронный ресурс] – 2004. – URL: <http://www.eds-soft.com/en/publications/articles/2004/index.php?ID=24>