УДК537.8; 517.951

И.Е. АНДРУШКЕВИЧ, В.А. ЖИЗНЕВСКИЙ

НОВЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ НЕОДНОРОДНЫХ И НЕСТАЦИОНАРНЫХ СРЕД

This article deals with the problem of making analytical decisions of Maxwell's equations in the media with the time- and place-varying parameters with the help of the method of the variable quantities division. The conformities of the law, which allow to adapt the generalized Fure's method of variable quantities for the practical application are investigated grounded.

Исследования, результаты которых рассматриваются в данной статье, были вызваны необходимостью построения аналитических решений уравнений Максвелла в средах с пространственно-временными изменениями параметров - од-ним из наиболее важных этапов моделирования распространения электромагнитных волн в неоднородных и нелинейных средах. Разработанный математический аппарат и соответствующее программное обеспечение обладают доста-точной универсальностью и могут быть адаптированы к широкому спектру за-дач теоретической и прикладной физики при аналитическом решении диффе-ренциальных уравнений в частных производных (ДУЧП).

Актуальность поиска аналитических решений ДУЧП, описывающих различные физические процессы, определяется возможностью их качественного анализа при моделировании и прогнозировании поведения исследуемых систем. Получить решение в аналитическом виде позволяет метод разделения переменных, предложенный еще в Х Ш в., называемый также методом Фурье. Выбор этого метода обоснован тем, что его сущностью является сведение исходного ДУЧП к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), для которых существует развитая качественная теория. Правда, возможности применения метода в классическом виде (так называемого классического метода Фурье (КМФ)), исследованные в [1, 2], ограничены задачами простой геометрии. В неоднородной и нестационарной электродинамике, где параметры среды представляют собой функции координат и времени, возникает необходимость решения волновых уравнений вида ДУЧП второго порядка с изменяющимися коэффициентами. Применение КМФ в этих случаях положительных результатов не дает. Эта ограниченность метода отчасти заложена в изначально определяемом виде искомого решения как произведения функций отдельных переменных. В [3] был предложен один из возможных путей развития КМФ посредством представления искомого частного решения ДУЧП в виде суммы произведений функций отдельных переменных. Автор [3] признает, что в этом случае резко возрастает объем рассматриваемого уравнения, а также количество подлежащих определению величин, и на первый план выходит сложность проведения большого объема громоздких аналитических вычислений. Развитие теории метода с целью преодоления проблем вычислительного характера при практическом использовании являлось целью исследований авторов данной статьи.

Исходное ДУЧП имело вид

$$L\Psi(x,y)=U(x,y), \tag{1}$$

где $\Psi(x,y)$ - искомая функция, $U(x,y)$ -неоднородность, L -дифференциальный оператор.

При допущениях

$$U(x,y)=\sum_{k=1}^{l}\Phi_k(x)\,\mathrm{T}_k(y), \tag{2}$$

$$\Psi(x,y)=\sum_{k=1}^{S}X_k(x)\,Y_k(y) \tag{3}$$

и предположении о разделимости оператора L

$$L\Psi(x,y)=\sum_{i=1}^{l}L_{ix}\left(X_1(x),\,X_2(x),\,\dots,\,X_S(x)\right)L_{iy}\left(Y_1(y),\,Y_2(y),\,\dots,\,Y_S(y)\right) \tag{4}$$

(1) приобретает вид билинейного функционального уравнения

$$\sum_{\zeta=1}^{N}f_\zeta(x)\,g_\zeta(y)=0. \tag{5}$$

Из (3) видно, что, в отличие от КМФ, искомая функция представляется в виде суммы произведений функций от отдельных переменных. Это позволяет говорить об обобщении процедуры разделения и использовать термин «обобщенный метод Фурье» (ОМФ). При этом число слагаемых в представлении искомой функции, т. е. S из (3), определяет модификацию ОМФ (ОМФ-S). Одним из условий формирования вида билинейного уравнения выступает линейная независимость хотя бы одного из множеств функций f_ζ и g_ζ. Заметим, что оператор (4) обычно является нелинейным. Однако во многих случаях, важных с точки зрения решения прикладных задач, в операторах вида (4) нетрудно выделить линейную часть:

$$\begin{aligned}L\Psi(x,y)=&\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{S}\tilde{L}_{ix}\left(X_k(x)\right)\tilde{L}_{iy}\left(Y_k(y)\right)+\\&+\sum_{j=1}^{n}\tilde{\tilde{L}}_{jx}\left(X_1(x),\,X_2(x),\,\dots,\,X_S(x)\right)\tilde{\tilde{L}}_{jy}\left(Y_1(y),\,Y_2(y),\,\dots,\,Y_S(y)\right).\end{aligned} \tag{6}$$

Соотношение (6) означает, что из l пар операторов L_{ix}, L_{iy} точно m пар $\left(\tilde{L}_{ix}, \tilde{L}_{iy}\right)$ являются линейными, а остальные n пар $\left(\tilde{\tilde{L}}_{jx}, \tilde{\tilde{L}}_{jy},\ j=\overline{1,n},\ n+m=l\right)$ в общем случае нелинейны.

Представляя (5) в матричном виде, получаем

$$\mathbf{f}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{g} = 0.$$

При этом $N = m \times S + n + t$ определяет размерность билинейного уравнения, а функциональные матрицы имеют вид

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \tilde{L}_{1x}\left(X_{\eta 1}\right) \\ \dots \\ \tilde{L}_{1x}\left(X_{\eta S}\right) \\ \dots \\ \tilde{L}_{mx}\left(X_{\eta 1}\right) \\ \dots \\ \tilde{L}_{mx}\left(X_{\eta S}\right) \\ \tilde{\tilde{L}}_{1x}\left(X_{\eta 1}, X_{\eta 2}, \dots, X_{\eta S}\right) \\ \dots \\ \tilde{\tilde{L}}_{nx}\left(X_{\eta 1}, X_{\eta 2}, \dots, X_{\eta S}\right) \\ -\Phi_1 \\ \dots \\ -\Phi_t \end{pmatrix}; \ \mathbf{g} = \begin{pmatrix} \tilde{L}_{1y}\left(Y_{\eta 1}\right) \\ \dots \\ \tilde{L}_{1y}\left(Y_{\eta S}\right) \\ \dots \\ \tilde{L}_{my}\left(Y_{\eta 1}\right) \\ \dots \\ \tilde{L}_{my}\left(Y_{\eta S}\right) \\ \tilde{\tilde{L}}_{1y}\left(Y_{\eta 1}, Y_{\eta 2}, \dots, Y_{\eta S}\right) \\ \dots \\ \tilde{\tilde{L}}_{ny}\left(Y_{\eta 1}, Y_{\eta 2}, \dots, Y_{\eta S}\right) \\ T_1 \\ \dots \\ T_t \end{pmatrix};$$

$\mathbf{f}^{\mathrm{T}}$ - матрица, транспонированная к $\mathbf{f}$. В [3] установлено, что для нахождения решений уравнения (5) необходимо и достаточно решить $\sum_{r=0}^{N} C_N^r = 2^N$ систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\left(\mathbf{E} - \mathbf{A}\left[i^r\right]\right)\mathbf{f} = 0, \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left[i^r\right]\mathbf{g} = 0. \tag{7}$$

Здесь E - единичная матрица порядка N, $r = \overline{1,N}$, $\mathbf{A}\left[i^r\right]$ - матрица размерности $N \times N$, $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left[i^r\right]$ - матрица, транспонированная к $\mathbf{A}\left[i^r\right]$, элементы которой определяются следующим образом:

$$\mathbf{a}_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \in \left\{i^r\right\}, \\ 0, i \in \left\{i^r\right\}, j \in \left\{i^r\right\}, i \neq j, \\ \alpha_{ij}, i \in \left\{j^r\right\}, j \in \left\{i^r\right\}, \\ 0, j \in \left\{j^r\right\}, \end{cases} \tag{8}$$

где α_{ij} - произвольные числовые коэффициенты, $\left\{i^r\right\}$, $\left\{j^r\right\}$ - упорядоченные целочисленные множества такие, что

$$\left\{i^r\right\} = \left\{i_1, \dots, i_r\right\}; \left\{j^r\right\} = \left\{j_1, \dots, j_{N-r}\right\};\ r = \overline{1,N};\ \left\{i^0\right\} = \varnothing;\ \left\{j^0\right\} = \left\{1, 2, \dots, N\right\},$$

$$1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_r \le N;\ 1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_{N-r} \le N;$$
$$\{i^r\} \cup \{j^r\} = \{1,\ 2,\ \ldots,\ N\};\ \{i^r\} \cap \{j^r\} = \varnothing.$$

Для наглядности приведем структуру матрицы $\mathbf{A}\left[i^r\right]$, элементы которой определены в (8):

Столбец / Строка	i_1	…	i_r	j_1	…	j_{N-r}
i_1	1	…	0	0	…	0
…	…	…	…	…	…	…
i_r	0	…	1	0	…	0
j_1	$\alpha_{j_1,\ i_1}$	…	$\alpha_{j_1,\ i_r}$	0	…	0
…	…	…	…	…	…	…
j_{N-r}	$\alpha_{j_{N-r},\ i_1}$	…	$\alpha_{j_{N-r},\ i_r}$	0	…	0

В соответствии с [3] решение систем (7) может быть представлено как

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}\left[i^r\right]_{i_1,\ldots,i_r}\begin{pmatrix} F_1(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ F_r(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = \left(\mathbf{E} - \mathbf{A}'\left[i^r\right]\right)_{j_1,\ldots,j_{N-r}}\begin{pmatrix} G_1(y) \\ \cdot \\ \cdot \\ G_{N-r}(y) \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где $\mathbf{A}\left[i^r\right]_{k_1,\ldots,k_s}$, $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left[i^r\right]_{k_1,\ldots,k_s}$ - матрицы, образованные столбцами $k_1,\ldots,k_s$ матриц $\mathbf{A}\left[i^r\right]$ и $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left[i^r\right]$ соответственно; $F_1(x)$, ..., $F_r(x)$ - произвольная линейно независимая система функций от переменной x, а $G_1(y)$, ..., $G_{N-r}(y)$ - произвольная система функций от y.

Таким образом, любое решение уравнения (5) можно представить в виде (9) при соответствующем выборе матрицы $\mathbf{A}\left[i^r\right]$ и системы функций $F_1(x)$, ..., $F_r(x)$, $G_1(y)$, ..., $G_{N-r}(y)$ с указанными свойствами, и, наоборот, всякая система функций вида (9) является решением уравнения (5). Для нахождения всех решений уравнения (5) необходимо решить 2^N систем переопределенных обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом возникает сложность: в каждой системе имеется $(N-r)\times r$ постоянных разделения α_{ji}, подлежащих дополнительному определению. В итоге полученные в [3] результаты оказываются малопригодными к практическому применению из-за громоздкости и сложности.

Заметим, что эти недостатки ОМФ в значительной степени были устранены в [4], где установлено, что ***различные мап*** $\mathbf{A}\left[i^r\right]$ ***для одного и того же r подобны.*** Данный факт исключает необходимость рассмотрения всей совокупности из 2^N систем обыкновенных дифференциальных уравнений и позволяет ограничиться решением не более чем $(N-2)$ систем вида (7). Дальнейшим приближением к практическому использованию, алгоритмизации, а следовательно, и реализации ОМФ на ЭВМ стало уменьшение количества решаемых систем ОДУ до числа $N-2S$, обоснованного в [5].

Оставался открытым вопрос о значениях параметров $\mathbf{a}$ из матрицы (8). Наличие в каждой системе (7) такого большого количества неопределенных параметров разделения делает их переопределенными. В итоге при решении конкретных задач приходится прибегать к искусственным, строго говоря ничем не обоснованным, приемам снятия переопределенности,. как, например, удачное зануление целого ряда параметров (см., например, [6-8]). Корректно поставленные задачи методов математической физики, решаемые с помощью ОМФ в [6-8], дали основание предположить наличие ряда закономерностей и взаимосвязи между конкретными значениями параметров а из (8), позволяющих исключить переопределенность рассматриваемых систем ОДУ. Эти закономерности были найдены и обоснованы при дальнейших исследованиях. Результаты этих исследований можно изложить в трех строго доказанных утверждениях.

Утверждение 1.

Если N — четное, r = N/2, то для матриц $\mathbf{A}[i^r]$, *определенных* (8), *существует невырожденное унитарное преобразование, сохраняющее их структуру и приводящее блок неопределенных коэффициент* α_{ij} *к диагональному виду.*

Утверждение 2.

Если r < N/2, то для матриц $\mathbf{A}[i^r]$, *определенных* (8), *существует невырожденное унитарное преобразование, сохраняющее их структуру и приводящее квадратный блок* $r\times$ *неопределенных коэффициентов* α_{ij} *к диагональному виду.*

Утверждение 3.

Если r > N/2, то для матриц $\mathbf{A}[i^r]$, *определенных* (8), *существует невырожденное унитарное преобразование, сохраняющее их структуру и приводящее квадратный блок* $(N-r)\times(N-r)$ *неопределенных коэффициентов* α_{ij} *к диагональному виду.*

Доказательства опустим. Для наглядности приведем для случая N - четное, $r = N/2$ структуру матрицы, к которой возможно преобразование матрицы $\mathbf{A}\left[i^r\right]$

Строка \ Столбец	i_1	i_2	...	$i_{N/2}$	j_1	...	$j_{N/2}$
i_1	1	0	...	0	0	...	0
i_2	0	1	...	0	0	...	0
...	...	...	...	...	...	...	...
$i_{N/2}$	0	0	...	1	0	...	0
j_1	β_{j_1, i_1}	0	...	0	0	...	0
j_2	0	β_{j_2, i_2}	...	0	0	...	0
...	...	...	...	...	...	...	...
$j_{N/2}$	0	0	...	$\beta_{j_{N/2}, i_{N/2}}$	0	...	0

Таким образом, уменьшается количество коэффициентов, подлежащих определению.

Учитывая в совокупности утверждения 1-3, теорему из [5, с. 34] можно сформулировать следующим образом:

Для построения общего решения уравнения (1)-(5) *достаточно получить решения N-2S систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида*

$$\left(\mathbf{E}-\mathbf{A}\left[i^r\right]\right)\mathbf{f}=0, \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left[i^r\right]\mathbf{g}=0,$$

где $\mathbf{A}\left[i^r\right]$ *- матрица размерности* $N\times N$, *элементы которой определяются следующими соотношениями:*

$$\mathbf{b}_{ij}=\sum_{i'\in\{i^r\}}\delta_{ii'}\delta_{i'j}+\sum_{i'_m\in\{i^r\}}\sum_{j'_n\in\{j^r\}}\beta_{ij}\delta_{ij'_n}\delta_{i'_m j}\delta_{mn}+\sum_{i'\in\{i^r\}'}\sum_{j'\in\{j^r\}'}\beta_{ij}\delta_{ij'}\delta_{i'j},$$

где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j, \end{cases}$ β_{ij} — *произвольные числовые коэффиц* $\{ i^r \}$, $\{ j^r \}$—

для каждого $r = \overline{S, N-S}$ *одна из возможных пар упорядоченных целочисленных множеств таких, что*

$$\{ i^r \} = \{ i_1 , ..., i_r \} ; \{ j^r \} = \{ j_1 , ..., j_{N-r} \}; \{ i^0 \} = \varnothing ; \{ j^0 \} = \{1, 2, ..., N\},$$

$$1 \le i_1 < i_2 < ... < i_r \le N; 1 \le j_1 < j_2 < ... < j_{N-r} \le N; \{ i^r \} \cup \{ j^r \} =$$

$$= \{ 1, 2, ..., N \}; \{ i^r \} \cap \{ j^r \} = \varnothing,$$

$$\zeta = \min (r, N-r),$$

$$\{ i^r \}' = \begin{cases} \{ i^r \}, \zeta = r, \\ \{ i_{N-r+1}, i_{N-r+2}, ..., i_r \}, \zeta = N - r, \end{cases}$$

$$\{ j^r \}' = \begin{cases} \{ j_{r+1}, j_{r+2}, ..., j_{N-r} \}, \zeta = r, \\ \{ j^r \}, \zeta = N - r. \end{cases}$$

Подводя итоги исследований, направленных на практическое использование рассматриваемого пути обобщения метода Фурье разделения переменных, можно говорить о расширении круга задач прикладной и теоретической физики, для которых возможно построение аналитических решений. Это подтверждается на примере ряда задач, решенных с применением ОМФ, когда использование КМФ не приводит к желаемому результату [6-8]. Параллельно с развитием теории ОМФ решались вопросы алгоритмизации данного метода с целью создания программного обеспечения для построения аналитических решений задач электродинамики неоднородных и нелинейных сред. Можно утверждать, что с учетом установленных закономерностей и разработанных алгоритмов ОМФ выступает в качестве легко реализуемого в системах компьютерной алгебры метода построения аналитических решений ДУЧП.

1. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики: в 2 т. М, 1958. Т. 1.
2. Там же. 1960. Т. 2.
3. Скоробогатько В.Я. Исследования по качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными. Киев, 1980.,
4. Андрушкевич И.Е. // Электромагнитные волны и электронные системы. 1998. Т. 3. № 4.С. 4.
5. Андрушкевич И.Е. // Весн. Полац. дзярж. ун-та. 2005. № 4. С. 28.
6. Андрушкевич И.Е., Жизневский В.А. // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. 2002. № 2 (24). С. 124.
7. Там же. 2002. № 3 (25). С. 113.
8. Там же. 2003. № 1 (27). С. 116.

Поступила в редакцию 27.02.06.

Иосиф Евгеньевич Андрушкевич - кандидат физико-математических наук, доцент, первый проректор Витебского государственного университета им. П.М. Машерова.

Валерий Анатольевич Жизневский - старший преподаватель кафедры автоматизации научных исследований Витебского государственного университета им. П.М. Машерова.