Доклады Национальной академии наук Беларуси

2011 **март–апрель** **Том 55 № 2**

УДК 512.542

Н. Н. ВОРОБЬЕВ[1], А. Н. СКИБА[1], А. А. ЦАРЕВ[2]

О ТОЖДЕСТВАХ РЕШЕТОК ЧАСТИЧНО КОМПОЗИЦИОННЫХ ФОРМАЦИЙ

(Представлено членом-корреспондентом Л. А. Шеметковым)

[1]Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
[2]Витебский государственный университет им. П. М. Машерова *Поступило 26.07.2010*

В работе рассматриваются только конечные группы. В дальнейшем символ ω означает некоторое непустое множество простых чисел. Символом $C^p(G)$ обозначают пересечение централизаторов всех тех главных факторов группы G, у которых композиционные факторы имеют простой порядок p (если в группе G нет таких факторов, то полагают $C^p(G) = G$). Для произвольной совокупности групп $\mathfrak{X}$ через $\mathrm{Com}(\mathfrak{X})$ обозначают класс всех простых абелевых групп A таких, что $A \simeq H / K$ для некоторого композиционного фактора H / K группы $G \in \mathfrak{X}$. Символом $R_\omega(G)$ обозначим $\mathfrak{S}_\omega$-радикал группы G, т. е. произведение всех таких ее разрешимых нормальных подгрупп, чьи порядки являются ω-группами.

Формацией называется класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. В теории формаций особую роль занимают так называемые ω-насыщенные формации. Формация $\mathfrak{F}$ называется *ω-насыщенной,* если ей принадлежит всякая группа G с $G / L \in \mathfrak{F}$, где $L \subseteq \Phi(G) \cap O_\omega(G)$. Значительно возросший в последние годы интерес к ω-насыщенным формациям привел к возникновению их естественных обобщений (ω-композиционные формации [1], $\mathfrak{X}$-локальные формации [2] и др.).

Пусть f – произвольная функция вида

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{формации групп}\}. \tag{1}$$

Следуя [1] сопоставим функции f класс групп $CF_\omega(f) = (G \mid G / R_\omega(G) \in f(\omega')$ и $G / C^p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(G))$).

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$ для некоторой функции f вида (1), то $\mathfrak{F}$ называется *ω-композиционной формацией с ω-композиционным спутником* f [1].

Всякая формация считается 0-кратно ω-композиционной, а при $n > 0$ формация $\mathfrak{F}$ называется *n-кратно ω-композиционной* [1], если $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, где все непустые значения спутника f являются $(n – 1)$-кратно ω-композиционными формациями.

В книгах [3–6] показано, что конструкции и результаты теории решеток являются полезным инструментом при изучении групп и формаций групп. Относительно включения $\subseteq$ множество всех n-кратно ω-композиционных формаций c_n^ω образует полную решетку [1].

В 1986 г. А. Н. Скибой была установлена модулярность решетки всех (насыщенных) формаций. Впоследствии этот факт нашел много приложений при исследовании структуры насыщенных формаций [3, глава 4; 4, главы 4, 5]. Поэтому этот результат получил развитие в исследованиях многих авторов. В частности, в [3] было доказано, что решетка всех n-кратно насыщенных формаций модулярна. Позднее Баллестер-Боллиншес и Л. А. Шеметков [7] установили модулярность решетки всех ω-насыщенных формаций. В это же время в [4] было доказано, что решетка всех τ-замкнутых n-кратно насыщенных формаций модулярна, но не дистрибутивна, а решетка всех разрешимых тотально насыщенных формаций дистрибутивна. А. Н. Скиба и Л. А. Шеметков [8; 1] установили модулярность решеток n-кратно ω-насыщенных формаций и n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционных формаций. Впоследствии И. П. Шабалина (2003) установила модулярность решетки всех τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций, а М. В. Задорожнюк (2008) – модулярность решетки всех τ-замкнутых ω-композиционных формаций. В. Г. Сафоновым [9] была доказана модулярность решетки всех тотально насыщенных формаций; а П. А. Жизневским (2010) и, независимо, Н. Н. Воробьевым, А. А. Царевым (2010) была установлена модулярность решетки всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций.

Дополняя этот краткий обзор, напомним результат А. Н. Скибы [3; 4] о том, что при любых натуральных m и n у решетки всех τ-замкнутых m-кратно насыщенных формаций и у решетки всех τ-замкнутых n-кратно насыщенных формаций системы тождеств совпадают. Позднее Го Вэньбинь и А. Н. Скиба [10] показали, что для любого бесконечного множества простых чисел ω и при любых различных натуральных m и n системы тождеств решетки всех m-кратно ω-насыщенных формаций и решетки всех n-кратно ω-насыщенных формаций совпадают, а в работе Л. А. Шеметкова, А. Н. Скибы и Н. Н. Воробьева [11] этот результат был распространен на решетки функторно замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций.

Цель работы – получение аналога этого результата в классе n-кратно ω-композиционных формаций. Такая цель достигается нами в следующих двух теоремах.

Т е о р е м а 1. *Пусть $n > 0$. Тогда всякое тождество, справедливое в решетке всех формаций c_0^{ω}, выполняется и в решетке всех n-кратно ω-композиционных формаций c_n^{ω}.*

Т е о р е м а 2. *Пусть $n > 0$. Тогда если ω – бесконечное множество, то системы тождеств решеток c_0^{ω} и c_n^{ω} совпадают.*

Доказательства этих двух теорем являются весьма сложными, и поэтому здесь мы укажем лишь их схему, представленную следующими леммами.

Л е м м а 1 [1, лемма 2]. *Пусть $\mathfrak{F} = \bigcap_{i\in I} \mathfrak{F}_i$, где $\mathfrak{F}_i = CF_{\omega}(f_i)$. Тогда $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(f)$, где $f = \bigcap_{i\in I} f_i$.*

Функция вида

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$$

называется *c_n^{ω}-значной,* если все ее непустые значения принадлежат решетке c_n^{ω}. Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ – набор всех ω-композиционных c_{n-1}^{ω}-значных спутников формации $\mathfrak{F}$. Согласно лемме 1 $f = \bigcap_{i\in I} f_i$ – ω-композиционный c_{n-1}^{ω}-значный спутник формации $\mathfrak{F}$, который называется *минимальным* ω*-композиционным c_{n-1}^{ω}-значным спутником формации* $\mathfrak{F}$ [1].

Символом $c_n^{\omega}\mathrm{form}\,\mathfrak{X}$ обозначается пересечение всех тех n-кратно ω-композиционных формаций, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$.

Л е м м а 2. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустая совокупность групп, $\mathfrak{F} = c_n^{\omega}\mathrm{form}\,\mathfrak{X}$, $\pi = \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{X}))$ и f – минимальный ω-композиционный c_{n-1}^{ω}-значный спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $f(\omega') = c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(G / R_{\omega}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$;

2) $f(p) = c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(G / C^p(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ *для всех* $p \in \pi$;

3) $f(p) = \varnothing$;

4) если $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(h)$ и спутник h c_{n-1}^{ω}-значен, то для всех $p \in \pi$ имеет место

$$f(p) = c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(A \mid A \in h(p) \cap \mathfrak{F} \ \text{ и } \ O_p(A) = 1)$$

и

$$f(\omega') = c_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(A \mid A \in h(\omega') \cap \mathfrak{F} \ \text{ и } \ R_{\omega}(A) = 1);$$

5) $\pi(\mathfrak{X}) = \pi(\mathfrak{F})$.

Напомним, что *полуформацией* называется класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов [3].

Л е м м а 3. *Пусть A – монолитическая группа с неабелевым монолитом R, $\mathfrak{M}$ – некоторая полуформация и $A \in c_n^{\omega}\mathrm{form}\,\mathfrak{M}$. Тогда $A \in \mathfrak{M}$.*

Л е м м а 4. *Пусть $\mathfrak{M}$ – полуформация и $A \in c_n^{\omega}\mathrm{form}\,\mathfrak{M}$. Тогда справедливы следующие условия:*

1) если $O_p(A)=1$ и $p \in \omega$, то $A \in c_n^{\omega}\mathrm{form}\,\mathfrak{M}_1$, *где* $\mathfrak{M}_1 = \{G/O_p(G) \mid G \in \mathfrak{M}\}$;

2) если $R_{\omega}(A)=1$, то $A \in c_n^{\omega}\mathrm{form}\,\mathfrak{M}_2$, где $\mathfrak{M}_2 = \{G/R_{\omega}(G) \mid G \in \mathfrak{M}\}$.

Для произвольной совокупности n-кратно ω-композиционных формаций $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ положим

$$\vee_n^{\omega c}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = c_n^{\omega}\mathrm{form}\,(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i),$$

в частности,

$$\mathfrak{M} \vee_n^{\omega c} \mathfrak{H} = c_n^{\omega}\mathrm{form}\,(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}).$$

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ – некоторая совокупность функций вида

$$f_i : \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{формации групп}\}.$$

Тогда через $\vee_n^{\omega c}(f_i \mid i \in I)$ мы обозначаем такую функцию f, что

$$f(\omega') = c_n^{\omega}\mathrm{form}\,(\bigcup_{i\in I} f_i(\omega')),$$

в частности,

$$(f_1 \vee_n^{\omega c} f_2)(\omega') = c_n^{\omega}\mathrm{form}\,(f_1(\omega') \cup f_2(\omega'))$$

и при $p \in \omega$ имеет место

$$f(p) = c_n^{\omega}\mathrm{form}\,(\bigcup_{i\in I} f_i(p)),$$

в частности,

$$(f_1 \vee_n^{\omega c} f_2)(p) = c_n^{\omega}\mathrm{form}\,(f_1(p) \cup f_2(p)),$$

если по крайней мере одна из формаций $f_i(p) \neq \varnothing$. Если же $f_i(p) = \varnothing$ для всех $i \in I$, то полагаем $f(p) = \varnothing$.

Л е м м а 5. *Пусть f_i – минимальный c_{n-1}^{ω}-значный ω-композиционный спутник ω-композиционной формации $\mathfrak{F}_i$, где $i \in I$. Тогда $\vee_{n-1}^{\omega c}(f_i \mid i \in I)$ – минимальный c_{n-1}^{ω}-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F} = \vee_n^{\omega c}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$.*

Если $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(f)$ и $f(a) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$, то f называется *внутренним спутником формации $\mathfrak{F}$*.

Л е м м а 6. *Для произвольного набора $\{\mathfrak{F}_i = CF_{\omega}(f_i) \mid i \in I\}$ ω-композиционных формаций $\mathfrak{F}_i$, где f_i – некоторый внутренний c_{n-1}^{ω}-значный спутник $\mathfrak{F}_i$ справедливо равенство*

$$\vee_n^{\omega c}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = CF_{\omega}(\vee_{n-1}^{\omega c}(f_i \mid i \in I)).$$

Напомним [4], что совокупность формаций Θ называется *полной решеткой формаций,* если пересечение любой совокупности формаций из Θ снова принадлежит Θ, и в Θ имеется такая формация $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ для любой другой формации $\mathfrak{M}$ из Θ. Формации, принадлежащие Θ, называются Θ-*формациями.* Символом $\Theta\mathrm{form}G$ обозначают пересечение всех Θ-формаций, содержащих группу G. В дальнейшем Θ обозначает некоторую полную решетку формаций, и если

$\mathfrak{M}, \mathfrak{H} \in \Theta$, то $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ – нижняя грань для $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{H}\}$ в Θ. Символом $\mathfrak{M} \vee_{\Theta} \mathfrak{H}$ обозначается [4] верхняя грань для $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{H}\}$ в Θ.

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый непустой класс групп. Полная решетка формаций Θ называется $\mathfrak{X}$-*отделимой* [4], если для любого терма $\xi(x_1, \dots, x_m)$ сигнатуры $\{\cap, \vee_{\Theta}\}$, любых Θ-формаций $\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_m$ и любой группы $A \in \mathfrak{X} \cap \xi(\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_m)$ найдутся такие $\mathfrak{X}$-группы $A_1 \in \mathfrak{F}_1, \dots, A_m \in \mathfrak{F}_m$, что $A \in \xi(\Theta\mathrm{form}\, A_1, \dots, \Theta\mathrm{form}\, A_m)$.

Л е м м а 7. *Решетка* c_n^{ω} $\mathfrak{G}$-*отделима.*

Для всякого терма ξ сигнатуры $\{\cap, \vee_n^{\omega_c}\}$ через $\bar{\xi}$ мы обозначаем терм сигнатуры $\{\cap, \vee_{n-1}^{\omega_c}\}$, получаемый из терма ξ, заменой каждого вхождения символа $\vee_n^{\omega_c}$ на символ $\vee_{n-1}^{\omega_c}$.

Л е м м а 8. *Пусть* $\xi(x_1, \dots, x_m)$ *– терм сигнатуры* $\{\cap, \vee_n^{\omega_c}\}$, f_i *– внутренний* c_{n-1}^{ω}*-значный* ω*-композиционный спутник формации* $\mathfrak{F}_i$, *где* $i = 1, \dots, m$. *Тогда*

$$\xi(\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_m) = CF_{\omega}(\bar{\xi}(f_1, \dots, f_m)).$$

Л е м м а 9. *Пусть* Θ *–* $\mathfrak{X}$*-отделимая полная решетка формаций,* η *– такая ее подрешетка, которая со всякой своей формацией* $\mathfrak{F}$ *содержит и все ее однопорожденные* Θ*-подформации вида* $\Theta\mathrm{form}A$, *где* $A \in \mathfrak{X}$. *Тогда тождество* $\xi_1 = \xi_2$ *сигнатуры* $\{\cap, \vee_{\Theta}\}$ *истинно в* η, *если оно выполняется для всех однопорожденных* Θ*-формаций из* η.

Приведем некоторые следствия из теоремы 1 и теоремы 2.

С л е д с т в и е 1 (А. Н. Скиба, Л. А. Шеметков [12; 1]). *Решетка всех n-кратно* ω*-композиционных формаций является модулярной при всех натуральных n.*

С л е д с т в и е 2. *Решетка всех композиционных формаций является модулярной.*

С л е д с т в и е 3. *Решетка всех n-кратно* ω*-композиционных формаций не является дистрибутивной при всех натуральных n.*

С л е д с т в и е 4. *При любых натуральных m и n решетка всех m-кратно композиционных формаций и решетка всех n-кратно композиционных формаций имеет одну и ту же систему тождеств.*

Отметим, что, как показано в [13], множество всех формаций решеточно упорядоченных групп образует полную брауэрову решетку. В [14] рассмотрена полная алгебраическая решетка всех формаций решеток и описаны атомы и коатомы такой решетки.

Отметим наконец, что в связи с теоремой 1 возникает следующий естественный вопрос: *верно ли, что для любых натуральных чисел m и n, где n < m, решетка всех m-кратно* ω*-композиционных формаций не является подрешеткой решетки всех n-кратно* ω*-композиционных формаций?*

Для *n*-кратно ω-насыщенных формаций это так (см. [15]).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф10Р-231).

Литература

1. С к и б а А. Н., Ш е м е т к о в Л. А. // Укр. мат. журн. 2000. Т. 52, № 6. С. 783–797.
2. Б а л л е с т е р - Б о л и н ш е А., К а л ь в о К., Ш е м е т к о в Л. А. // Мат. сб. 2007. Т. 198, № 6. С. 3–24.
3. Ш е м е т к о в Л. А., С к и б а А. Н. Формации алгебраических систем. М., 1989.
4. С к и б а А. Н. Алгебра формаций. Минск, 1997.
5. G u o W e n b i n. The Theory of Classes of Groups. Beijing; New York; Dordrecht; Boston; London, 2000.
6. B a l l e s t e r - B o l i n c h e s A., E z q u e r r o L. M. Classes of Finite Groups. Dordrecht, 2006.
7. B a l l e s t e r - B o l i n c h e s A., S h e m e t k o v L. A. // Math. Nachr. 1997. Vol. 186. P. 57–65.
8. С к и б а А. Н., Ш е м е т к о в Л. А. // Мат. тр. 1999. Т. 2, № 2. С. 114–147.
9. S a f o n o v V. G. // Comm. Algebra. 2007. Vol. 35, № 11. P. 3495–3502.
10. Г о В э н ь Б и н ь, С к и б а А. Н. // Изв. вузов. Математика. 2002. № 5(480). С. 14–22.
11. S h e m e t k o v L. A., S k i b a A. N., V o r o b´ e v N. N. // Asian-European J. of Mathematics. 2009. Vol. 2, № 1. P. 155–169.

12. С к и б а А. Н., Ш е м е т к о в Л. А. // Докл. НАН Беларуси. 1999. Т. 43, № 4. С. 5–8.
13. J a k u b í k J á n // Mathematica Slovaca. 2008. Vol. 58, № 5. P. 521–534.
14. L i h o v a J., P ó c s J. // Acta Universitatis Matthiae Belii, ser. Mathematics. 2009. Vol. 15. P. 63–72.
15. S h e m e t k o v L. A., S k i b a A. N., V o r o b' e v N. N. // Algebra Colloquium. 2010. Vol. 17, № 4. P. 557–564.

VOROB'EV N. N., SKIBA A. N., TSAREV A. A.

vornic2001@yahoo.com; alexander_skiba49@gmail.com; alex_vitebsk@mail.ru

LAWS OF PARTIALLY COMPOSITION FORMATIONS LATTICES

Summary

In this article it is proved that for any infinite set of primes ω and for any non-negative integers m and n, the law systems of the lattice of *m*-multiply ω-composition formations and the lattice of *n*-multiply ω-composition formations coincide.