УДК 681.1.002.5

А.С. Ключников, Л.И. Трутченко, И.Л. Ясинская

Построение математической модели контура геометрического объекта на основе теории сплайнов кусочно-постоянной кривизны

В качестве геометрического объекта в данной работе рассматриваются плоские детали конструкции одежды или обуви. Математическое описание их криволинейных участков необходимо в системах автоматического проектирования при выполнении различных видов проектных работ, в частности, при записи, воспроизведении деталей одежды, преобразовании контуров.

Анализ математических методов описания контуров деталей одежды и обуви показал, что для аппроксимации кривых кривизна которых меняется непрерывно, достаточно эффективно использование сплайнов различных видов [1, 2]. При решении задач автоматизированного проектирования новых контуров деталей нами предлагается использовать нелинейные сплайны кусочно-постоянной кривизны- гладкие плоские кривые, состоящие из отрезков прямых и дуг окружностей.

Однако, традиционное построение сплайнов кусочно-постоянной кривизны не исключает разрывы в точках склейки дуг в узлах аппроксимации. Анализ контуров деталей одежды показал, что в большинстве случаев, особенно при оформлении базовых конструкций, возможно использовать метод гладкой окружностной аппроксимации с помощью так называемых БИАРОК.

Биарка представляет собой интерполирующую конструкцию, состоящую из пары сопрягающихся окружностей. Изменяя в определенных пределах угол наклона касательной в точке сопряжения дуг можно построить различные биарки, удовлетворяющие заданным условиям на концах.

Одной из задач, возникающих при построении данного вида сплайнов , является следующая:

построить пару сопрягающихся дуг окружностей С1 и С2 так, чтобы С1 проходила через точку Р1, касаясь вектора $\vec{m}_2$. На рисунке 1 приведен пример биарки, причем точка θ - сопряжение пар дуг С1 и С2 лежит на некоторой окружности.

В качестве параметра может быть предложен угол между $\vec{m}$ - общей касательной к дугам C_1 и C_2 в точке θ и вектора P_1P_2. Радиус R_k как функция угла θ выражается следующим образом:

$$R_k = -\frac{P\sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}+\frac{\theta-\theta_k}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\theta_k}{2}\right)};\ k=1,2 \qquad (1)$$

где $P = |P_1P_2|$, $|\theta_1|,|\theta_2|,|\theta| \le \pi$

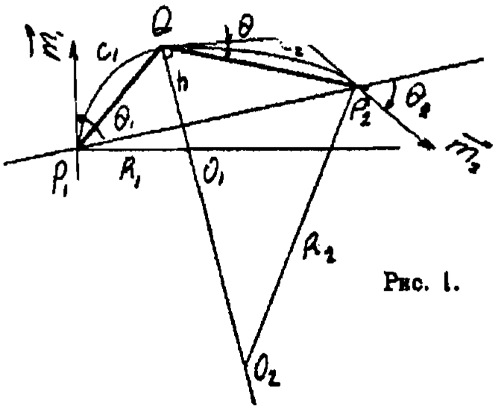

Рис. 1.

Здесь R_k <0, если центр лежит справа от касательной $\vec{m}_k$, R_k >0, если O_k лежит слева от $\vec{m}_k$.

При интерполировании биарками наибольший интерес представляют значения θ, при которых достигается локальный минимум одной из функций

$$|R_1 - R_2|, \left|\frac{R_1}{R_2} - 1\right|, \left|\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right|$$

Из формулы (1) видно, что указанные функции имеют следующие локальные минимумы

1) $|R_1 - R_2|$ при $\theta = \frac{\theta_1+\theta_2}{2}, \theta = \frac{\theta_1+\theta_2}{2} - \pi sign\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$

2) $\left|\frac{R_1}{R_2} - 1\right|$ при $\theta = 0, \pm\pi$

3) $\left|\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right|$ при $\theta = -\frac{\theta_1+\theta_2}{2}, \theta = -\frac{\theta_1+\theta_2}{2} + \pi sign\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$

Биарки, соответствующие $\theta = \pm\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$ используется при определении дополнительных узлов, в которых кривизна разрывна.

Формула (1) исключает $\theta_1 = \theta_2$.

В основе предложенного алгоритма проектирования нового контура детали лежат графоаналитические предпосылки построения биарок. Анализ этих предпосылок с позиций определения параметров сопряженных окружностей показал, что при этом наиболее удобным с практической стороны является использование исходных данных в виде координат начальной Р1, конечной Р2 и промежуточной θ точек. [3]

В то же время для получения различной формы проектируемого контура желательно варьирование таких параметров формы как величины углов наклона касательных в начальной и конечной точках, соответственно θ1, θ2 и величины прогиба кривой h.

Рассмотрим графоаналитические предпосылки алгоритма определения параметров формы кривой на основе описания ее двумя сопряженными окружностями при наличии представленных выше исходных данных.

На рисунке 2 показано, что центр первой окружности лежит на пересечении параболы и прямой, перпендикулярной вектору наклона касательной в начальной точке. Центр второй дуги окружности находится на пересечении эллипса и прямой, перпендикулярной вектору наклона касательной в конечной точке.

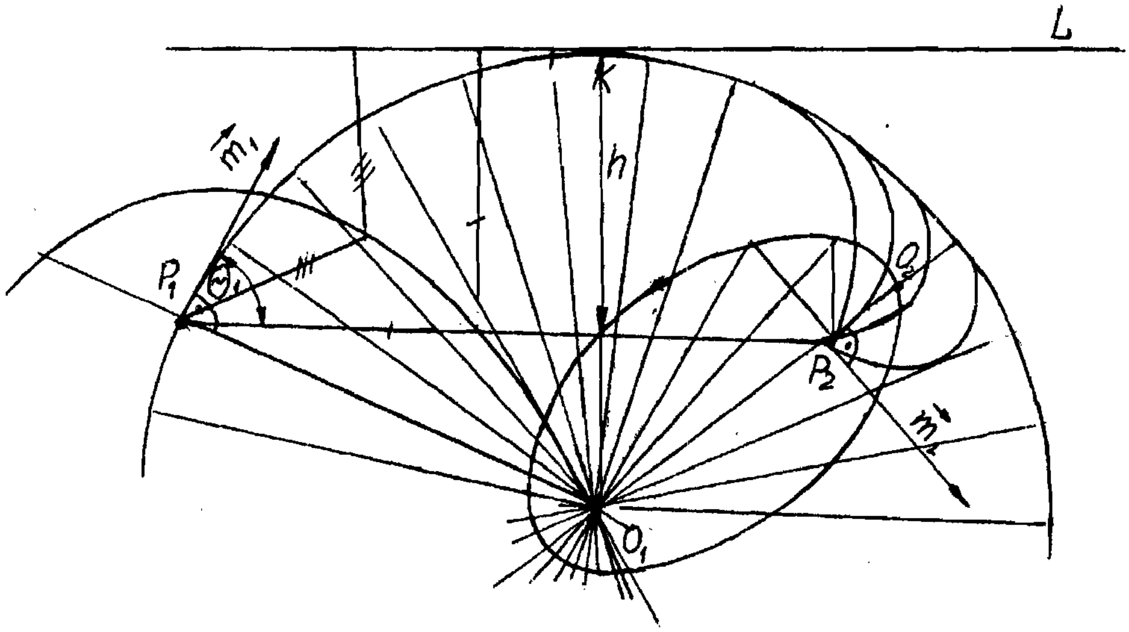

Рис. 2

Геометрическим местом точек , равноудаленных от прямой L и начальной точки P1 есть парабола. Эллипс есть множество точек, сумма расстояний от которых до данных точек P2 и O1 есть величина постоянная, равная AB.

Поскольку P1O1=O1K, то уравнение параболы имеет вид:

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=h-y \qquad (2)$$

Уравнение прямой P1C1 имеет вид

$$y=k(x-x_1)+y_1, \qquad (3)$$

где k - угловой коэффициент.

Поскольку прямая P1O1 перпендикулярна вектору наклона касательной $\vec{m}_1$ в начальной точке, то

$$k=-\frac{1}{k_1}. \qquad (4)$$

k_1 находится из соотношения $$tg\theta_1=\frac{k_2-k_1k_2}{1+k_1k_2} \qquad (5)$$

где k_2 - угловой коэффициент прямой P_1P_2 и находится из соотношения

$$k_2=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}. \qquad (6)$$

Получим $$k_1 = \frac{k_2 tg\theta_1}{k_2 tg\theta_2 + 1} \tag{7}$$

Решая систему, состоящую из уравнений

$$\begin{cases} y = k(x - x_1) + y_1 \\ \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = h - y \end{cases}$$

получим две пары решений:

$$x01_{1,2} = (-(-2x_1 - 2hx_1 + 2hy_1 - 2y_1kx_1 - 2y_1y_2) \pm$$

$$\pm\sqrt{(-2x_1 - 2hkx_1 + 2hy_1 - 2y_1kx_1 - 2y_1^2) - 4(x_1^2 + y_1^2) - h + 2hx_1k + 2hy_1 - 2y_1kx_1 - 2y^2_1}\ )\ /2$$

$$y01_{1,2} = k(x - x01_{1,2}) + y_1$$

Выбор единственного решения $x01, y01$ или $x02, y02$ осуществляется при условии меньшего значения y0i, i=1,2.

Радиус первой дуги окружности вычисляется по следующей формуле

$$R = \sqrt{(x01 - x_1)^2 + (y01 - y_1)^2}$$

Уравнение эллипса имеет вид:

$$\sqrt{(x_2 - x01)^2 + (y_2 - y01)^2} + 2r = \sqrt{(x_2 - x02)^2 + (y_2 - y02)^2}$$
$$+ \sqrt{(x02 - x01)^2 + (y02 - y01)^2}$$

x02, y02 - искомые координаты,

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\,/2$$

Уравнение прямой, перпендикулярной вектору наклона касательной в конечной точке

$$y = k(x - x02) + y02$$

Решая систему уравнений, состоящую из

$$\begin{cases} \sqrt{(x_2 - x01)^2 + (y - y01)^2} + 2r = \sqrt{(x_2 - x02)^2 + (y_2 - y02)^2} \\ + \sqrt{(x02 - x01)^2 + (y02 - y01)^2} \\ y = k(x - x02) + y02 \end{cases}$$

получим две пары решений

$$\begin{cases} x02 = (-B1 \pm D1)\ /\ 2 \cdot A1 \\ y02 = k1 \cdot x02_{1,2} \end{cases} \tag{8}$$

где

$$k1 = \frac{\sin(180^\circ - \theta_2)}{\cos(180^\circ - \theta_2)}$$

$$A1 = 4(x_2 - x01)^2 + 8(x_2 - x01)(y_2 - y01)k1 + 4(y_2 - y01)^2 k1^2 - 4A^2 - 4k1^2 A^2$$

$$A = \sqrt{(x_2 - x01)^2 + (y_2 - y01)^2} + 2r$$

$$B1 = 4C((x_2 - x01) + (y_2 - y01)k1)$$

$$C = A^2 - (x_2 - x01)^2 - (y_2 - y01)^2$$

$$D1 = \sqrt{B_1^{\,2} - 4A1C1}$$

Выбор единственного решения $x02_1, y02_1$ или $x02_2, y02_2$ осуществляется при условии большего значения y02, i=1,2.

По данному расчетному методу составлена программа для расчета и воспроизведения кривых при заданных углах наклона касательных.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Карасин В.З.** и др. Контурная обработка деталей низа обуви. -М.: Легкая и пищевая промышленность. 1982г., -234 с.
2. **Завьялов Ю.С.** Сплайн-функции - универсальный математический аппарат для представления и обработки геометрической информации в машиностроении. "Вычислительные системы". Вып 68, 1976 г.
3. **Трутченко Л.И., Скоков П.И., Жевнерова О.Г.** Проектирование криволинейных участков контуров деталей одежды при задании условий. Сб. "Состояние и перспективы использования ЭВМ на предприятиях легкой пр-сти" 1990.

S U M M A R Y

The mathematical method of the description curvilinear of sites of details of sewing products, footwear and other objects is considered on the basis of the theory spline of partially constant curvature. The method provides both description of gauge curves, and construction of new contours. The method can be used and is realized in CAD system.

УДК 539.3 : 534.1

И.В. Авдошка, Г.И. Михасев

Волновые пакеты в тонкой цилиндрической оболочке с учетом воздействия внешних сил

Рассматривается начально-краевая задача для уравнений пологих оболочек, описывающих движение тонкой упругой цилиндрической оболочки с учетом воздействия внешних сил. Оболочка (в общем случае) является некруговой, а ее края - необязательно плоские кривые. Предполагается, что внешние плавно меняющиеся силы вызывают безмоментное нестационарное напряженное состояние оболочки, характеризующееся начальными усилиями T_1^0, T_2^0, S^0, действующими в срединной поверхности оболочки.