кально.

Очевидно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{S}_{p'}$. Пусть G – группа минимального порядка из класса $\mathfrak{F}\mathfrak{S}_{p'} / \mathfrak{F}$. Тогда G имеет единственную максимальную нормальную подгруппу $K = G_{\mathfrak{F}}$. Так как $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{S}_{p'}$, то $G / K \in \mathfrak{S}_{p'}$. Но G / K является циклической группой простого порядка. Следовательно, $G / K \in \mathfrak{N}_q$ для некоторого простого $q \neq p$.

Теперь, если V $\mathfrak{F}$-инъектор группы G, то либо $V / G_{\mathfrak{F}} = G / G_{\mathfrak{F}}$, либо $V = G_{\mathfrak{F}}$.

В первом случае $V = G$ и $G \in \mathfrak{F}$, что противоречит выбору группы G. Во втором – $\mathfrak{F}$-инъектор V группы G является нормальной подгруппой G. Следовательно, в этом случае $G \in \mathfrak{Y}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p$. Но тогда $G / G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}_p$. Последнее противоречит тому, что $G / G_{\mathfrak{F}}$ является q-группой для $q \neq p$.

Полученное противоречие доказывает равенство $\mathfrak{F}\mathfrak{Y}_{p'} = \mathfrak{F}$. Теперь ввиду леммы 1.2. заключаем, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ полулокален.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Hauck P.*** Endliche auflösbare Gruppen mit normalen F-Injektor. Archiv der Mathematik. Vol. XXVIII, 1977, 117–129.
2. ***Воробьев Н.Т.*** О предположении Хаукса для радикальных классов // Сиб. матем. журнал, 1996, № 5. – Т. 37. – С. 1296–1302.
3. ***Doerk K., Hawkes T.O.*** Finite soluble groups // De Gruyter Exp. In Math. – Vol. 4. – Berlin – New York, 1992. – 891 p.

S U M M A R Y

Let $\mathfrak{F}$ be a Fitting class and $\mathfrak{Y}(\mathfrak{F})$ is a class of groups G such that $\mathfrak{F}$-injectors of G are normal subgroups of G. Then $\mathfrak{Y}(\mathfrak{F})$ is semilocal if and only if $\mathfrak{F}$ is semilocal.

Поступила в редакцию 29.11.2005

УДК 512.542

В.Н. Загурский

Функции Хартли с заданными свойствами подгрупп Холла

В теории классов конечных групп хорошо известны своими приложениями локальные спутники, определяемые посредством заданных свойств канонических подгрупп. Напомним, что локальным экраном или локальным спутником [1] называют всякое отображение $f : P \to \{$ формации $\}$, где P – множество всех простых чисел. В работе [2] описан наибольший локальный спутник h разрешимой формации $\mathfrak{F}$. Его значения для любого простого p определяются равенством $h(p) = \mathfrak{F} \uparrow \psi(p)$, где ψ – наибольший приведенный локальный спутник формации $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} \uparrow \psi(p)$ класс всех групп, $\mathfrak{F}$-нормализаторы которых принадлежат $\psi(p)$. Кроме того, известно [3], что разрешимая формация $\mathfrak{F}$ с полным приведенным локальным спутником f также определяется локальным спутником φ, значениями которого для каждого простого p является

$\mathfrak{F} \downarrow f(p)$ – класс всех тех групп, в которых $\mathfrak{F}$-проектор принадлежит $f(p)$. Заметим, что с помощью такого локального спутника φ получено описание всех главных факторов разрешимой группы, покрываемых $\mathfrak{F}$-проекторами (см., V.4.9[4]). Известно, что формации могут также определяться локально посредством свойств подгрупп Холла. В частности, Блессенолем [5] была построена формация $B_\pi(\mathfrak{F})$ всех тех групп, холловская π-подгруппа которых принадлежит формации $\mathfrak{F}$ и доказано, что класс $B_\pi(\mathfrak{F})$ является локальным для любой локальной формации $\mathfrak{F}$ и определяется локальным спутником в терминах класса $B_\pi(\mathfrak{F})$.

Вместе с тем задача построения локальных заданий классов Фиттинга посредством канонических подгрупп до настоящего времени не рассматривалась. Хотя хорошо известна своими приложениями для изучения строения иньекторов и внутренней структуры классов Фиттинга конструкция класса $L_\pi(\mathfrak{F})$ [6] всех тех групп, $\mathfrak{F}$-иньекторы которых содержат некоторую холловскую π-подгруппу этих групп, где $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга (см., например, IX.1, IX.3-4, X.1 [4]). В настоящей работе посредством класса Фиттинга $L_\pi(\mathfrak{F})$ мы описываем серию новых локальных заданий произведения $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$ разрешимого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ и класса $\mathfrak{N}_\pi$ всех нильпотентных π-групп.

Предварительные сведения. В работе рассматриваются только конечные разрешимые группы.

Напомним, что если π – некоторое множество простых чисел, то через G_π обозначают холловскую π-подгруппу группы G – подгруппу, порядок которой есть π-число, а индекс π'-число.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется классом Фиттинга, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Из определения следует, что для любого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в любой группе G существует единственная $\mathfrak{F}$-максимальная нормальная подгруппа $G_\mathfrak{F}$ группы G. Ее называют $\mathfrak{F}$-радикалом G. Через $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ обозначают произведение классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – класс всех тех групп G, для которых $G/G_\mathfrak{F} \in \mathfrak{H}$. Хорошо известно, что произведение классов Фиттинга является классом Фиттинга и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна.

Заметим также, что для любого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ класс $\mathfrak{F}^*$ определяется как наименьший из классов Фиттинга, содержащий $\mathfrak{F}$ такой, что для любых групп G и H справедливо равенство: $(G\times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется классом Локетта, если $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$.

Локальный метод изучения конечных разрешимых групп с помощью радикалов и классов Фиттинга впервые был предложен Хартли [7]. Всякое отображение $f: \mathrm{P} \to \{$ классы Фиттинга $\}$ называется локальной функцией Хартли или локальной H-функцией [8]. Через $Supp(f) = \{p \in \mathrm{P} \mid f(p) \neq \varnothing\}$ обозначают носитель f.

Пусть $LR(f) = \mathfrak{S}_\pi \cap (\cap_{p\in\pi} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'})$, где π – носитель H-функции f. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют локальным [8], если $\mathfrak{F} = LR(f)$ для некоторой H-функции f.

Локальную H-функцию f класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют [9]:

1) полной, если $f(p)\mathfrak{N}_p = f(p)$ для каждого простого p;

2) приведенной, если $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех простых p;

3) полной приведенной, если f одновременно полная и приведенная локальная H-функция.

Следуя Л.А. Шеметкову [1], любое непустое множество Ω – локальных H-функций класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, будем считать частично упорядоченным с отношением $\le$, которое задается следующим образом. Если $f, h \in \Omega$, то $f \le h$ в том и только в том случае, когда $f(p) \subseteq h(p)$ для всех простых p.

Другие определения и обозначения при необходимости можно найти в [1,4].

Свойства H-функций. В настоящем разделе мы опишем некоторые свойства H -функций, которые будем использовать.

Лемма 1[9]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга и $\mathfrak{F} = LR(f)$ для некоторой локальной H-функции f. Тогда $\mathfrak{F} = LR(g)$, где g – полная приведенная локальная H-функция такая, что $g(p) = (f(p) \cap \mathfrak{F})\mathfrak{N}_p$ для всех простых p.*

Лемма 2[10]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга и $\mathfrak{F} = LR(f)$ для некоторой локальной H-функции f. Тогда $\mathfrak{F} = LR(f^*)$ для локальной H-функции f^* такой, что $f^*(p) = (f(p))^*$ для всех простых p. Если f – полная приведенная локальная H-функция, то f^* также является полной приведенной H-функцией.*

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга и $\mathfrak{F} = LR(f) = LR(h)$. Если f, h – полные приведенные локальные H-функции, то $(f(p))^* = (h(p))^*$ для каждого простого p.*

Доказательство. Пусть $f^*(p) = (f(p))^*$ и $h^*(p) = (h(p))^*$ для всех простых p. Докажем включение $f^*(p) \subseteq h^*(p)$. Выберем группу G такую, что $G \in f^*(p) \setminus h^*(p)$ для некоторого простого p. Далее положим $X = G \wr Z_p = [K]Z_p$, где K – база регулярного сплетения X. Так как $f^*(p)$ – класс Фиттинга, то $K \in f^*(p)$. Из свойств полупрямого произведения следует, что $X / K \cong Z_p \in \mathfrak{N}_p$. По лемме 2 f^*, h^* – полные приведенные H-функции класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Тогда $X \in f^*(p)\mathfrak{N}_p = f^*(p) \subseteq \mathfrak{F} = LR(h^*)$. Значит, $X \in h^*(p)\mathfrak{S}_{p'}$.

Поскольку $h^*(p)$ – класс Локетта и $G \notin h^*(p)$, то ввиду X. 2.1a [4] $X_{h^*(p)} = K_1$, где K_1 – база регулярного сплетения $X_1 = G_{h^*(p)} \wr Z_p$. Ввиду свойств сплетений (см., например, A. 18.2d [4])

$$X / X_{h^*(p)} = X / K_1 \cong (G / G_{h^*(p)}) \wr Z_p \notin \mathfrak{S}_{p'}.$$

Следовательно, по определению произведения классов Фиттинга $X \notin h^*(p)\mathfrak{S}_{p'}$. Получили противоречие с тем, что $X \in h^*(p)\mathfrak{S}_{p'}$. Поэтому $f^*(p) \subseteq h^*(p)$ для всех простых p. Аналогично можно показать, что $h^*(p) \subseteq f^*(p)$ для любого простого p. Таким образом, $f^*(p) = h^*(p)$ для всех простых p. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга и $\mathfrak{F} = LR(F)$, где F – наибольшая приведенная локальная H-функция, $\pi = Supp(F)$ и h – такая локальная H-функция, что $Supp(h) = \pi$. Тогда следующие условия равносильны:*

1) $\mathfrak{F} = LR(h)$;

2) $((h(p) \cap \mathfrak{F})\mathfrak{N}_p)^* = F(p)$ для всех простых p.

Доказательство. Докажем вначале, что из 1) следует 2). Пусть $\mathfrak{F} = LR(h)$. Тогда по лемме 1 класс $\mathfrak{F}$ определяется полной приведенной локальной H-функцией g такой, что $g(p) = (h(p) \cap \mathfrak{F})\mathfrak{N}_p$ для любого простого p. Поскольку наибольшая приведенная H-функция F класса $\mathfrak{F}$ является полной, то по лемме 3 получаем $(g(p))^* = (F(p))^*$. Так как значениями H-функции F являются классы Локетта, то $(g(p))^* = F(p)$ для любого простого p и, значит, выполняется условие 2).

Покажем теперь, что из 2) следует 1). Пусть $\mathfrak{H} = LR(h)$.

Докажем включение $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Выберем группу G минимального порядка такую, что $G \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда группа G комонолитична, и ее комонолит $G_{\mathfrak{H}}$. Поэтому $G / G_{\mathfrak{H}} \cong Z_q \in \mathfrak{N}_q$ и $q \in \pi$. Так как $G_{\mathfrak{H}} \in h(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$ для всех $p \in \pi$, то $G \in \mathfrak{S}_\pi \cap (\cap_{\substack{r \neq q \\ r \in \pi}} h(r)\mathfrak{N}_r\mathfrak{S}_{r'})$. Учитывая $G \notin \mathfrak{H}$, получаем $G \notin h(q)\mathfrak{N}_q\mathfrak{S}_{q'}$.

Далее из $G \in \mathfrak{F} = LR(F)$ вытекает, что $G \in F(q)\mathfrak{S}_{q'}$ и, значит, $G / G_{F(q)} \in \mathfrak{S}_{q'}$. Предположим, что $G \notin F(q)$. Поскольку $G_{\mathfrak{H}}$ – комонолит группы G, то $G_{F(q)} \lhd G_{\mathfrak{H}}$. Теперь из $G / G_{F(q)} \in \mathfrak{S}_{q'}$ и $G / G_{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{N}_q$ ввиду изоморфизма $(G / G_{F(q)}) / (G_{\mathfrak{H}} / G_{F(q)}) \cong G / G_{\mathfrak{H}}$ получаем $G / G_{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{S}_{q'} \cap \mathfrak{N}_q = (1)$. Тогда $G \in \mathfrak{H}$, что противоречит выбору G. Следовательно, $G \in F(q)$. Легко видеть, что класс Фиттинга $h(q)\mathfrak{N}_q\mathfrak{S}_{q'}$ – локален и, значит, по лемме 5 [9] является классом Локетта. Тогда учитывая условие 2)

$$G \in F(q) = ((h(q) \cap \mathfrak{F})\mathfrak{N}_q)^* \subseteq (h(q)\mathfrak{N}_q)^* \subseteq (h(q)\mathfrak{N}_q\mathfrak{S}_{q'})^* = h(q)\mathfrak{N}_q\mathfrak{S}_{q'}.$$

Получили противоречие с тем, что $G \notin h(q)\mathfrak{N}_q\mathfrak{S}_{q'}$. Таким образом, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Докажем обратное включение: $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Выберем группу G минимального порядка такую, что $G \in \mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда группа G комонолитична и ее комонолит $G_{\mathfrak{F}}$. Поэтому $G / G_{\mathfrak{F}} \cong Z_q \in \mathfrak{N}_q$, причем $q \in \pi$. Поскольку $G \in \mathfrak{H}$, то $G \in h(q)\mathfrak{N}_q\mathfrak{S}_{q'}$ и, значит, $G / G_{h(q)\mathfrak{N}_q} \in \mathfrak{S}_{q'}$. Предположим, что $G \notin h(q)\mathfrak{N}_q$. Так как $G_{\mathfrak{F}}$ – комонолит группы G, то $G_{h(q)\mathfrak{N}_q} \lhd G_{\mathfrak{F}}$. Теперь из $G / G_{h(q)\mathfrak{N}_q} \in \mathfrak{S}_{q'}$ и

$G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}_q$ ввиду изоморфизма $(G/G_{h(q)\mathfrak{N}_q})/(G_{\mathfrak{F}}/G_{h(q)\mathfrak{N}_q}) \cong G/G_{\mathfrak{F}}$ получаем $G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{S}_{q'} \cap \mathfrak{N}_q = (1)$. Тогда $G \in \mathfrak{F}$, что противоречит выбору G. Следовательно, $G \in h(q)\mathfrak{N}_q$ и $G/G_{h(q)} \in \mathfrak{N}_q$.

Предположим, что $G \notin h(q)$. Поскольку $G_{\mathfrak{F}}$ – комонолит группы G, то $G_{h(q)} \triangleleft G_{\mathfrak{F}}$ и $G_{h(q)} \in h(q) \cap \mathfrak{F}$. Но $G/G_{h(q)} \in \mathfrak{N}_q$ и поэтому

$$G \in (h(q) \cap \mathfrak{F})\mathfrak{N}_q \subseteq ((h(q) \cap \mathfrak{F})\mathfrak{N}_q)^* = F(q) \subseteq \mathfrak{F}.$$

Получили противоречие выбору G. Следовательно, $G \in h(q)$. Это означает, что $G_{\mathfrak{F}} \in h(q) \cap \mathfrak{F} \subseteq (h(q) \cap \mathfrak{F})\mathfrak{N}_q \subseteq ((h(q) \cap \mathfrak{F})\mathfrak{N}_q)^* = F(q)$. Так как $G \notin F(q)$ и $G_{\mathfrak{F}} \in F(q)$, то $G_{F(q)} = G_{\mathfrak{F}}$. Тогда $G/G_{F(q)} = G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}_q$ и $G \in F(q)\mathfrak{N}_q \subseteq F(q)\mathfrak{N}_q\mathfrak{S}_{q'}$.

Далее учитывая $G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}_q$ и $G_{\mathfrak{F}} \in F(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$ для всех $p \in \pi$, получаем $G \in \mathfrak{S}_\pi \cap (\cap_{\substack{r \neq q \\ r \in \pi}} F(r)\mathfrak{N}_r\mathfrak{S}_{r'})$. Кроме того, $G \in F(q)\mathfrak{N}_q\mathfrak{S}_{q'}$ и поэтому $G \in \mathfrak{S}_\pi \cap (\cap_{p \in \pi} F(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'})$. Получили противоречие с тем, что $G \notin \mathfrak{F}$. Итак, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ и равенство $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$ доказано. Это завершает доказательство того, что из 2) следует 1). Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, π – непустое множество простых чисел и $\sigma = \pi \cup \pi(\mathfrak{F})$. Тогда следующие условия равносильны:*

1) $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F}) \setminus \pi} = \mathfrak{F}$;

2) $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi = LR(h)$ для полной приведенной H-функции h такой, что $h(p) = \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p$ для всех p из σ.

Доказательство. Докажем вначале, что из 1) следует 2). Пусть $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})\setminus\pi} = \mathfrak{F}$. Тогда, учитывая определение функции h, получаем

$$LR(h) = \mathfrak{S}_\sigma \cap (\cap_{p \in \sigma} \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}) = \mathfrak{S}_\sigma \cap \mathfrak{F}(\cap_{p \in \pi} \mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}) \cap \mathfrak{F}(\cap_{p \in \pi(\mathfrak{F})\setminus\pi} \mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}) =$$
$$= \mathfrak{S}_\sigma \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'} \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})\setminus\pi}\mathfrak{S}_{(\pi(\mathfrak{F})\setminus\pi)'} = \mathfrak{S}_\sigma \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'} \cap \mathfrak{F}\mathfrak{S}_{(\pi(\mathfrak{F})\setminus\pi)'}.$$

Так как $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{S}_\sigma$, то $\mathfrak{F}\mathfrak{S}_\sigma = \mathfrak{S}_\sigma$ и

$$\mathfrak{S}_\sigma \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'} \cap \mathfrak{F}\mathfrak{S}_{(\pi(\mathfrak{F})\setminus\pi)'} = \mathfrak{F}(\mathfrak{S}_\sigma \cap \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'} \cap \mathfrak{S}_{(\pi(\mathfrak{F})\setminus\pi)'}) = \mathfrak{F}(\mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}) =$$
$$= \mathfrak{F}(\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}) = \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi(\mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{S}_{\pi'}) = \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi.$$

Следовательно, $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi = LR(h)$. Легко видеть, что h – полная H-функция. Поскольку $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$ для всех $p \in \pi$ и $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})\setminus\pi} = \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$ для всех $p \in \pi(\mathfrak{F})\setminus\pi$, то h – приведенная локальная H-функция.

Покажем теперь, что из 2) следует 1). Очевидно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})\setminus\pi}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})\setminus\pi}$. Поскольку $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})\setminus\pi} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N} = \cap_p \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$ и $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})\setminus\pi} \subseteq \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{S}_\sigma$, то $G \in \mathfrak{S}_\sigma \cap (\cap_{p \in \sigma} \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'})$. Тогда, учитывая $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi = LR(h)$, имеем $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})\setminus\pi} \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi = \mathfrak{F}(\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})\setminus\pi} \cap \mathfrak{N}_\pi) = \mathfrak{F}$. Значит, $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})\setminus\pi} = \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, π – непустое множество простых чисел и $\sigma = \pi \cup \pi(\mathfrak{F})$. Если $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})\setminus\pi} = \mathfrak{F}$ и f – локальная H-функция такая, что $Supp(f) = \sigma$ и $f(p) \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi = \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p$ для всех $p \in \sigma$, то $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi = LR(f)$.*

Доказательство. Так как $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})\setminus\pi} = \mathfrak{F}$, то по лемме 5 класс Фиттинга $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$ определяется полной приведенной H-функцией h такой, что $h(p) = \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p$ для всех $p \in \sigma$. Тогда по лемме 2 получаем $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi = LR(g)$, где g – полная приведенная H-функция, причем $g(p) = (h(p))^*$ для всех $p \in \sigma$. Теперь из условия $f(p) \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi = \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p$ следует, что $((f(p) \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi)\mathfrak{N}_p)^* = (\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p)^* = g(p)$ для любого простого p из σ. Таким образом по лемме 4 класс $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$ определяется локальной H-функцией f. Лемма доказана.

Напомним, что если $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга и π – некоторое множество простых чисел, то через $L_\pi(\mathfrak{F})$ обозначают класс всех тех групп, в которых индекс любого $\mathfrak{F}$-иньектора является π'-числом. Пусть V – $\mathfrak{F}$-иньектор группы G. Тогда $|G:V|$ является π'-числом в том и только в том случае, если существует холловская π-подгруппа G_π группы G такая, что $G_\pi \subseteq V$. Поэтому $L_\pi(\mathfrak{F}) = (G \in \mathfrak{S}$: каждый $\mathfrak{F}$-иньектор группы G содержит некоторую холловскую π-подгруппу группы G).

Если $\mathfrak{F} = \varnothing$, то положим $L_\pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$. В случае когда $\pi = \varnothing$ или $\pi = \mathrm{P}$, положим $L_\varnothing(\mathfrak{F}) = \mathfrak{S}$ и $L_\mathrm{P}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}$, соответственно.

Мы будем неоднократно использовать известные свойства класса $L_\pi(\mathfrak{F})$, которые представляет следующая

Лемма 7[2]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга и π – некоторое множество простых чисел. Тогда:*

1) $L_\pi(\mathfrak{F})$ – класс Фиттинга;

2) $\mathfrak{F} \cup \mathfrak{S}_{\pi'} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{S}_{\pi'} \subseteq L_\pi(\mathfrak{F}) = L_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_{\pi'}$.

Функции Хартли класса $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$. Нам потребуются следующие свойства иньекторов, которые приведем в качестве лемм.

Лемма 8[11]. *Пусть $\mathfrak{H}$ – разрешимый класс Фиттинга и G – конечная разрешимая группа. Если V^* есть $\mathfrak{H}^*$-иньектор группы G, то $(V^*)_\mathfrak{H}$ есть $\mathfrak{H}$-иньектор группы G.*

Лемма 9[12]. *Пусть $\mathfrak{H}$ – разрешимый класс Фиттинга и G – разрешимая группа. Пусть T есть $\mathfrak{H}$-иньектор группы $G_{L_\pi(\mathfrak{H})}$ и G_π есть холловская π-подгруппа из G такая, что $G_\pi \subseteq N_G(T)$. Тогда $G_\pi T$ является $\mathfrak{H}\mathfrak{S}_\pi$-иньектором группы G.*

Локальные функции Хартли, определяющие класс $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$, описывает

Теорема 10. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, π – непустое множество простых чисел, $\sigma = \pi \cup \pi(\mathfrak{F})$ и $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})\setminus\pi} = \mathfrak{F}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi = LR(f_1)$, где $f_1(p) = L_{p'}(\mathfrak{F})$ для любого $p \in \sigma$;

2) $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi = LR(f_2)$, *где* $f_2(p) = L_{p'}(\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p)$ *для любого* $p \in \sigma$;

3) $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi = LR(f_3)$, *где* $f_3(p) = L_{p'}(\mathfrak{F}^*)$ *для любого* $p \in \sigma$;

4) $f_2 \le f_1 \le f_3$.

Доказательство. Чтобы установить справедливость 1) и 2), ввиду леммы 6 достаточно показать, что выполняется равенство $f_i(p) \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi = \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p$ для всех $p \in \pi$ ($i = 1,2$).

Докажем первое утверждение леммы. Так как $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})\setminus\pi} = \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$ для всех $p \in \sigma$. Тогда по лемме 7 $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p \subseteq L_{p'}(\mathfrak{F})$ и, значит, $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p \subseteq L_{p'}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$ для всех $p \in \sigma$. Обратно, пусть $G \in L_{p'}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$ и $V \in Inj_{\mathfrak{F}}(G)$. Тогда $V / G_{\mathfrak{F}} \le G / G_{\mathfrak{F}}$ и $G / G_{\mathfrak{F}}$ является нильпотентной группой. Следовательно, V – субнормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа группы G. Это означает, что $V = G_{\mathfrak{F}}$. Поскольку $G \in L_{p'}(\mathfrak{F})$, то $|G:V|$ является p-числом. Учитывая $V = G_{\mathfrak{F}}$, получаем, что $|G:G_{\mathfrak{F}}|$ является p-числом и поэтому $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p$. Значит, $L_{p'}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi = \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p$. Таким образом, справедливо равенство $L_{p'}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi = \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p$ для всех $p \in \sigma$ и по лемме 6 получаем $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi = LR(f_1)$. Утверждение 1) доказано.

Докажем утверждение 2). Поскольку $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$ и по лемме 7 $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p \subseteq L_{p'}(\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p)$, то $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p \subseteq L_{p'}(\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p) \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$ для всех $p \in \sigma$. Покажем обратное включение. Пусть $G \in L_{p'}(\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p) \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$. Аналогично как при доказательстве 1) можно показать, что $G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p}$ является $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p$-иньектором группы G. Следовательно, учитывая $G \in L_{p'}(\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p)$, имеем $G / G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p} \in \mathfrak{N}_p$ и поэтому $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p$. Значит, $L_{p'}(\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p) \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p$. Отсюда вытекает, что $L_{p'}(\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p) \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi = \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p$ для всех $p \in \sigma$ и по лемме 6 получаем $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi = LR(f_2)$. Утверждение 2) доказано.

Докажем утверждение 3). Так как $\mathfrak{N}_\pi$ – насыщенная радикальная формация, то применяя лемму 3 из работы [13], получаем $\mathfrak{F}^*\mathfrak{N}_\pi = (\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi)^*$. Поскольку класс $\mathfrak{N}_\pi$ – локален, то по лемме 5 [13] выполняется $(\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi)^* = \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$. Значит, $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi = \mathfrak{F}^*\mathfrak{N}_\pi$. Теперь учитывая справедливость утверждения 1) имеем $\mathfrak{F}^*\mathfrak{N}_\pi = LR(f_3)$. Но тогда $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi = LR(f_3)$ и утверждение 3) доказано.

Докажем 4). Чтобы установить справедливость 4), достаточно показать, что $L_{p'}(\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p) \subseteq L_{p'}(\mathfrak{F}) \subseteq L_{p'}(\mathfrak{F}^*)$ для всех простых p.

Покажем, что $L_{p'}(\mathfrak{F}) \subseteq L_{p'}(\mathfrak{F}^*)$. Пусть $G \in L_{p'}(\mathfrak{F})$ и $V \in Inj_{\mathfrak{F}^*}(G)$. Тогда по лемме 8 получаем $V_{\mathfrak{F}} \in Inj_{\mathfrak{F}}(G)$. Поскольку $G \in L_{p'}(\mathfrak{F})$, то $G_{p'} \subseteq V_{\mathfrak{F}}$, где $G_{p'}$ – некоторая холловская p'-подгруппа группы G. Следовательно, $G_{p'} \subseteq V$ и поэтому $G \in L_{p'}(\mathfrak{F}^*)$. Значит, $L_{p'}(\mathfrak{F}) \subseteq L_{p'}(\mathfrak{F}^*)$.

Покажем, что $L_{p'}(\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p)\subseteq L_{p'}(\mathfrak{F})$. Выберем группу G минимального порядка такую, что $G\in L_{p'}(\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p)\setminus L_{p'}(\mathfrak{F})$ для некоторого простого p. Тогда группа G комонолитична и ее комонолит $G_{L_{p'}(\mathfrak{F})}$. Поэтому $G/G_{L_{p'}(\mathfrak{F})}\cong Z_q$, где $q\in P$. Если $q=p$, то по лемме 7 $G\in L_{p'}(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_p=L_{p'}(\mathfrak{F})$, что противоречит выбору G. Значит, $q\neq p$.

Предположим, что $G\in L_p(\mathfrak{F})$. Тогда $G_{L_{p'}(\mathfrak{F})}\in L_{p'}(\mathfrak{F})\cap L_p(\mathfrak{F})$. Это означает, что если $R\in Inj_{\mathfrak{F}}(G_{L_{p'}(\mathfrak{F})})$, то $\left|G_{L_{p'}(\mathfrak{F})}:R\right|$ является p-числом и p'-числом. Поэтому $\left|G_{L_{p'}(\mathfrak{F})}:R\right|=1$ и $G_{L_{p'}(\mathfrak{F})}=R\in\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p$. Следовательно, $G_{L_{p'}(\mathfrak{F})}\in\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p$. Пусть $V\in Inj_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p}(G)$. Тогда $G_{L_{p'}(\mathfrak{F})}\cap V$ является $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p$-максимальной подгруппой в $G_{L_{p'}(\mathfrak{F})}$. Но $G_{L_{p'}(\mathfrak{F})}\in\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p$ и, значит, $G_{L_{p'}(\mathfrak{F})}\cap V=G_{L_{p'}(\mathfrak{F})}$. Отсюда вытекает, что $G_{L_{p'}(\mathfrak{F})}\subseteq V$. Рассмотрим равенство

$$\left|V:G_{L_{p'}(\mathfrak{F})}\right|=\frac{\left|G:G_{L_{p'}(\mathfrak{F})}\right|}{|G:V|}=\frac{q}{|G:V|}.$$

Тогда $|G:V|=q$ либо $|G:V|=1$. Поскольку $G\in L_{p'}(\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p)$ и $V\in Inj_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p}(G)$, то $|G:V|$ является p-числом. Следовательно, $|G:V|=1$ и, учитывая лемму 7, имеем $G=V\in\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p\subseteq G_{L_{p'}(\mathfrak{F})}$. Получили противоречие выбору G.

Остается принять следующий случай: $G\notin L_p(\mathfrak{F})$. Пусть $X=G_{L_p(\mathfrak{F})}$. Тогда $X\neq G$ и поскольку $G_{L_{p'}(\mathfrak{F})}$ – комонолит группы G, то $X\triangleleft G_{L_{p'}(\mathfrak{F})}$. Поэтому $X\in G_{L_{p'}(\mathfrak{F})}\cap G_{L_p(\mathfrak{F})}$. Это означает, что если $R\in Inj_{\mathfrak{F}}(X)$, то $|X:R|$ является p-числом и p'-числом. Следовательно, $|X:R|=1$ и $X=R\in\mathfrak{F}$. Легко видеть, что X является $\mathfrak{F}$-иньектором группы $G_{L_p(\mathfrak{F})}$ и $G_p\subseteq N_G(X)=G$, причем G_p – силовская p-подгруппа из G. Тогда по лемме 9 получаем, что XG_p является $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p$-иньектором группы G. Рассмотрим равенство $\left|XG_p:G_p\right|=\left|G:G_p\right|/\left|G:XG_p\right|$. Поскольку $G\in L_{p'}(\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p)$ и $XG_p\in Inj_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p}(G)$, то $\left|G:XG_p\right|$ является p-числом. Если $\left|G:G_p\right|=1$, то по лемме 7 имеем $G=G_p\in\mathfrak{N}_p\subseteq\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p\subseteq L_{p'}(\mathfrak{F})$, что противоречит выбору G. Значит, $\left|G:G_p\right|\neq1$ и является p'-числом. Следовательно, $\left|G:XG_p\right|=1$ и $G=XG_p\in\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p\subseteq L_{p'}(\mathfrak{F})$. Получили противоречие с выбором G. Это завершает доказательство того, что $L_{p'}(\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p)\subseteq L_{p'}(\mathfrak{F})\subseteq L_{p'}(\mathfrak{F}^*)$ для всех простых p. Теорема доказана.

Заметим, что обратное отношение $L_{p'}(\mathfrak{F})\subseteq L_{p'}(\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p)$ в общем случае неверно. Это подтверждает следующий

Пример. Пусть $\mathfrak{F}=\mathfrak{N}$ и $p=3$. Покажем, что $S_4 \in L_{3'}(\mathfrak{N}) \setminus L_{3'}(\mathfrak{N}\mathfrak{S}_3)$, где S_4 – симметрическая группа подстановок четвертой степени. Так как $|S_4|=2^3 \cdot 3$ и $\mathfrak{N}$-иньекторами группы S_4 являются силовские 2-подгруппы из S_4, то индекс любого $\mathfrak{N}$-иньектора группы S_4 есть 3-число и поэтому $S_4 \in L_{3'}(\mathfrak{N})$. Кроме того, силовские 2-подгруппы из S_4 являются также $\mathfrak{N}$-проекторами группы S_4 и, следовательно, $\mathfrak{N}$-иньектор группы S_4 не является нормальной подгруппой в S_4. Значит, $(S_4)_{\mathfrak{N}}$ – собственная подгруппа $\mathfrak{N}$-иньектора группы S_4. Тогда $S_4/(S_4)_{\mathfrak{N}} \notin \mathfrak{S}_3$ и по определению произведения классов Фиттинга $S_4 \notin \mathfrak{N}\mathfrak{S}_3$.

Заметим, что в A_4 – знакопеременной группе подстановок четвертой степени существует единственный $\mathfrak{N}$-иньектор V_4 – четверная группа, причем V_4 нормальна в A_4. Поскольку $|A_4|=2^2 \cdot 3$, то $A_4/V_4 \in \mathfrak{S}_3$ и поэтому $A_4 \in \mathfrak{N}\mathfrak{S}_3$. Таким образом, учитывая $S_4 \notin \mathfrak{N}\mathfrak{S}_3$, $A_4 \in \mathfrak{N}\mathfrak{S}_3$, $|S_4 : A_4|=2$, следует, что A_4 есть $\mathfrak{N}\mathfrak{S}_3$-иньектор группы S_4. Но тогда $S_4 \notin L_{3'}(\mathfrak{N}\mathfrak{S}_3)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Шеметков Л.А.*** Формации конечных групп. – М., 1978. – 278 с.
2. ***Doerk K.*** Die maximale lokale Erklärung einer gessätigten Formation // Math. Z., 1973. Bd. 133, № 2. – S. 133–135.
3. ***Воробьев Н.Т.*** Максимальные экраны локальных формаций // Алгебра и логика, 1979. – Т. 18, № 2. – С. 137–161.
4. ***Doerk K., Hawkes T.*** Finite soluble groups // Walter de Gruyter. – New York – Berlin, 1992. – 891 p.
5. ***Blessenohl D.*** Über Formationen und Halluntergruppen endlicher auflösbarer Gruppen // Math. Z., 1975. Bd.142, № 3. – S. 299–300.
6. ***Lockett P.*** On the theory of Fitting classes // Math. Z., 1975. V. 131, № 3. – P. 103–115.
7. ***Hartley B.*** On Fisher's dualization of formation theory // Proc. London Math. Soc., 1969. V. 3, № 2. – P. 193–207.
8. ***Воробьев Н.Т.*** О предположении Хоукса для радикальных классов // Сиб. матем. ж., 1996. – Т. 37, № 6. – С. 1296–1302.
9. ***Воробьев Н.Т.*** О локальных радикальных классах // Сб.: Вопросы алгебры. – Мн., 1986. Вып. 2. – С. 41–50.
10. ***Воробьев Н.Т.*** О максимальных и минимальных групповых функциях классов Фиттинга // Сб.: Вопросы алгебры. – Гомель, 1992. Вып. 7. – С. 60–69.
11. ***Lockett F.P.*** The Fitting class $\mathfrak{F}^*$ // Math. Z., 1974. Bd. 137. – S. 131–136.
12. ***Lockett F.P.*** On the Theory of Fitting Classes of finite and soluble groups // Math. Z., 1973. V. 131. – S. 103–115.
13. ***Воробьев Н.Т.*** О радикальных классах конечных групп с условием Локетта // Мат. заметки, 1988. Т. 43, № 2. – С. 161–168.

S U M M A R Y

Let π be a set of primes and let $\mathfrak{F}$ be a Fitting class of finite soluble groups. By $L_\pi(\mathfrak{F})$ denotes the class of all finite soluble groups whose $\mathfrak{F}$-injectors contain a Hall π-subgroup. In this paper we describe Hartley functions of product of Fitting classes in the form $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$ with the help of class $L_\pi(\mathfrak{F})$, where $\mathfrak{N}_\pi$ is the class of all nilpotent π-groups.

Поступила в редакцию 10.10.2005