УДК 685.34.03.017.3

Деформация листовых материалов на поверхности эллипсоида вращения

А.П. Дмитриев, О.А. Буркина, Ю.А. Завацкий
Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет»

В статье получены математические формулы для расчетов величин плоской и меридиальной деформации, которую получает абсолютно плоский круговой материал, жестко зажатый по периметру, при продавливании его поверхностью эллипсоида вращения. Поверхность эллипсоида вращения моделирует отдельные участки носочно-пучковой части обувной колодки. Поэтому изучение величин деформации на такой поверхности лучше отражает процесс формования материалов, чем на поверхности сферы или тороида, которые используются при лабораторных исследованиях способностей материалов к формованию. Полученные впервые результаты могут быть использованы для исследования процессов формования новых обувных материалов, а также для изучения различных способов формования, основанных на принципе постоянства деформации.

Ключевые слова: *деформация, листовой материал, эллипсоид вращения, эллиптический материал.*

Deformation of shoe material on the surface area of an ellipsoid of revolution

A. Dmitriev, V. Burkina, U. Zavatsky
Educational Institution Vitebsk State Technological University

In this paper the mathematical formulas for calculating the values of the plane and meridian deformation, which in obtained totally by a flat circular material, rigidly clamped along the perimeter, when punching its by spheroid, have been presented. The surface of an ellipsoid of revolution models separate areas of the toe part of a shoe. Hence the study of deformation size on such surface reflects the process of forming materials better than on the spherical or toroid surface, which is used in laboratory studies of the ability of materials to acquire form. The results can be used to investigate both the processes of forming a new shoe material and various ways of forming, based on the principle of deformation constancy.

Key-words: *deformation, sheet material, ellipsoid of revolution, elliptic integral.*

Процесс формования деталей верха обуви представляет собой одновременное приложение растягивающих усилий в различных направлениях заготовки из листовых материалов, к которым относятся натуральные и искусственные кожи, тканые или нетканые материалы. При этом придание заготовке сложной пространственной формы различными способами с использованием различных видов колодок – сложная процедура, учитывающая физико-механические свойства формуемых материалов и связанные с ними режимы формования.

Учет физико-механических свойств деформируемых материалов необходим и с точки зрения дальнейшей формоустойчивости обуви, определяющей ее качество. При непосредственном получении копии колодки требуется решение большого количества вопросов формования. Для первоначального анализа механических параметров процессов формования проводят испытания материалов двухосным симметричным растяжением на различных телах вращения: сфере, цилиндре или тороиде [1, 2].

Материал и методы. Существует несколько вариантов испытания материалов на двухосное растяжение, которые отличаются между собой в основном принципами приложения деформирующих сил. Общим для всех этих испытаний является применение образцов материалов в виде круга. На рис. 1 показаны схемы основных испытаний кожи для верха обуви на двухосное растяжение с помощью металлического шарика (рис. 1, а), жесткой сферы (рис. 1, б) и тороидального пуансона с роликами (рис. 1, в).

Рис. 1. **Схемы нагружения материала при двухосном растяжении.**

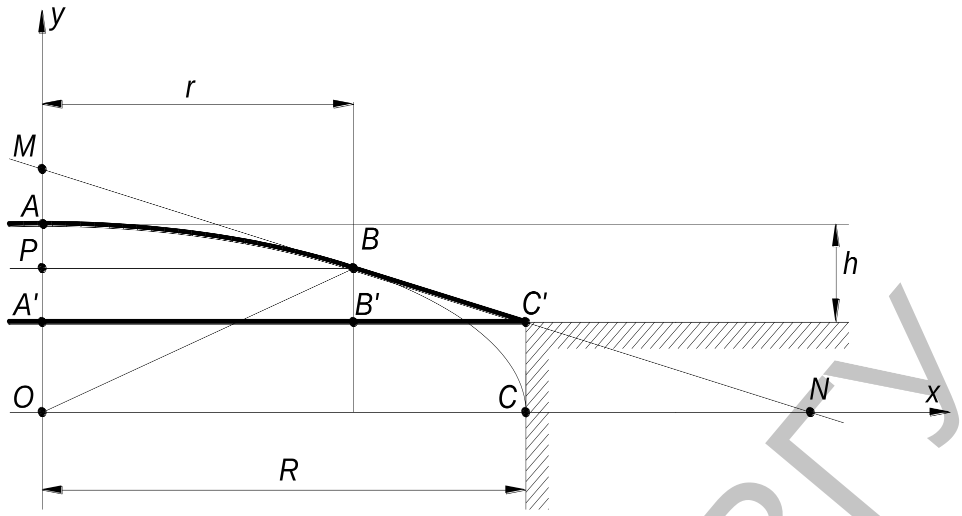

Рис. 2. **Растяжение материала в виде кругового образца эллипсоидом вращения.**

Среди указанных методов наиболее часто в лабораторных испытаниях используется метод продавливания зажатого по кругу образца шариком (рис. 1), диаметр которого значительно меньше диаметра образца материала. Однако все указанные методы двухосного растяжения довольно далеки от действительной формы обувной колодки и не могут объективно отражать способность материалов наилучшим образом облегать формующую колодку, а в последующем закреплять приданную заготовке верха обуви форму.

Целью данной работы является получение расчетных формул величин деформации материала формуемого двухосным растяжением на поверхности эллипсоида вращения, как наиболее близкой и не очень сложной поверхности, имитирующей форму носочной части обуви. Так как использующиеся в обувной промышленности материалы для верха обуви имеют толщину значительно меньшую, чем линейные размеры заготовок, поэтому толщина материала незначительно влияет на величину деформации, и этим влиянием будем пренебрегать, считая материал абсолютно тонким.

Результаты и их обсуждение. Рассмотрим растяжение материала в виде кругового образца радиусом $R = A'C'$, зажатого в точке C', эллипсоидом вращения с большой полуосью $a = OC$ той же величины и получим зависимости величин плоской деформации и относительного удлинения материала по меридиану от одной переменной $h = A'A$ – высоты подъема эллипсоидального пуансона выдавливанием при величине малой его полуоси $b = OA = const$ (рис. 2).

Величина плоской деформации листового материала определяется формулой:

$$E_s = \frac{S - S_0}{S_0} \cdot 100\%, \qquad (1)$$

где S_0 – первоначальная площадь деформируемого кругового образца радиуса $R = A'C'$, т.е. $S_0 = \pi R^2$, а S – площадь поверхности образца после его продавливания в результате подъема пуансона на высоту h.

После продавливания на высоту h площадь образца $S = S_1 + S_2$, где S_1 – площадь боковой поверхности усеченного конуса с радиусами оснований $R = A'C'$, $r = PB$ и образующей $l = BC'$ и S_2 – площадь материала, непосредственно облегающего поверхность эллипсоида по полудуге $\overset{\cup}{AB}$ (рис. 2).

В системе координат OXY осевое сечение эллипсоида представляет собой эллипс, каноническое уравнение которого:

$$\frac{\tilde{x}^2}{a^2} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2} = 1, \qquad (2)$$

с большой горизонтальной полуосью $a = OC = R$ и малой вертикальной полуосью $b = OA$.

Для нахождения составляющих S_1 и S_2 вначале определим координаты точки B. Пусть $B(x; y)$. Найдем уравнение касательной MN к эллипсу (2) в точке касания B, полученную в результате подъема пунсона на высоту $h \le b$ [3]. Из уравнения эллипса имеем $\tilde{y} = b\sqrt{1 - \frac{\tilde{x}^2}{a^2}}$ (т.к. $\tilde{y} \ge 0$) и $\tilde{y}'(x) = -\frac{b\tilde{x}}{a\sqrt{a^2 - \tilde{x}^2}}$. Тогда в точке касания B значение производной

$\tilde{y}'(B) = -\dfrac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}$. Окончательно уравнение касательной MN к эллипсу (2) в точке $B(x;y)$ имеет следующий вид:

$$\tilde{y} = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}(\tilde{x}-x)+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,. \qquad (3)$$

Найдем координаты точки N – пересечения касательной с осью абсцисс. Так как $\tilde{y}=0$, то из (3) имеем $-\dfrac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}(\tilde{x}-x)+\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}=0$ или $\tilde{x}=\dfrac{a^2}{x}$. Итак $N\left(\dfrac{a^2}{x};0\right)$.

Из подобия треугольников $\Delta B'BC'$ и $\Delta CC'N$ следует, что:

$$\frac{B'B}{B'C'}=\frac{C'C}{CN}\,. \qquad (4)$$

Учитывая, что $B(x;y)$, $B'C'=R-x$, $C'C=b-h$ и $CN=ON-OC=\dfrac{a^2}{x}-R$, соотношение (4) принимает вид:

$$\frac{B'B}{R-x}=\frac{b-h}{\frac{a^2}{x}-R} \text{ или } B'B=\frac{x(b-h)(R-x)}{a^2-Rx},$$

с учетом $a=R$ имеем:

$$B'B=\frac{x(b-h)}{R}\,. \qquad (5)$$

Тогда ордината точки касания B:

$$y=B'B+C'C=\frac{(x+R)(b-h)}{R}\,. \qquad (6)$$

Найдем абсциссу точки касания, для чего вначале в уравнение касательной (3) подставим координаты точки $C'(R;b-h)$. Тогда $b-h=-\dfrac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}(R-x)+\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ или, т.к. $x<a$, то $a(b-h)\sqrt{a^2-x^2}=b(a^2-Rx)$.

Но так как $a=R$, то $R(b-h)\sqrt{R^2-x^2}=bR(R-x)$, и т.к. $h\le b$, то $(b-h)^2(R-x)(R+x)=b^2(R-x)^2$. Решая полученное уравнение относительно x, получаем

$$x=\frac{R\left(b^2-(b-h)^2\right)}{b^2+(b-h)^2}\,. \qquad (7)$$

С учетом (7) формула (6) принимает вид:

$$y=\frac{2b^2(b-h)}{b^2+(b-h)^2}\,. \qquad (8)$$

Введем обозначения:

$$b-h=p\,, \qquad (9)$$

$$b^2-p^2=m\,, \qquad (10)$$

$$b^2+p^2=n\,, \qquad (11)$$

тогда

$$B\left(\frac{Rm}{n};\frac{2b^2p}{n}\right). \qquad (12)$$

С учетом полученных координат точки касания B, найдем площадь боковой поверхности усеченного конуса по формуле $S_1=\pi(R+r)\cdot l$, где $r=x=\dfrac{Rm}{n}$, $l=\sqrt{(B'B)^2+(B'C')^2}$. С учетом (7), (10) и (11) равенство (5) имеет вид $B'B=\dfrac{pm}{n}$ и $B'C'=A'C'-A'B'=R-x=R-\dfrac{Rm}{n}$. Тогда

$$l=\sqrt{\frac{p^2m^2}{n^2}+\left(R-\frac{Rm}{n}\right)^2}=\frac{1}{n}\sqrt{p^2m^2+R^2(n-m)^2}=\frac{p}{n}\sqrt{m^2+4R^2p^2}\,. \qquad (13)$$

Итак $S_1=\pi\left(R+\dfrac{Rm}{n}\right)\cdot\dfrac{p}{n}\sqrt{m^2+4R^2p^2}$ или после преобразования

$$S_1=\frac{2\pi Rb^2p\sqrt{m^2+4R^2p^2}}{n^2}\,. \qquad (14)$$

При нахождении площади эллиптической составляющей S_2 воспользуемся формулой площади поверхности тела вращения, полученного вращением дуги $\overset{\smile}{AB}$ эллипса (2) вокруг оси ординат OY [3]:

$$S_2=2\pi\int_{y_1}^{y_2}\tilde{x}\sqrt{1+(\tilde{x}')^2}\,d\tilde{y}\,. \qquad (15)$$

Из (2) с учетом $a=R$ имеем $\tilde{x}^2=R^2-\dfrac{R^2\tilde{y}^2}{b^2}$, а значит после дифференцирования по $\tilde{y}$: $\tilde{x}\tilde{x}'=-\dfrac{R^2}{b^2}\tilde{y}$ и подынтегральное выражение (15) имеет вид: $\dfrac{R}{b}\sqrt{b^2+\left(\dfrac{c}{b}\tilde{y}\right)^2}$, где $c=\sqrt{R^2-b^2}$ – фокусное расстояние эллипса (2), причем $y_1=y(B)$ и $y_2=y(A)=b$ (рис. 2). Тогда

$$S_2 = 2\pi \frac{R}{b} \int\limits_{y(B)}^{b} \sqrt{b^2 + \left(\frac{c}{b}\tilde{y}\right)^2}\, d\tilde{y} = 2\pi \frac{R}{b} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{c} \left(\frac{c}{b}\tilde{y}\sqrt{b^2 + \left(\frac{c}{b}\tilde{y}\right)^2} + b^2 \ln\left(\frac{c}{b}\tilde{y} + \sqrt{b^2 + \left(\frac{c}{b}\tilde{y}\right)^2} \right) \right) \Bigg|_{y(B)}^{b},$$

т.к. $y(B) = \dfrac{2b^2 p}{n}$, то $S_2 = \pi \dfrac{R}{c}\left(cR + b^2 \ln(c+R) - \dfrac{2cbp}{n}\sqrt{b^2 + \left(\dfrac{2cbp}{n}\right)^2} - b^2 \ln\left(\dfrac{2cbp}{n} + \sqrt{b^2 + \left(\dfrac{2cbp}{n}\right)^2} \right) \right)$.

Введя

$$q(h) = \frac{2cbp}{n}, \tag{16}$$

окончательно получаем:

$$S_2 = \pi \frac{R}{c}\left(cR + b^2 \ln(c+R) - q(h)\sqrt{b^2 + q^2(h)} - b^2 \ln\left(q(h) + \sqrt{b^2 + q^2(h)} \right) \right). \tag{17}$$

Итак, величина плоской деформации определяется формулой (1) с учетом того, что $S = S_1 + S_2$, где S_1 и S_2 находят по формулам (14) и (17) при учете параметров системы p, m, n и $q(h)$, которые зависят от b и h и определяются формулами (9), (10), (11) и (16).

Величину меридиальной деформации или относительного удлинения по меридиану определим по формуле:

$$E_m = \frac{L-d}{d} \cdot 100\%, \tag{18}$$

где $d = 2R$ – первоначальный диаметр образца, L – длина образца по меридиану поверхности вращения после подъема пуансона на высоту h.

Так как $L = 2\left(l_{\overset{\smile}{AB}} + BC' \right)$ (рис. 2), и так как, по (13), $BC' = \dfrac{p}{n}\sqrt{m^2 + 4p^2R^2}$, то остается найти $l_{\overset{\smile}{AB}}$ – длину дуги $\overset{\smile}{AB}$ эллипса (2) по формуле:

$$l_{\overset{\smile}{AB}} = \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sqrt{(\tilde{x}')^2 + (\tilde{y}')^2}\, dt.$$

Т.к. эллипс (2) можно задать параметрически: $\tilde{x} = a\cos t$, $\tilde{y} = b\sin t$, то дуга $\overset{\smile}{AB}$ определяется изменением параметра t от $\alpha_1 = arctg\dfrac{y}{x} = arctg\dfrac{2b^2p}{Rm}$ до $\alpha_1 = \dfrac{\pi}{2}$ и вычисляется по формуле:

$$l_{\overset{\smile}{AB}} = \int\limits_{arctg\frac{2b^2p}{Rm}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\, dt. \tag{19}$$

Учитывая свойство эксцентриситета ε эллипса (2), формула (19) принимает вид:

$$l_{\overset{\smile}{AB}} = a \int\limits_{arctg\frac{2b^2p}{Rm}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2 t}\, dt = a\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2 t}\, dt - \int\limits_0^{arctg\frac{2b^2p}{Rm}} \sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2 t}\, dt \right). \tag{20}$$

Интегралы в формуле (20) являются эллиптическими интегралами 2-ого рода, учитывая их обозначения и $a = R$, формула (19) принимает вид:

$$l_{\overset{\smile}{AB}} = R\left(E\left(\frac{\pi}{2}; \varepsilon\right) - E\left(arctg\frac{2b^2p}{Rm}; \varepsilon \right) \right).$$

По формуле (17) окончательно получаем:

$$E_m = \frac{\frac{p}{n}\sqrt{m^2 + 4p^2R^2} + R\left(E\left(\frac{\pi}{2};\varepsilon\right) - E\left(arctg\frac{2b^2p}{Rm};\varepsilon \right) \right) - R}{R} \cdot 100\%, \tag{21}$$

где $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{R^2 - b^2}}{R}$, $p = b - h$, $m = b^2 - p^2$ и $n = b^2 + p^2$.

Значения эллиптических интегралов второго рода для расчета меридиальной деформации E_m по формуле (21) находят численными методами, по таблицам или с помощью компьютерных программ.

Для исследования формовочных свойств материалов для верха обуви необходимо знать величины плоской и меридиальной деформации при продавливании эллипсоидом вращения плоского кругового образца на величину подъема h. Построим графики зависимости E_s и E_m от h при различных величинах малой полуоси b и радиусе $R = 56{,}5$ мм, при котором исходный образец материала имеет площадь $S_0 \approx 10000$ мм^2 (рис. 3).

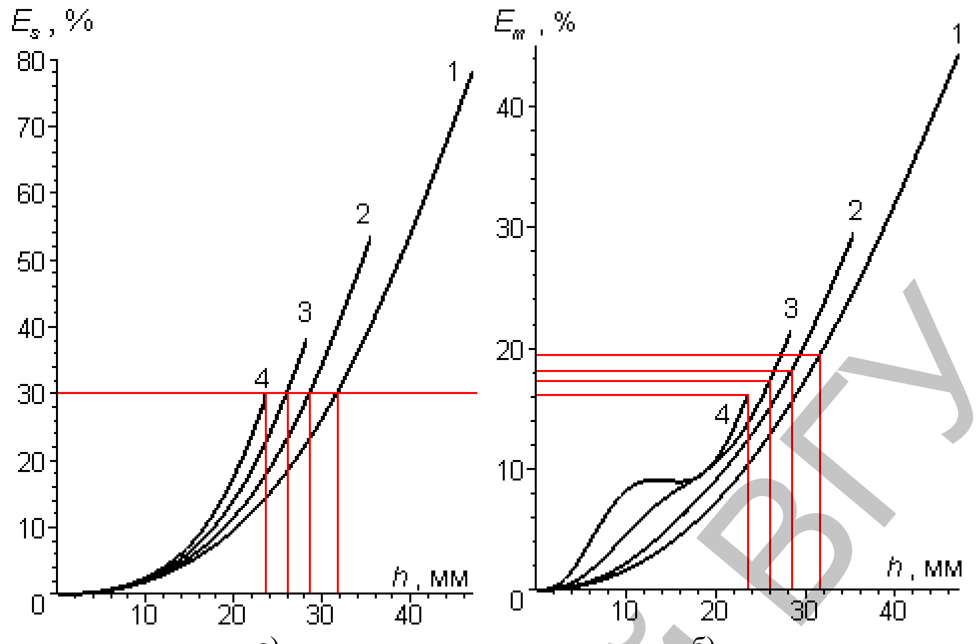

Рис. 3. **Кривые зависимости между плоской деформацией (а), относительным удлинением по меридиану (б) и высотой подъема *h* пуансона в виде эллипсоида вращения с большой полуосью *R*=56,5 мм и малой полуосью *b***

$$(1 - b = \frac{R}{1{,}2};\ 2 - b = \frac{R}{1{,}6};\ 3 - b = \frac{R}{2{,}0};\ 4 - b = \frac{R}{2{,}4}).$$

Известно, что при формовании деталей верха обуви обтяжно-затяжным и внутренним простым способами [2] плоская деформация материала на колодке не превышает 30% (рис. 3, а). По полученным формулам (1) с учетом (14) и (17), а также (21) для различных значений малой полуоси b рассчитываем значение величин подъема h пуансона в виде эллипсоида вращения для получения максимальной плоскостной деформации (рис. 3, б).

Заключение. Полученные в работе результаты показывают, что получить наибольшую плоскую деформацию в 30% эллипсоидом вращения можно только при значении его малой полуоси $\frac{R}{2{,}4} \le b < R$, при этом величина меридиальной деформации будет лежать в пределах от 16 до 20%.

Впервые полученные математические формулы позволят конструкторам обуви производить подбор материалов для верха обуви и определить режимы их формования с учетом максимально возможного их деформирования двухосным растяжением на поверхности эллипсоида вращения, как поверхности, наиболее лучше моделирующей носочно-пучковую часть формующей колодки. Полученные результаты могут быть использованы для исследования процессов формования новых обувных материалов, а также для изучения различных способов формования, основанных на принципе постоянства деформации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зыбин, А.Ю. Двухосное растяжение материалов для верха обуви / А.Ю. Зыбин. – Москва: Легкая индустрия, 1974. – 120 с.
2. Куприянов, М.П. Деформационные свойства кожи для верха обуви / М.П. Куприянов. – Москва: Легкая индустрия, 1969. – 246 с.
3. Пискунов, С.Н. Дифференциальное и интегральное исчисления / С.Н. Пискунов. – Москва: Наука, 1978. – 465 с.

Поступила в редакцию 27.08.2010

Адрес для корреспонденции: 210035, г. Витебск, Московский пр-т, д. 70, корп. 4, кв. 27, тел.: 8 (0212) 43-63-03 – Дмитриев А.П.