

РАСЧЕТ ТОНКОСТЕННОЙ КОНСТРУКЦИИ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ЭЛЕМЕНТОВ ГОФРИРОВАННЫХ ПАНЕЛЕЙ

Михасев Г.И., Маркова Л.В., Никонова Т.В.

The thin-walled structure lied in a soil is investigated. The reaction of the structure on the part of the external elastic filling (a soil) is considered in the scope of Gook's law. General solutions of the governing equations describing the structure equilibrium are obtained. The substitution of the general solutions into the boundary and conduction conditions leads to the system of algebraic equations, which are solved by using the MAPLE software. The influence of the deposition depth of the structure on the stresses and moments is investigated.

Рассмотрим тонкостенную конструкцию, лежащую в грунте на глубине H_2 и состоящую из элементов гофрированных цилиндрических панелей.

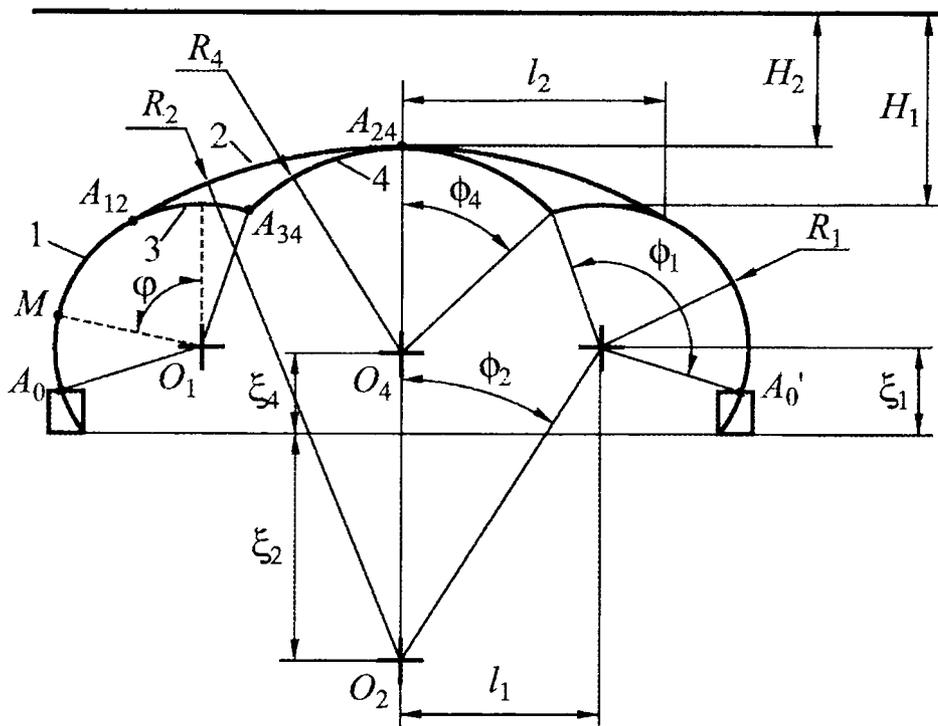


Рис.1 Поперечное сечение конструкции

На рис.1 изображено поперечное сечение данной конструкции и введены все необходимые обозначения. Цифрами 1, 2, 3, 4 отмечены элементы конструкции, буквами A_{12} , A_{34} , A_{24} — точки сопряжения. Учитывая симметрию конструкции, впоследствии будем рассматривать только ее левую часть.

Будем считать, что в точках A_0 , A_0' реализуется условие жесткого либо шарнирного крепления. Учитывая технологию скрепления гофрированных листов, в точках A_{12} , A_{24} , будем рассматривать условия жесткого соединения, а в точке A_{34} — условия жесткого или шарнирного соединения.

Целью данной работы является:

1. определение напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкции (перемещений, тангенциальных и перерезывающих уси-

лий, изгибающих моментов) при различных способах крепления в точках сопряжения элементов и различных глубинах залегания.

2. создание на базе пакета MAPLE программы расчета НДС для однотипной конструкции при различных геометрических и физических характеристиках конструкции.

Для упрощения задачи введем следующие предположения:

1) длину конструкции в поперечном направлении (перпендикулярном плоскости рисунка) считаем достаточно большой, так что граничными условиями на ее торцах пренебрегаем;

2) воздействие внешнего упругого заполнителя (грунта) принимаем в предположении гидростатического характера его давления на конструкцию с учетом реакции заполнителя в рамках модели Фусса-Винклера [1-5];

3) гофрированные панели будем заменять цилиндрическими панелями с толщиной, обеспечивающей совпадение ее изгибной жесткости с аналогичной жесткостью гофрированной панели.

Из всех элементов, составляющих конструкцию, в контакте с грунтом находятся элементы 1 и 2. Введем в рассмотрение глубину залегания H_1 элемента 1 (см. рис.1), тогда

$$H_1 = H_2 + R_4 - R_1 + \xi_4 - \xi_1, \quad (1)$$

где R_k — радиус k -ой панели, а ξ_k — расстояние от основания конструкции до точки O_k (центра k -ой дуги) $k = 1, 4$.

Будем считать, что каждый элемент характеризуется своими толщиной h_k , модулем Юнга E_k , коэффициентом Пуассона ν_k и плотностью $\gamma_0^{(k)}$. Положение точки M на каждом из элементов будем определять углом φ , отсчитываемым в направлении противоположном ходу часовой стрелки, при этом $\varphi_{k,1} \leq \varphi \leq \varphi_{k,2}$.

Принимая во внимание ранее сделанное предположение о большой длине конструкции в направлении x , перпендикулярном плоскости рисунка, будем считать, что все функции, характеризующие НДС конструкции, не зависят от координаты x . Тогда задача становится плоской, и для описания равновесия k -го элемента могут быть использованы безмоментные уравнения равновесия тонких оболочек [6], вырождающиеся в уравнения равновесия стержней:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_k}{\partial s} - \frac{T_k}{R_k} + q_n^{(k)} &= 0, \\ \frac{\partial T_k}{\partial s} + \frac{Q_k}{R_k} + q_2^{(k)} &= 0, \quad \frac{\partial M_k}{\partial s} - Q_k = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $s = R_k j$ — длина дуги, на k — ом элементе ($k = 1, 4$), T_k , Q_k , M_k — кольцевое усилие, перерезывающее усилие и момент, соответственно, возникающие в серединной поверхности k — ого элемента, $q_n^{(k)}$, $q_2^{(k)}$ — нормальное и касательное усилия, приходящиеся на единицу площади поверхности k — ого элемента (оболочки). Здесь

$$\begin{aligned} q_n^{(k)} &= q_{n,сп}^{(k)} + q_{n,об}^{(k)} + q_{n,грун}^{(k)}, \\ q_{n,сп}^{(k)} &= -\gamma_k [H_k + R_k (1 - \cos \varphi)], \\ q_{n,об}^{(k)} &= -\gamma_o^{(k)} h_k \cos \varphi, \\ q_{n,грун}^{(k)} &= -\frac{\alpha_o^{(k)}}{R} w_k, \quad q_2^{(k)} = q_{2,об}^{(k)} = \gamma_o^{(k)} h_k \sin \varphi, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\gamma_k = \begin{cases} \gamma_{сп}, & k = 1, 2 \\ 0, & k = 3, 4 \end{cases}$$

$$\alpha_o^{(k)} = \begin{cases} \alpha_{сп}, & k = 1, 2 \\ 0, & k = 3, 4 \end{cases}$$

где $q_{n,сп}^{(k)}$, $q_{n,об}^{(k)}$, $q_{n,грун}^{(k)}$ — нормальные составляющие нагрузки, вызванные действием грунта, веса оболочки и реакцией грунта (винклеровского основания), соответственно, w_k — нормальный прогиб k -го элемента, $q_{2,об}^{(k)}$ — касательная составляющая нагрузки, вызванная весом оболочки, $\gamma_{сп}$, $\gamma_o^{(k)}$ — удельные веса грунта и материала оболочки k -го элемента, $\alpha_{сп}$ — коэффициент постели винклеровского основания ($[a_{сп}] = H/M^2$).

Уравнения равновесия (2) дополним уравнениями физического состояния, связывающими T_k , Q_k и M_k с нормальным прогибом w_k и касательным перемещением v_k :

$$\begin{aligned} T_k &= \frac{E_k h_k}{1 - \nu_k^2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial s} + \frac{w_k}{R_k} \right), \\ M_k &= \frac{E_k h_k^3}{12(1 - \nu_k^2)} \left(-\frac{\partial^2 w_k}{\partial s^2} + \frac{1}{R_k} \frac{\partial v_k}{\partial s} \right) \end{aligned}$$

$$Q_k = \frac{\partial M_k}{\partial s} = \frac{E_k h_k^3}{12(1 - \nu_k^2)} \left(-\frac{\partial^3 w_k}{\partial s^3} + \frac{1}{R_k} \frac{\partial^2 v_k}{\partial s^2} \right), \quad (4)$$

В основании конструкции (см. на рис. 1 точку A_j) рассмотрим условия жесткого

$$w_1(\varphi_{1,2}) = v_1(\varphi_{1,2}) = 0, \quad w_1'(\varphi_{1,2}) = 0 \quad (5)$$

или шарнирного креплений

$$w_1(\varphi_{1,2}) = v_1(\varphi_{1,2}) = 0, \quad M_1(\varphi_{1,2}) = 0, \quad (6)$$

где w_1 , v_1 — нормальное и тангенциальное перемещения точек элемента 1, а штрих здесь и ниже означает дифференцирование по координате j .

Рассмотрим условия сопряжения элементов в точках A_{12} , A_{34} и A_{24} . Пусть γ_{kl} — угол между единичными векторами — нормальными $\bar{e}_k^{(n)}$, $\bar{e}_l^{(n)}$ к кривым k и l , соответствующим k -ому и l -ому элементам. В случае жесткого соединения, условия сопряжения заключаются в равенстве векторов перемещения, сил, моментов и углов поворота каждого элемента в точке их пересечения. Проектируя вектора перемещений и сил, например, на оси $\bar{e}_k^{(n)}$, $\bar{e}_k^{(1)}$, где $\bar{e}_k^{(1)}$ — единичный вектор, касательный к k -ой кривой, получим следующие условия сопряжения в случае жесткого сочленения:

$$v_k = \cos \gamma_{kl} v_l - \sin \gamma_{kl} w_l, \quad (7)$$

$$w_k = \sin \gamma_{kl} v_l + \cos \gamma_{kl} w_l$$

$$T_k = \cos \gamma_{kl} T_l - \sin \gamma_{kl} Q_l, \quad (8)$$

$$Q_k = \sin \gamma_{kl} T_l + \cos \gamma_{kl} Q_l$$

$$M_k = M_l, \quad \theta_k = \theta_l. \quad (9)$$

В случае шарнирного соединения k -ого и l -ого элементов условия (7), (8) сохраняются, а вместо (9) в точке соединения имеем:

$$M_k = M_l = 0. \quad (10)$$

В точке A_{24} , учитывая симметрию конструкции относительно линии $A_{24}O_4$, примем

$$w_2(0) = w_4(0), \quad w_2'(0) = w_4'(0) = 0, \quad (11)$$

Разрешающее дифференциальное уравнение относительно нормального прогиба w_k имеет вид:

$$w_k^{IV} + 2w_k'' + a_k w_k = b_k - \delta_k c_k^{(5)} + d_k \cos \varphi. \quad (12)$$

Здесь $c_k^{(5)}$ — неизвестная постоянная, определяемая из граничных условий и условий со-

пряжения,
$$\varepsilon_k = \frac{h_k^2}{12R_k^2}, \quad \delta_k = \frac{1 + \varepsilon_k}{\varepsilon_k},$$

$$a_k = \frac{\varepsilon_k + \alpha_k(1 + \varepsilon_k)}{\varepsilon_k}, \quad b_k = \delta_k q_{no}^{(k)},$$

$$d_k = \delta_k (q_{nc}^{(k)} - q_{2s}^{(k)}).$$

Для 1-го и 2-го элементов, граничащих с грунтом, параметры, входящие в уравнение (12),

имеют вид:
$$a_k = 1 + \frac{\delta_k \alpha_{sp}(1 - v_k^2) R_k}{E_k h_k},$$

$$b_k = -\frac{\delta_k (1 - v_k^2) \gamma_{sp} R_k^2 (H_k + R_k)}{E_k h_k},$$

$$d_k = \frac{\delta_k (1 - v_k^2) R_k^2 (\gamma_k R_k - 2\gamma_o^{(k)} h_k)}{E_k h_k} \text{ при } k=1,2, \text{ а}$$

для 3-го и 4-го элементов, несоприкасающихся

с грунтом: $a_k = 1, b_k = 0, d_k = -\frac{2\delta_k (1 - v_k^2) \gamma_o^{(k)} R_k^2}{E_k}$

при $k = 3, 4$.

Рассмотрим интегрирование разрешающего уравнения (12) для элементов 1, 2 и 3, 4, граничащих и не контактирующих с грунтом, соответственно.

Для элементов 1, 2 уравнение (12) имеет следующее общее решение

$$w_k(\varphi) = c_k^{(1)} e^{\alpha_k \varphi} \cos \beta_k \varphi + c_k^{(2)} e^{\alpha_k \varphi} \sin \beta_k \varphi + c_k^{(3)} e^{-\alpha_k \varphi} \cos \beta_k \varphi +$$

$$+ c_k^{(4)} e^{-\alpha_k \varphi} \sin \beta_k \varphi + \frac{b_k}{a_k} - \frac{\delta_k}{a_k} c_k^{(5)} + \frac{d_k}{a_k - 1} \cos \varphi, \quad (13)$$

где $\alpha_k = \sqrt{\frac{a_k - 1}{2}}, \quad \beta_k = \sqrt{\frac{a_k + 1}{2}}, k=1, 2$

2. Тогда, тангенциальное перемещение

$$v_k = \frac{1}{1 + \varepsilon_k} \left(\varepsilon_k w_k' - \int w_k(\varphi) d\varphi + q_{2s}^{(k)} \sin \varphi \right) + c_k^{(5)} \varphi + c_k^{(6)} \quad (14)$$

При $k=3, 4$ общее решение уравнения (12) имеет вид

$$w_k = c_k^{(1)} \cos \varphi + c_k^{(2)} \sin \varphi + \varphi (c_k^{(3)} \cos \varphi + c_k^{(4)} \sin \varphi) - \frac{\delta_k}{a_k} c_k^{(5)} - \frac{d_k}{8} \varphi^2 \cos \varphi \quad (15)$$

а перемещение v_k находится по формуле (14).

В обоих случаях, для элементов, граничащих и не граничащих с грунтом, усилия T_k, Q_k и момент M_k находятся согласно (4).

Построенные решения (13)-(15) содержат неопределенные постоянные $c_k^{(j)}$, которые могут быть найдены из граничных условий и условий сопряжения элементов. Рассмотрение этих условий приводит к системе из 24 неоднородных алгебраических уравнений относительно 24 неизвестных постоянных $c_k^{(j)}, k=1, 4, j=1, 6$.

Для программной реализации исходной задачи выбрана математическая среда MAPLE [7, 8], которая позволяет автоматизировать процесс решения следующих подзадач:

— найти аналитическое выражение производной;

— вычислить интегралы;

— определить значения тригонометрических функций;

— решить систему из 24 неоднородных алгебраических уравнений относительно 24 неизвестных;

— получить графическое отображение полученного решения.

С использованием среды MAPLE выполнены расчеты усилий и моментов в элементах конструкции как функций аргумента j , произведен анализ зависимости усилий от глубины залегания конструкции. Из анализа выполненных расчетов следует, что тангенциальное, перерезывающее усилия и моменты, возникающие в элементах конструкции, возрастают с увеличением глубины залегания. Наиболее опасными являются точки сопряжения элементов конструкции A_{12}, A_{34} , в которых перерезывающие силы и моменты достигают наибольшего значения.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Динник А.Н. Круглая пластина на упругом основании // Изв. Киевского политехнического института. — 1910. — С.287-306.
2. Корнев Б.Г. Вопросы расчета балок и плит на упругом основании. — М.: Госстройиздат, 1954. 232 с.

3. Корбут Б.А, Назорный Ю.Н. Об одной модели заполнителя в задачах устойчивости цилиндрических оболочек // Изв. вузов. «Машиностроение». — 1971, №6. — С.16–21.
4. Крылов А.Н. О расчете балок, лежащих на упругом основании. — М.: Изд-во АН СССР, 1930. 154 с.
5. Уманский А.А. О расчете балок на упругом основании. — М.: Стройиздат, 1933. 48 с.
6. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Ленинград: Гос. союзное изд-во судостроительной промышленности, 1962, 431с.
7. Дьяконов В.П. Математическая среда Maple V R3/R4/R5. — М.: «Солон», 1998.
8. Манзон Б.М. Maple V Power Edition. — Москва, 1998.

МЕТОД МАКСИМУМА ИНФОРМАЦИОННОЙ ЭНТРОПИИ В СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРУГОСТИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ В ЛАГРАНЖЕВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

В.Б. Немцов

The theory of the nonlinear elastic deformation by means of principle of information entropy maximum is described. The Murnaghan formula in material coordinates with help of the statistical theory is obtained.

В настоящее время в рамках феноменологического подхода интенсивно исследуется нелинейная упругость деформируемых тел [1-4]. Теория нелинейного поведения важна для биомолекул типа ДНК. Однако общая форма нелинейности остается нераскрытой, так как проблема полного описания нелинейной упругости чрезвычайно сложна. Поэтому оправданно рассматривать более простую задачу о наиболее вероятной форме исследуемой нелинейности. Для решения подобной задачи естественно использовать принцип максимума информационной энтропии, широко применяемый в статистической теории сложных систем [5].

В данной работе используется информационная энтропия Больцмана-Гиббса-Шеннона. Работа является развитием предыдущих работ [6,7], в которых разрабатывалась статистическая теория нелинейной упругости в эйлеровых переменных.

Напомним некоторые положения лагранжевого описания деформации твердых тел. Пусть \mathbf{a} — радиус-вектор, определяющий положение частицы среды до деформации. В используемой здесь и далее декартовой системе координат его компоненты a_i являются лагранжевыми переменными. Положение частицы среды после деформации характеризуется радиусом-вектором \mathbf{x} . Зависимость этого радиуса-вектора от вектора \mathbf{a} определяет закон деформирования среды

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(a), \quad x_i = x_i(a_1, a_2, a_3) \quad (i=1,2,3) \quad (1)$$

Компоненты x_i определены в той же исходной декартовой системе, что и a_i . Уравнения (1) в общем случае содержат время t . В качестве меры деформации используется лагранжева мера деформации в форме тензора Грина

$$L_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_e}{\partial a_i} \frac{\partial x_e}{\partial a_j} - \delta_{ij} \right). \quad (2)$$

Если использовать компоненты u_i вектора смещений \mathbf{u} , вводимые соотношениями

$$x_i = a_i + u_i, \quad (3)$$

тензор Грина представляется в виде

$$L_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} + \frac{\partial u_e}{\partial a_i} \frac{\partial u_e}{\partial a_j} \right). \quad (4)$$

Для статистического описания деформирования среды введем динамическую величину локализации частицы среды

$$\hat{x}(\mathbf{a}) = \sum_{v=1}^N \mathbf{x}^v \delta(\mathbf{a} - \mathbf{a}^v), \quad \hat{x}_i(\mathbf{a}) = \sum_{v=1}^N x_i^v \delta(\mathbf{a} - \mathbf{a}^v) \quad (5)$$

Здесь N — число частиц (атомов или молекул) в системе, v — номер частицы, \mathbf{a}^v — радиус-вектор частицы до деформации, \mathbf{x}^v — после деформации, \mathbf{a} — по-прежнему радиус-вектор частицы среды в исходном состоянии. Введем еще динамическую величину плотности числа частиц в лагранжевых переменных

$$\hat{n}(\mathbf{a}) = \sum_{v=1}^N \delta(\mathbf{a} - \mathbf{a}^v). \quad (6)$$

Среднее значение динамической величины (5) и позволяет описать макроскопический закон деформирования среды

$$x_i(a_1, a_2, a_3) = \frac{\langle \hat{x}_i \rangle}{n(a)}. \quad (7)$$

Здесь угловые скобки означают усреднение с помощью квазиравновесной функции распределения ρ_q , вид которой будет установлен позже,