



УДК 539.3

Г.И. Михасев, Т.В. Никонова

Устойчивость тонких гофрированных оболочек, лежащих на упругом основании под действием однородного гидростатического давления

Введение. Металлические тонкостенные гофрированные конструкции являются высокотехнологичными и экономичными. В настоящее время подобные конструкции широко используются при капитальном строительстве для всевозможных транспортных, в том числе железнодорожных, развязок. Исследование устойчивости равновесия тонкостенных гофрированных оболочек наряду с расчетом на прочность является одной из самых важных в прикладном отношении проблем в механике деформируемого твердого тела. В данный момент достаточно широко проведены исследования устойчивости тонкостенных изотропных цилиндрических оболочек, подверженных статическим изгибным и крутящим нагрузкам, осевому сжатию, гидростатическому давлению [1, 2]. В [3] проведено исследование локальной устойчивости пластин и пологих оболочек на упругом основании. В [4] авторами статьи проводилось исследование устойчивости длинной тонкостенной оболочки под действием веса грунта с учетом его реакции. Недостаточно исследованной является устойчивость тонкостенных гофрированных оболочек. В данной статье авторы проводят исследование такой оболочки под действием однородного гидростатического давления. Полученное разрешающее уравнение для нормального прогиба является однородным четвертого порядка с переменными коэффициентами. Для его решения применен численный метод Рунге–Кутты. С использованием разработанной авторами прикладной программы проведено исследование зависимости параметра нагружения от физических и геометрических параметров оболочки.

Устойчивость тонких гофрированных оболочек. Рассмотрим тонкостенную гофрированную оболочку средней длины L , лежащую на упругом основании и находящуюся под действием внешнего однородного гидростатического давления Q_3^* . Смоделируем гофрированную оболочку тонкой оболочкой вращения толщиной h (рис. 1).

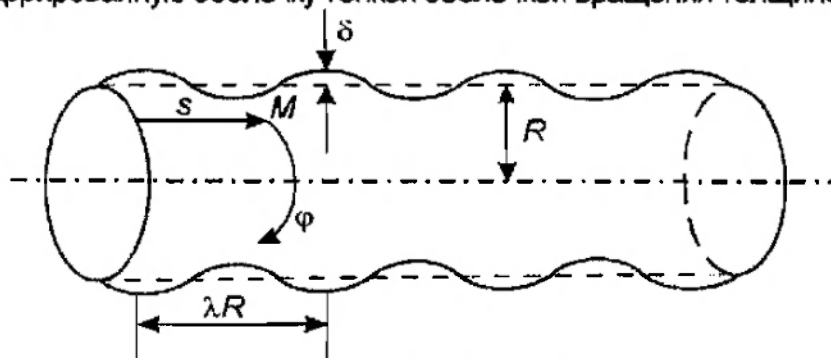


Рис. 1. Оболочка вращения.

На поверхности опорного цилиндра введем безразмерную ортогональную систему криволинейных координат (s, φ) , где s – длина отрезка образующей опорного цилиндра, отсчитываемая от края до точки M и отнесенная к его радиусу R , а φ – окружная координата. Расстояние от оси вращения до срединной поверхности оболочки, отнесенное к радиусу R , зададим функцией

$$B(s) = 1 + \mu F(s), \quad F(s) = \sin(2\pi s / \lambda), \quad \mu = \delta / R,$$

где μ – малый параметр, функция $F(s)$ описывает форму начальных отклонений от цилиндрической поверхности, имеет порядок единицы и существенно не возрастает при дифференцировании, δ – высота волны гофра, λ – длина волны гофра, отнесенная к радиусу R .

Воздействие упругого основания примем в качестве дополнительного давления, обусловленного нормальным перемещением w стенок трубы, в рамках модели Фусса–Винклера [5, 6].

Безразмерные уравнения устойчивости такой оболочки, с учетом сил реакции грунта имеют вид [7]:

$$\begin{aligned} \varepsilon^4 \Delta^2 w + \varepsilon^2 \Lambda \Delta_1 w - \Delta_k \Phi + \varepsilon w &= 0, \\ \varepsilon^4 \Delta^2 \Phi + \Delta_k w &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\Delta = \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right],$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{A_2}{A_1} t_1 \frac{\partial}{\partial s} + t_3 \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{A_1}{A_2} t_2 \frac{\partial}{\partial \varphi} + t_3 \frac{\partial}{\partial s} \right) \right],$$

$$\Delta_k = \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{A_2}{A_1 R_2} \frac{\partial}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{A_1}{A_2 R_1} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right].$$

Здесь усилия T_i ($i=1, 2, 3$), функция напряжения Φ , связаны со своими безразмерными аналогами по формулам: $T_i = -\Lambda E h \varepsilon^6 t_i$, $\Phi = E h R^2 \varepsilon^4 \Phi$; $\varepsilon^6 = h^2 / [12(1-\nu^2)R^2]$ – малый параметр, характеризующий относительную толщину оболочки, $\varepsilon = (\alpha E)(R/h)^2 [12(1-\nu^2)]^{1/2}$, ν – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга, Λ – искомый параметр нагружения, α – коэффициент постели винклеровского основания. Радиусы кривизны срединной поверхности оболочки R_1, R_2 , отнесенные к R , параметры Ляме A_1 и A_2 в принятой системе координат имеют вид [8]:

$$R_1 = -\frac{1}{\mu F''_{ss}}, \quad R_2 = \frac{\sqrt{1 - \mu^2 F'_s{}^2}}{1 + \mu F}, \quad A_1 = \sqrt{1 + \mu^2 (F'_s)^2}, \quad A_2 = 1 + \mu F.$$

На краях оболочки рассмотрим условия жесткого закрепления:

$$w = \frac{\partial w}{\partial s} = 0 \quad \text{при } s=0, s=l, \quad (2)$$

где $l = LR$.

Асимптотическое решение задачи (1)–(2) будем искать в виде

$$w = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j w_j(s) \sin \frac{\rho \varphi}{\varepsilon}, \quad \Phi = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \Phi_j(s) \sin \frac{\rho \varphi}{\varepsilon}, \quad (3)$$

где ρ – число волн в окружном направлении. Усилия t_i ($i=1, 2, 3$), параметр нагружения Λ представим в виде ряда по степеням ε

$$t_i = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j t_{ij}, \quad i = \overline{1..3}, \quad \Lambda = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \Lambda_j. \quad (4)$$

Радиусы кривизны срединной поверхности оболочки R_1, R_2 , параметры Ляме A_1 и A_2 разложим в ряд по степеням малого параметра μ :

$$R_1 = -\mu^{-1} / F_{ss}^* ; R_2 = 1 - \mu F + \mu^2 (F^2 - 1/2 F_s'^2) + O(\mu^3); A_2 = 1 + \mu F; A_1 = 1 + 1/2 \mu^2 F_s'^2 + O(\mu^4).$$

Полагая $2\pi/\lambda \sim 1$, имеем, что $k = \mu^{1/2} 2\pi/\lambda \sim \mu^{1/2}$. Тогда из [8] ранее полученные авторами разложения для усилий примут вид:

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{v q_{n0}}{1 - (1 - v^2) q_{n\alpha}} \left\{ 1 + O(\mu^2) \right\}, \\ t_2 &= \frac{q_{n0}}{(1 - q_{n\alpha}) [1 - (1 - v^2) q_{n\alpha}]} \left\{ 1 - q_{n\alpha} - \mu v \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \sin \frac{2\pi s}{\lambda} + O(\mu^2) \right\}, \\ t_3 &= O(\mu^2), \end{aligned} \quad (5)$$

где q_{n0} связано с давлением Q_n^* по формуле $Q_n^* = \varepsilon^6 E h q_{n0} / R$, $q_{n\alpha} = -R \alpha / (E h)$.

Для того чтобы влияние начального отклонения $F(s)$ проявлялось уже в нулевом приближении, необходимо положить $\mu = \kappa \varepsilon^2$. После всех подстановок в нулевом приближении разрешающее уравнение примет вид

$$\begin{aligned} \dot{L}_0 w_0 &\equiv \frac{1}{\rho^4} \frac{\partial^4 w_0}{\partial s^4} + \frac{2}{\rho^2} \kappa F_{ss}^* \frac{\partial^2 w_0}{\partial s^2} + \frac{2}{\rho^2} \kappa F_{sss}^* \frac{\partial w_0}{\partial s} + [\rho^4 - \Lambda_0 t_{20} \rho^2 + \\ &+ \frac{\kappa}{\rho^2} F_{ssss}^{IV} + \kappa^2 F_{ss}^{*2} + e] w_0 = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Краевые условия запишутся следующим образом:

$$w_0 = \frac{\partial w_0}{\partial s} = 0 \quad \text{при } s=0, s=l. \quad (7)$$

Полагая $\Lambda = q_{n0} / [1 - (1 - v^2) q_{n\alpha}]$, из (5), с учетом (4), имеем: $t_{20} = 1$, $t_{21} = 0$, $t_{10} = v$, $t_{30} = 0$.

Пусть Λ_0 – наименьшее положительное собственное значение краевой задачи (6)–(7). Очевидно, Λ_0 является функцией параметра ρ и может быть найдено численно, например, с использованием метода Рунге–Кутты. Из (6) и (7) можем найти искомую величину Λ_n^0 как минимум функции $\Lambda_0 = f(\rho)$, а также

число ρ_0 , при котором достигается этот минимум.

В первом приближении, с учетом введенных обозначений, разрешающее уравнение примет вид

$$L_0 w_1 = \rho^2 \Lambda_1 t_{20} w_0. \quad (8)$$

Краевые условия запишутся следующим образом:

$$w_1 = \frac{\partial w_1}{\partial s} = 0 \text{ при } s=0, s=l. \quad (9)$$

Краевая задача (8)–(9) является задачей на спектре. Условием ее разрешимости является равенство

$$\int_0^l L_0 w_1 w_0 ds = \int_0^l \rho^2 \Lambda_1 t_{20} w_0^2 ds = 0, \quad (10)$$

из которого находим, что поправка $\Lambda_1=0$. Ненулевые поправки Λ могут быть найдены из последующих приближений, однако точность исходных уравнений (1) для их определения является недостаточной.

Анализ результатов. На рис. 2 приведен график зависимости $\Lambda_0(\rho)$ для различных длин оболочек. Расчеты проводились при следующих физических и геометрических параметрах оболочки $E=2 \cdot 10^{11}$ Н/м², $h=0.004$ м, $\delta=0.0345$ м, $\nu=0.25$, $\alpha=3 \cdot 10^7$ Н/м², $R=1$ м. Из проведенных расчетов получаем, что для оболочки длиной $l=4$ (сплошная линия) $\rho_0=2.20$ и $\Lambda_0^0=11.560$, $l=3$ (штриховая линия) $\rho_0=2.21$ и $\Lambda_0^0=11.564$, а для $l=2$ (пунктирная линия) $\rho_0=2.50$ и $\Lambda_0^0=12.209$. Таким образом, увеличение длины оболочки приводит к уменьшению значения параметра ρ_0 и соответствующего значения $\Lambda_0^0 = \Lambda_0(\rho_0)$.

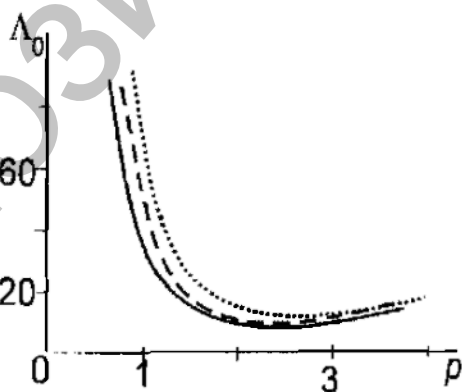


Рис. 2. Зависимость Λ_0 от параметра ρ для различных длин оболочек l при $\lambda=2$.

На рис. 3 изображены а) зависимость параметра ρ_0 и б) зависимость соответствующего значения $\Lambda_0^0 = \Lambda_0(\rho_0)$, от длины волны гофра λ для различных длин оболочек (обозначения те же). Как видно из проведенных расчетов, с увеличением длины волны гофра происходит увеличение значений параметра ρ_0 и уменьшение соответствующих значений параметра нагружения Λ_0^0 .

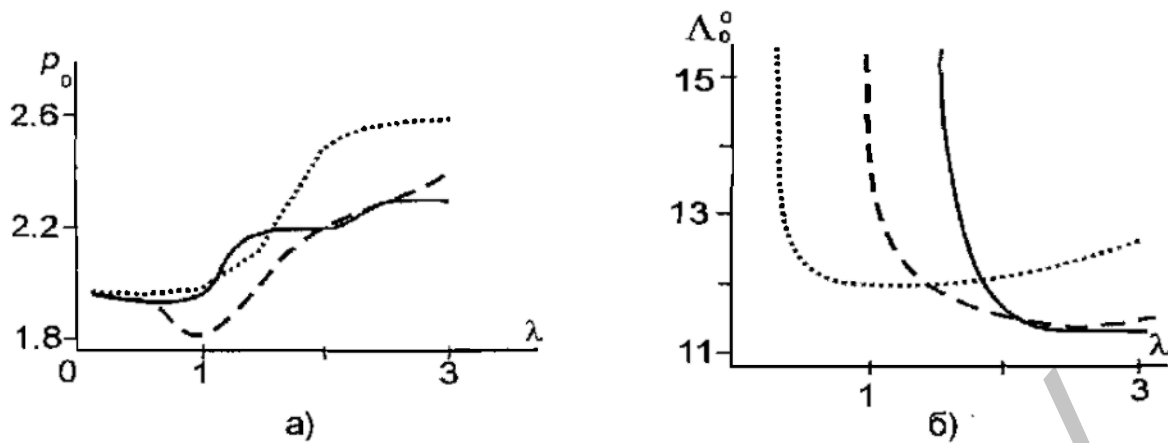


Рис. 3. Зависимость а) параметра ρ_0 и б) соответствующего ему значения Λ_0^0 от длины волны гофра λ для различных длин оболочек l .

С использованием разработанной авторами прикладной программы были проведены расчеты параметра ρ_0 и соответствующего ему параметра нагружения Λ_0^0 для гофрированной (при $\lambda=2$) и цилиндрической круговой оболочки радиуса R (при $\lambda=0$). Полученные результаты представлены в табл.

Таблица

Параметр ρ_0 и соответствующее ему значение параметра нагружения Λ_0^0 для гофрированной и цилиндрической оболочек

Длина оболочки, l	Гофрированная оболочка ($\lambda=2$)		Цилиндрическая оболочка ($\lambda=0$)	
	ρ_0	Λ_0^0	ρ_0	Λ_0^0
4	2.20	11.55	2.34	11.23
3	2.21	11.56	2.38	11.25
2	2.51	12.21	2.42	11.38

Как видно из данных, приведенных в табл., значения ρ_0 и параметра нагружения Λ_0^0 у цилиндрической и гофрированной оболочек увеличиваются при уменьшении длины оболочки l . Потеря устойчивости цилиндрической оболочки происходит при меньших значениях параметра нагружения Λ_0^0 и с образованием большего количества волн ρ_0 в окружном направлении, чем у гофрированной оболочки при тех же условиях.

Заключение. Таким образом, полученное в нулевом приближении разрешающее уравнение дает возможность численно найти значение параметра нагружения Λ_0^0 и число волн ρ_0 . Разработанная авторами прикладная программа позволяет исследовать зависимость параметра нагружения Λ_0^0 и числа волн ρ_0 от длины оболочки, длины волны гофра λ , коэффициента постели

винклеровского основания α , оптимизировать линейные размеры оболочки для получения заданных свойств. Преимуществом данного метода является возможность определения параметра нагружения Λ_0^0 и числа волн p_0 без проведения экспериментальных испытаний. Это позволяет рекомендовать применение изложенного алгоритма для расчета устойчивости тонкостенных гофрированных оболочек, используемых в строительстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Вольмир, А.С.** Устойчивость деформируемых систем / А.С. Вольмир. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
2. **Григолюк, Э.И.** Устойчивость оболочек / Э.И. Григолюк, В.В. Кабанов. – М.: Наука, 1978. – 360 с.
3. **Товстик, П.Е.** Локальная устойчивость пластин и пологих оболочек на упругом основании / П.Е. Товстик // Механика твердого тела. – 2005. – № 1. – С. 147–160.
4. **Михасев, Г.И.** Расчет на прочность и устойчивость труб большого диаметра, лежащих в грунте / Г.И. Михасев, Т.В. Никонова // Труды международной конференции по геотехнике «Взаимодействие сооружений и оснований: методы расчета и инженерная практика», Санкт-Петербург, 26–28 мая 2005 г.: в 2 т. / Петерб. гос. ун-т путей сообщения; под ред. проф. В.М. Улицкого. – СПб., 2005. – Т. 2. – С. 139–142.
5. **Корбут, Б.А.** Об одной модели заполнителя в задачах устойчивости цилиндрических оболочек / Б.А. Корбут, Ю.Н. Нагорный // Известия вузов, «Машиностроение». – 1971. – № 6. – С. 16–21.
6. **Корнев, Б.Г.** Вопросы расчета балок и плит на упругом основании / Б.Г. Корнев. – М.: Госстрой-издат., 1954. – 232 с.
7. **Товстик, П.Е.** Устойчивость тонких оболочек / П.Е. Товстик. – М.: Наука, 1995. – 320 с.
8. **Михасев, Г.И.** Оценка усилий в тонкостенной гофрированной трубе с упругим заполнителем под действием переменного давления / Г.И. Михасев, Т.В. Никонова // Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-тех. наук. – 2005. – № 4. – С. 55–60.

S U M M A R Y

The problem of stability of the thin-walled corrugated shell laying on the elastic foundation under action of uniform pressure is considered. The influence of the elastic foundation is taken into account as the additional pressure within the framework of Fuss-Winkler model. The rigid clamped conditions are considered at the edges of the shell. The obtained resolving equation with respect to a normal deflection enables to calculate the value of the load parameter Λ_0^0 and the wave number p_0 . The applied software developed by authors allows to study a dependence of the load parameter Λ_0^0 and the wave number p_0 upon the shell length, the corrugation wave length λ , as well as to optimize the shell sizes for getting of the set properties.

Поступила в редакцию 13.02.2007