МЕХАНИКА

УДК 517:531.112

РАСЧЁТ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ДВУХЗВЕННОГО МЕХАНИЗМА С ТРЕМЯ СТЕПЕНЯМИ ПОДВИЖНОСТИ

д-р техн. наук, проф. А.В. ЛОКТИОНОВ, А.В. ГУСАКОВ
(Витебский государственный технологический университет)

Представлен расчет кинематических параметров двухзвенного исполнительного механизма матричным методом. Получены аналитические зависимости для расчёта скорости и ускорения точки. Изложенная методика применима для роботов-манипуляторов с тремя степенями подвижности.

В работах [1, 2] скорость $\vec{v}$ и ускорение $\vec{a}$ в сферической системе координат определяются как частный случай их расчёта в ортогональных криволинейных координатах.

Для расчёта скорости определяются частные производные от декартовых координат x, y, z точки по соответствующим криволинейным q_1, q_2, q_3 и находятся коэффициенты Ляме H_1, H_2, H_3. Модуль скорости v точки определяется из выражения $v^2 = \dot{q}_1^2 H_1^2 + \dot{q}_2 H_2^2 + \dot{q}_3 H_3^2$.

Для расчёта ускорения также используются коэффициенты Ляме, определяются соответственно частные производные от квадрата скорости по обобщённым криволинейным скоростям $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3$ и координатам q_1, q_2, q_3 и полные производные по времени от полученных соответствующих разностей частных производных по $\dot{q}$ и q.

Такая методика расчёта кинематических параметров достаточно трудоёмка. Искомые $\vec{v}$ и $\vec{a}$ определяются только в проекциях на подвижные сферические оси координат R, φ, Θ, связанные с движущейся точкой M.

В работах [3, 4] скорость $\vec{v}$ и ускорение $\vec{a}$ получены с использованием векторного анализа. Матричное исчисление использовано в работе [3] для преобразования от прямоугольных и цилиндрических к сферическим системам координат. Такой метод изложен также в работе [5] при расчёте кинематических параметров механизма в цилиндрических координатах.

Рассмотрим матричный метод расчёта кинематических параметров двухзвенного механизма и применим изложенную методику к роботу-манипулятору с тремя степенями подвижности [6, 7].

Аналитические исследования по расчету кинематических параметров точки M (рис. 1) матричным методом выполнены для случая, когда она совпадает с началом координат $X_5\ Y_5\ Z_5$. В общем случае, который здесь не рассматривается, координаты X_5, Y_5, $Z_5 \neq 0$.

Расчётная схема исполнительного механизма представлена на рис. 1. Механизм состоит из поворотного устройства с вертикальной осью вращения (на рисунке не показана, угол поворота – φ) и двух звеньев l_1, l_2, расположенных в вертикальной плоскости Y_1OZ_1 (углы поворота звеньев – θ_1 и θ_2). Координаты точки M в неподвижной системе XYZ в рассматриваемом случае выражаются через координаты этой точки в системе $X_5Y_5Z_5$ следующим образом. Система XYZ поворотом на угол φ переводится в подвижную систему $X_1Y_1Z_1$ таким образом, что механизм размещается в вертикальную плоскость Y_1OZ_1. Следующим преобразованием переводим систему координат $X_1Y_1Z_1$ в систему $X_2Y_2Z_2$ поворотом вокруг оси OX_1 на угол θ_1. Затем, перемещая начала координат $X_2Y_2Z_2$ на длину l_1, получим систему координат $X_3Y_3Z_3$. Поворотом системы $X_3Y_3Z_3$ вокруг оси OX_3 на угол θ_2 получим систему координат $X_4Y_4Z_4$, которую перемещаем на длину l_2, и окончательно получим систему $X_5Y_5Z_5$. Для каждого поворота определяются матрицы A_{θ_1}, A_{θ_2}, A_φ, с помощью которых определяются координаты точки M. Анализом установлено, что при других способах преобразования координат усложняются матрицы перехода и, следовательно, в целом весь расчёт.

Координаты точки M в неподвижной системе XYZ в рассматриваемом случае выражаются через координаты этой точки в системе $X_5\ Y_5\ Z_5$ следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A_\varphi A_{\theta_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + A_\varphi A_{\theta_1} A_{\theta_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{pmatrix} + A_\varphi A_{\theta_1} A_{\theta_2} \begin{pmatrix} x_5 \\ y_5 \\ z_5 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Принимаем, что $x_5, y_5, z_5 = 0$ и получаем новое равенство:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A_\varphi A_{\theta_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + A_\varphi A_{\theta_1} A_{\theta_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

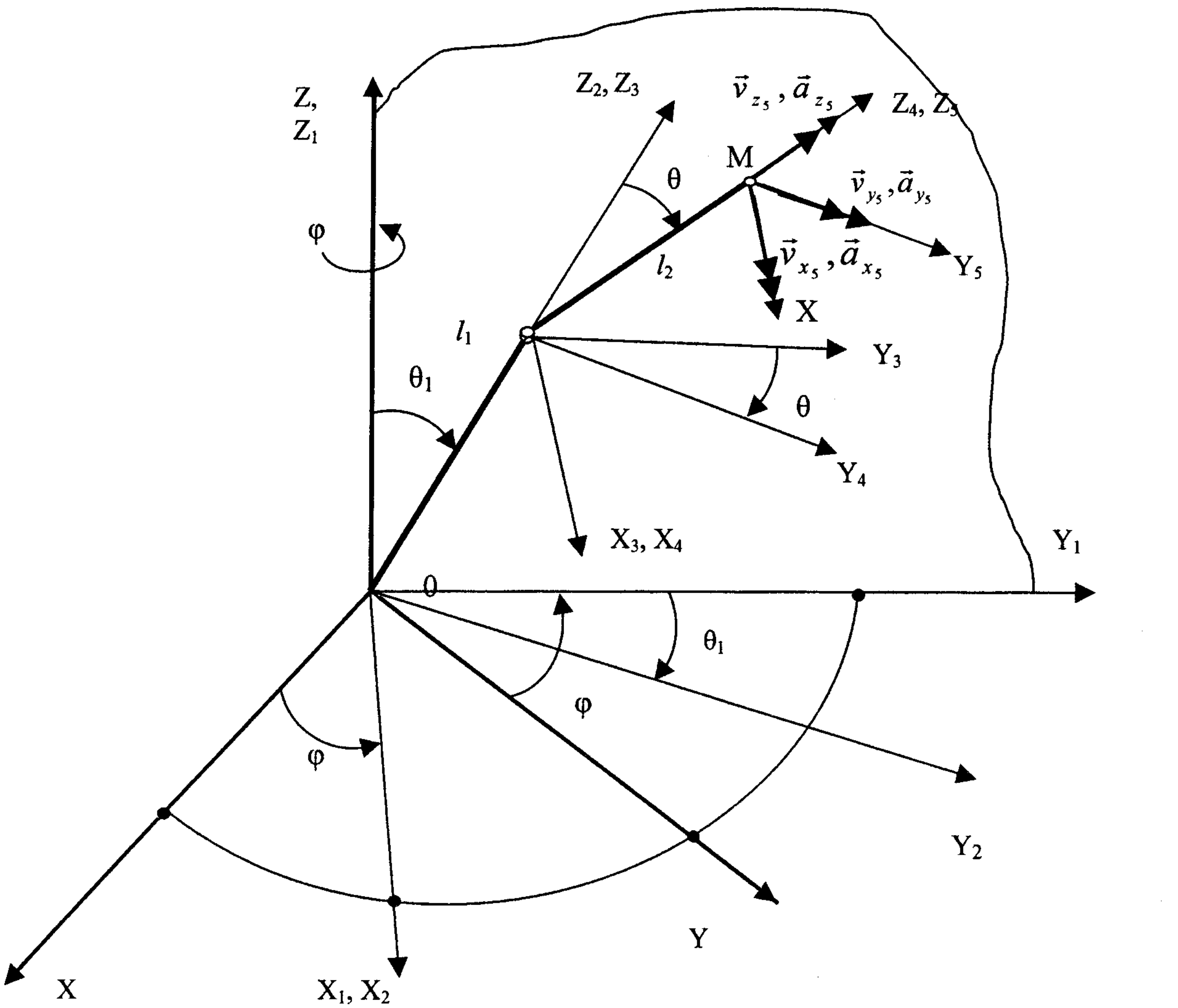

Рис. 1. Расчетная схема двухзвенного исполнительного механизма

Из формулы (2) определяются проекции вектора точки М на неподвижные оси координат XYZ, которые имеют вид

$$\begin{aligned} x_M &= -l_1 \sin\varphi \sin\theta_1 - l_2 \sin\varphi \sin(\theta_1 + \theta_2), \\ y_M &= l_1 \cos\varphi \sin\theta_1 + l_2 \cos\varphi \sin(\theta_1 + \theta_2), \\ z_M &= l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2). \end{aligned} \tag{3}$$

Вектор скорости $\vec{v}$ точки M в системе XYZ определяется дифференцированием текущих координат равенства (2) из выражения

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \dot{A}_\varphi A_{\theta_1} \dot{\varphi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + A_\varphi \dot{A}_{\theta_1} \dot{\theta}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + \left(A_\varphi \dot{A}_{\theta_1} A_{\theta_2} \dot{\theta}_1 + A_\varphi A_{\theta_1} \dot{A}_{\theta_2} \dot{\theta}_2 + \dot{A}_\varphi A_{\theta_1} A_{\theta_2} \dot{\varphi} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Из формулы (4) определяются проекции вектора скорости точки M на неподвижные оси координат XYZ, которые имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} = v_x &= -l_1\left(\cos\varphi \sin\theta_1 \dot{\varphi} + \sin\varphi \cos\theta_1 \dot{\theta}_1\right) - l_2\left(\cos\varphi \sin(\theta_1 + \theta_2)\dot{\varphi} + \sin\varphi \cos(\theta_1 + \theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\right), \\ \dot{y} = v_y &= l_1\left(-\sin\varphi \sin\theta_1 \dot{\varphi} + \cos\varphi \cos\theta_1 \dot{\theta}_1\right) + l_2\left(-\sin\varphi \sin(\theta_1 + \theta_2)\dot{\varphi} + \cos\varphi \cos(\theta_1 + \theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\right), \\ \dot{z} = v_z &= -l_1 \sin\theta_1 \dot{\theta}_1 + l_2\left(-\sin(\theta_1 + \theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Модуль скорости точки M найдётся из равенств (5) по формуле

$$v = \sqrt{l_1^2\dot\theta_1^2 + 2l_1 l_2\dot\theta_1\left(\dot\theta_1 + \dot\theta_2\right)\cos\theta_2 + l_2^2\left(\dot\theta_1 + \dot\theta_2\right)^2 + \left(l_1\dot\varphi\sin\theta_1 + l_2\dot\varphi\sin(\theta_1+\theta_2)^2\right)^2}\,. \tag{6}$$

В свою очередь вектор скорости $\vec v_M$ точки M в системе $X_5\ Y_5\ Z_5$:

$$\vec v_M = A^T\vec v, \tag{7}$$

где A^T – транспонированная матрица, равная произведению транспонированных матриц-сомножителей, взятых в обратном порядке: $A^T = A^T_{\theta_2}\ A^T_{\theta_1}\cdot A^T_\varphi$.

Векторы $\vec v$ и $\vec v_M$ в равенствах (4) и (7) представляют разложение одного и того же вектора $\vec v$ по разным базисам систем координат XYZ и $X_5\ Y_5\ Z_5$. С учётом (4) равенство (7) будет иметь вид

$$\vec v_M = A^T\dot A_\varphi A_{\theta_1}\dot\varphi\begin{pmatrix}0\\0\\l_1\end{pmatrix} + A^T A_\varphi\dot A_{\theta_1}\dot\theta_1\begin{pmatrix}0\\0\\l_1\end{pmatrix} + A^T\left(A_\varphi\dot A_{\theta_1}A_{\theta_2}\dot\theta_1 + A_\varphi A_{\theta_1}\dot A_{\theta_2}\dot\theta_2 + \dot A_\varphi A_{\theta_1}A_{\theta_2}\dot\varphi\right)\begin{pmatrix}0\\0\\l_2\end{pmatrix}. \tag{8}$$

Из формулы (8) определяются проекции вектора скорости точки M на подвижные оси координат $X_5\ Y_5\ Z_5$, которые имеют вид

$$\dot x_5 = v_{x_5} = 0,\quad \dot y_5 = v_{y_5} = l_1\dot\theta_1 + l_2\left(\dot\theta_1 + \dot\theta_2\right)\cos\theta_2,\quad \dot z_5 = v_{z_5} = l_1\dot\varphi\sin\theta_1 + l_2\dot\varphi\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)^2. \tag{9}$$

Модуль скорости точки M определяется из равенств (9) формулой (6), а направление скорости – направляющими косинусами.

Определим ускорение точки M в системе координат XYZ матричным методом. Вектор ускорения $\vec a$ точки M определится дифференцированием равенства (4):

$$\begin{aligned}\vec a = \begin{pmatrix}\ddot x\\ \ddot y\\ \ddot z\end{pmatrix} &= \left(\ddot A_\varphi A_{\theta_1}\dot\varphi^2 + \dot A_\varphi A_{\theta_1}\ddot\varphi + 2\dot A_\varphi\dot A_{\theta_1}\dot\theta_1\dot\varphi + A_\varphi\ddot A_{\theta_1}\dot\theta_1^2 + A_\varphi\dot A_{\theta_1}\ddot\theta_1\right)\begin{pmatrix}0\\0\\l_1\end{pmatrix} +\\ &+\Big(2\dot A_\varphi\dot A_{\theta_1}A_{\theta_2}\dot\theta_1\dot\varphi + 2A_\varphi\ddot A_{\theta_1}A_{\theta_2}\dot\theta_1^2 + 2A_\varphi\dot A_{\theta_1}\dot A_{\theta_2}\dot\theta_1\dot\theta_2 + A_\varphi\dot A_{\theta_1}A_{\theta_2}\ddot\theta_1 + A_\varphi A_{\theta_1}\dot A_{\theta_2}\dot\theta_2\dot\varphi +\\ &+ A_\varphi A_{\theta_1}\dot A_{\theta_2}\ddot\theta_2 + \ddot A_\varphi A_{\theta_1}A_{\theta_2}\dot\varphi^2 + \dot A_\varphi A_{\theta_1}\dot A_{\theta_2}\dot\varphi\dot\theta_2 + \dot A_\varphi A_{\theta_1}A_{\theta_2}\ddot\varphi\Big)\begin{pmatrix}0\\0\\l_2\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{10}$$

Из формулы (10) определяются проекции вектора ускорения точки M на неподвижные оси координат XYZ. Модуль ускорения точки M определяется из равенств (10) по формуле

$$a = \sqrt{\ddot x_5^2 + \ddot y_5^2 + \ddot z_5^2} = \sqrt{a_{x_5}^2 + a_{y_5}^2 + a_{z_5}^2}\,. \tag{11}$$

Значения $a_{x_5}, a_{y_5}, a_{z_5}$ приведены ниже в (13).

Вектор ускорения $\vec a_M$ точки M в системе $X_5\ Y_5\ Z_5$ (см. рис. 1):

$$\vec a_M = A^T\vec a\,. \tag{12}$$

С учётом (10) из равенства (12) получим проекции вектора ускорения точки M на подвижные оси координат $X_5\ Y_5\ Z_5$, которые имеют вид

$$\begin{aligned}\ddot x_5 &= a_{x_5} = 0,\\ \ddot y_5 &= a_{y_5} = l_1\ddot\theta_1 + l_2\left(\ddot\theta_1 + \ddot\theta_2\right)\cos\theta_2 - l_2\left(\dot\theta_1 + \dot\theta_2\right)\dot\theta_2\cos\theta_2,\\ \ddot z_5 &= a_{z_5} \doteq l_1\ddot\varphi\sin\theta_1 + l_1\dot\varphi\dot\theta_1\cos\theta +_1 l_2\ddot\varphi\sin\left(\theta_1+\theta_2\right) + l_2\dot\varphi\left(\dot\theta_1 + \dot\theta_2\right)\sin 2\left(\theta_1+\theta_2\right).\end{aligned} \tag{13}$$

Искомые кинематические параметры (9) и (13) показаны на рис. 1. Модуль ускорения точки M определяется формулой (11), а направление ускорения - направляющими косинусами.

Полученные расчётные формулы позволяют определить скорость и ускорение точки M двухзвенного исполнительного механизма с тремя степенями подвижности матричным методом. Для численного расчёта можно использовать стандартные программы вычисления произведения матриц на ЭВМ.

Пример [6, № 12.40]. Вертикальная колонна, несущая руку робота-манипулятора, может поворачиваться на угол φ. Рука со схватом состоит из двух звеньев, каждое из которых может поворачиваться на свой угол, первое звено на угол θ_1, второе – на угол θ_2. Найти скорость и ускорение центра схвата при заданных $\varphi(t)$, $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$.

Кинематическая и расчётная схема робота-манипулятора с тремя степенями подвижности изображена на рис. 2. Координаты центра схвата (точка M) в неподвижной системе координат XYZ при заданных значениях $\varphi(t)$, $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ выражаются формулой (2). Скорость и ускорения центра схвата определяются из (9) и (13).

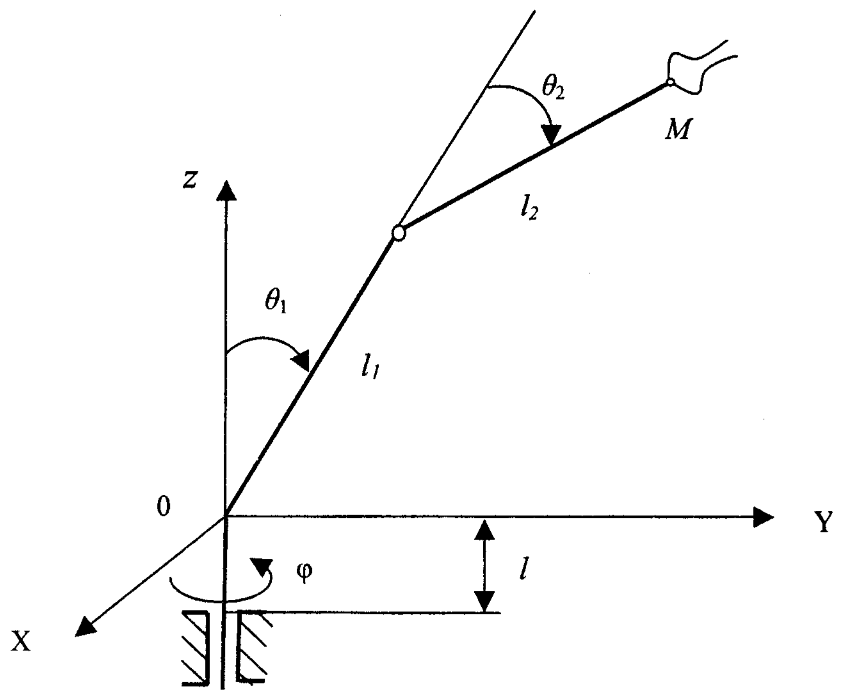

Рис. 2. Кинематическая схема робота-манипулятора с тремя степенями подвижности

При заданных $\varphi = \varphi(t)$, $\theta_1 = \theta_1(t)$, $\theta_2 = \theta_2(t)$ уравнения траектории центра схвата в параметрической форме получим из формулы [3], где роль параметра играет t. Используя транспонированную матрицу A^T, при заданных $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ получим траекторию центра схвата в подвижных координатных осях $X_5\ Y_5\ Z_5$.

Изложенную методику расчета скорости и ускорения можно использовать для двухзвенных и многозвенных исполнительных механизмов с тремя и более степенями подвижности, имеющих исходные расчетные кинематические и конструктивные параметры роботов-манипуляторов в виде $\varphi = \varphi(t)$, l_1, l_2,...l_k, $\theta_1 = \theta_1(t)$, $\theta_2 = \theta_2(t)$,),... $\theta_k = \theta_k(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутенин Н.В., ЛунцЯ.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. Т. 1. -М.: Наука, 1970.-240 с.
2. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Ч. 1. - М: Наука, 1972. - 468 с.
3. Халфман Р.Л. Динамика. - М.: Наука, 1972. - 568 с.
4. Добронравов В.В., Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. - М.: Наука, 1986. - 448 с.
5. Локтионов А.В. К вопросу расчета кинематических параметров в цилиндрических координатах. Теоретическая и прикладная механика: Сб. науч. тр. / Под ред. И.П. Филонова. - Мн.: УП «Технопринт», 2002. - С. 252.
6. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. - М.: Наука, 1986. - 448 с.
7. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах: Учеб. пособие для втузов. - М.: Наука, 1990. - Т. 1: Статика и кинематика. - 672 с.