УДК 512.542

А.М. Шмидт

О конечных группах с копростым автоморфизмом, стабилизатор которого имеет нормальную абелеву 2-подгруппу

В работе используются стандартные обозначения и терминология, которые можно найти в [1-5].

Всюду ниже X обозначает конечную группу, допускающую автоморфизм y простого порядка r, $(|X|, r) = 1$, $B = C_X(y)$.

В теореме 9 работы [5] с использованием классификации конечных простых групп доказана разрешимость группы X, у которой $B = B_2 \times B_{2'}$.

В данной статье без использования классификации конечных простых групп показывается, что если $B = B_2 \times B_{2'}$ и B_2 – абелева группа, то X – разрешимая группа 2-длины 1. При этом используется классификация конечных простых групп компонентного типа (например, [6], глава 5). Для удобства необходимые факты собраны в теореме 1.

Теорема 1. ([2], теорема 9.1.11; [7], леммы 2.2, 2.3; [8], следствия 0.3, 0.4, 0.5; [9], лемма 2.12) *Пусть* A *есть* π'*-группа автоморфизмов* π*-группы* X, *обладающей свойством* D_σ *для некоторого* $\sigma \subseteq \pi(X)$, $B = C_X(A)$. *Тогда:*

1) *по крайней мере одна* S_σ*-подгруппа из* X A*-инвариантна;*

2) *любые две* A*-инвариантные* S_σ*-подгруппы из* X *сопряжены элементами из* B;

3) *любая* A*-инвариантная* σ*-подгруппа из* X *содержится в* A*-инвариантной* S_σ*-подгруппе из* X;

4) *если* $K \triangleleft X$ *и* K – A*-инвариантная подгруппа, то* $C_{X/K}(A) = C_X(A)K/K$;

5) *если* $H \subseteq B$, *то* $N_X(H) = C_X(H)(N_X(H) \cap B)$;

6) *если* $y \in A$, $y^p = 1$ *и* H – y*-инвариантная нормальная в* X *подгруппа*, K – y*-инвариантная подгруппа в* X *и* X = HK, *то* $C_X(y) = C_H(y)C_K(y)$;

7) *если* H – A*-инвариантная подгруппа из* X, *то* $N_X(H)$ *и* $C_X(H)$ *являются* A*-инвариантными подгруппами*;

8) $X = [X, A] \cdot B$, $[X, A, A] = [X, A] \triangleleft X$; *если* $[X, X] = 1$, *то* $X = [X, A] \times B$;

9) *если* H – A*-инвариантная* S_σ*-подгруппа из* X, *то* $B \cap H$ – S_σ*-подгруппа в* B.

Лемма 1. *Пусть* X – p*-разрешимая группа*, $B = B_p \times B_{p'}$ *и* B_p – *абелева группа. Тогда* X – p*-разрешимая группа* p*-длины* 1.

Доказательство. Если $O_{p'}(X) \neq 1$, то в силу теоремы 1 к $X^* = X/O_{p'}(X)$ можно применить индукцию. Тогда X^* и X будут иметь p-длину 1.

Поэтому пусть $O_{p'}(X) = 1$. Но тогда $O_p(X) = T \neq 1$. Из p-разрешимости X следует, что X {p,q}-отделима в смысле определения 1.15.1 из [10] для любого простого делителя q числа |X|. Из теоремы 1.15.1 в [10] следует, что в X существуют холловские {p,q}-подгруппы, которые все сопряжены в X. Из леммы Фраттини тогда следует, что в X имеется y-инвариантная холловская {p,q}-подгруппа H. Если $H \subset X$, то по индукции H имеет p-длину 1. Если q пробегает все простые делители числа |H|, отличные от p, то получается, что все бипримарные pq-подгруппы из X имеют p-длину 1. Тогда из следствия 1 в [11] следует, что и X – группа p-длины 1. Поэтому пусть X = H. Но тогда X – разрешимая группа, а $B = B_p \times B_q$ – нильпотентная группа. Из абелевости B_p и теоремы 2.12 в [7] следует, что X имеет p-длину 1. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть X – конечная группа, $B = B_2 \times B_{2'}$ и B_2 – абелева группа. Тогда X – разрешимая группа 2-длины 1.*

Доказательство. Пусть $1 \neq K$ – характеристическая подгруппа в X. Предположим, что $K \subset X$. Тогда из теоремы 1 следует, что K и $X^* = X/K$ удовлетворяют условиям теоремы. Применение индукции дает нам, что K и X^* – разрешимые группы 2-длины 1. Тогда X – разрешимая группа и по лемме 1 она имеет 2-длину 1. Поэтому пусть $K = X$. В частности, $O(X) = 1$ и $O_2(X) = 1$. Поэтому X не является 2-скованной группой. Из предположения 1.24 и следствия 1.28 в [12] следует, что слой $E(X)$ группы X отличен от 1. Из $K = X$ следует, что $E(X) = K = X$ есть прямое произведение изоморфных простых неабелевых групп (в противном случае в $E(X)$ нашлась бы отличная от $E(X)$ неединичная характеристическая подгруппа). Так как $y^r = 1$, то

$$X = X_1 \times X_1^{y} \times \ldots \times X_1^{y^i}.$$

Если $i < r-1$, то для $X_0 = X_1^{y^{r-1}}$ имеем

$$X_0 \subseteq X_1 \times X_1^{y} \times \ldots \times X_1^{y^i} \subseteq C_X(X_0) = X,$$

что противоречит неабелевости X_0. Поэтому либо $i = r-1$ и y переставляет $X_1, \ldots, X_{n=r}$ транзитивно, либо $X = X_1$. Если имеет место первый случай, то из предположения 3.27 (vii) в [13] следует, что $B = C_X(y) \cong X_1$ (Тогда B состоит из элементов вида $x \cdot x^{y} \cdot \ldots \cdot x^{y^{r-1}}$, где $x \in X_1$). Это противоречит условию теоремы, что $B = B_2 \times B_{2'}$. Поэтому пусть $X = X_1$ – простая неабелева группа.

Пусть T – y-инвариантная S_2-подгруппа из X, $1 \neq H$ char T. Тогда по теореме 1 (7) и $L = N_X(H)$ есть y-инвариантная собственная подгруппа группы X. По индуктивному заключению L – разрешимя группа 2-длины 1. Так как $\Omega_1(Z(H)) = H_0$ char H, то $L \subset N_X(H_0) = L_0$. Поэтому по теореме 1 (7) и L_0 – y-инвариантная подгруппа группы X. Так как $L_0 \subset X$, то по индукции L_0 – разрешимая группа 2-длины 1. Если $O(L_0) \neq 1$, то из теоремы 1 в [14] следовало бы, что X – известная простая группа. Поэтому предположим, что $O(L_0) = 1$. Но тогда L_0 – 2-замкнутая группа. Ввиду произвольного выбора H имеем, что $C(X,T) = N_X(T) \neq X$, где $C(X,T) = \langle N(H) : 1 \neq H \text{ char } T \rangle$. Если X – группа компонентного типа, то X – известная простая группа ([6], глава 5). Если же X – группа характеристического 2-типа, то ввиду $C(X,T) \subset X$ из [15] следует, что X – известная простая группа. Значит $X \in \mathrm{Chev} \cup \{A_n \mid n \geq 5\} \cup \mathrm{Spor}$. Группы из множеств $\{A_n \mid n \geq 5\} \cup \mathrm{Spor}$ не имеют копростых автоморфизмов. Поэтому $X \in \mathrm{Chev}$. Так как копростым автоморфизмом X является полевой автоморфизм ([16], таблица 5), то из заключения (1) теоремы (9-1) в [17] следует, что B – группа лиевского типа $G(q)$, а X – группа лиевского типа $G(q^r)$, где q – степень некоторого простого числа. Из теоремы 2.13 в [12] следует, что $B \cong G(q)$. Поэтому X – не может быть простой группой. Противоречие. Теорема доказана.

В заключение выражаю признательность своему научному руководителю профессору Э.М. Пальчику за постоянное внимание к моей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Huppert B.*** Endliche Gruppen, I. Berlin: Springer-Verlag, 1967.
2. ***Huppert B., Blackburn N.*** Finite groups, II. – Berlin: Springer-Verlag, 1982.
3. ***Huppert B., Blackburn N.*** Finite groups, III. – Berlin: Springer-Verlag, 1982.
4. ***Холл М.*** Теория групп. М.: ИЛ, 1962
5. ***Гарист Ю.Э., Пальчик Э.М.*** О конечных группах, допукскающих копростой автоморфизм // Вопросы алгебры. Гомель: Издательство Гомельского Государственного университета, 1997. Вып. 11. С. 20-26.

6. ***Gorenstein D.*** The classification of finite simple groups. Vol.1 : Groups of noncharacteristic 2 type. New York, London: Plenum Press, 1983.
7. ***Rickman B.*** Groups wich admitt a fixed-point-free automorphism of order p^2 // J.Algebra. 1979. Vol 59. № 1. P. 77 – 171.
8. ***Гаген Т.М.*** Некоторые вопросы теории конечных групп. // В кн. «К теории конечных групп». М.: Мир, 1979. С. 13-97.
9. ***Глауберман Дж.*** О разрешимых сигнализаторных функторах на конечных группах // В кн. «К теории конечных групп». М.: Мир, 1979. С. 112-143.
10. ***Чунихин С.А.*** Подгруппы конечных групп. Мн.:Наука и техника, 1964.
11. ***Ведерников В.А.*** О конечных группах с данными бипримарными подгруппами // В кн. «Конечные группы». Мн.: Наука и техника, 1975. С. 24-29.
12. ***Горенстейн Д.*** Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир, 1985.
13. ***Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.*** The classification of finite simple groups // Math. Surveys and monographs, V. 40, N 2, Providence, RJ: AMS, 1994/
14. ***Walter J.H.*** The B-conjecture: characterization of Chevalley groups // Memoirs AMS, 1986. V.61. N 3. P.1-196.
15. ***Solomon R.*** Some results on standard blocks // "Santa-Cruz Conf. finite groups. Santa Cruz, Calif., 1979". Proc. Sumpos. pure math., 1980. V.37. P.43-46.
16. ***Conway J., Curtis R., Norton S., Parker R., Wilson R.*** Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
17. ***Gorenstein D., Lyons R.*** The local structure of finite groups characteristic 2 type // Memoirs AMS.1983, N 276.

S U M M A R Y

The paper proveds the following theorem: Let X be a finite group admitting automorphism y of order r, $(|X|,r) = 1$, $B = C_X(y) = B_2 \times B_{2'}$ and B_2 – Abelian group. Then X is solvable group 2-length 1.

Поступила в редакцию 25.01.2001