УДК 512.542

А.М. Шмидт

О конечных разрешимых группах с копростым автоморфизмом

Цель этой работы состоит в том, чтобы ослабить условие теоремы 5 из работы [1] и доказать, что ее заключение остается справедливым, если *y*-инвариантную силовскую *p*-подгруппу заменить произвольной *y*-инвариантной *p*-подгруппой.

Отметим, что здесь используются стандартные обозначения и терминология, которые можно найти в источниках [1-4].

Следует также отметить, что фигурирующая в [1] группа типа (2,p,k,c) имеет порядок $2^{2k+1}p^{2c}$, если ее экстраспециальная силовская 2-подгруппа *T* неизоморфна Q_8. Именно в этом случае *T* имеет нормальную элементарную абелеву подгруппу E порядка 4, существование которой используется в последнем абзаце доказательства теоремы 5 из [1].

Для удобства дадим следующее определение.

Определение. *Пусть* H – *конечная группа, обладающая свойствами*:

1) $|H| = 2^{2k+1}p^c$, $p \neq 2$, $Z(H) = \Phi(H) = 1$;
2) S_p-*подгруппа* P *из* H *нормальна и самоцентрализуема в* H;
3) S_2-*подгруппа* T *из* H *является экстраспециальной с* $C_H(T) = Z(T)$; *если подгруппа* T *неизоморфна* Q_8, *то* c – *четно.*

Тогда назовем H группой типа (p,2,k,c). ♦

Если конечная группа X допускает автоморфизм y простого порядка r, $(|X|, r) = 1$, $C = C_X(y)$, а A и B – y-инвариантные подгруппы из X, причем $A \lhd B$, то $B/A = B^*$ назовем y-инвариантной секцией группы X.

Будем говорить, что группа X имеет y-инвариантную секцию H* типа (p,2,k,c), если выполняются следующие условия:

(I) H* -- группа типа (p,2,k,c);
(II) в группе $H^*\lambda\langle y\rangle$ ее S_p-подгруппа P* является минимальной нормальной подгруппой;
(III) Z(T*) есть наибольшая собственная y-инвариантная подгруппа в S_2-подгруппе T* из H*;
(IV) $|C_{H^*}(y)| = |Z(T^*)| = 2$, $r = 2^k+1$.

Используемые ниже свойства y-инвариантных групп хорошо известны и собраны в теореме 1 из [2].

Теорема. *Пусть* X – *конечная разрешимая группа, допускающая автоморфизм* y *простого порядка* r, $(|X|, r) = 1$, $C = C_X(y)$. *Пусть* $1 \neq P$ *есть* y-*инвариантная* p-*подгруппа из* X *и* $C \subseteq N_X([P, y])$. *Пусть также выполняется одно из следующих условий*:

(I) $p > 2$;
(II) $p = 2$, *но* 2 *не делит* $|C|$;
(III) $p = 2$, 2 *делит* $|C|$, *но* X *не имеет* y-*инвариантных секций типа* (p,2,k,c).

Тогда $[P, y] \lhd\lhd X$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть X – контрпример минимального порядка. Предположим, что X не имеет y-инвариантных секций типа (p,2,k,c).

Предположим, что существуют различные простые делители q и s числа $|X|$, отличные от p. Тогда в X существуют y-инвариантные холловские q'- и s'- подгруппы A и B (см. теорему 1 из [2]). Ясно, что $AB = X$, а $|X_p|$ делит $A \cap B$. Из теоремы 1(3) из [2] известно, что P можно выбрать так, что $P \subseteq A \cap B$. Применение индукции к A и B дает нам, что $[P, y] \lhd\lhd A$ и $[P, y] \lhd\lhd B$. Тогда из известной теоремы Виландта следует, что $[P, y] \lhd\lhd X$.

Поэтому впредь можно считать, что только $q \neq p$ делит $|X|$, $X = P_0Q$, где P_0 и Q есть y-инвариантные силовские p- и q-подгруппы, причем можно считать, что $P \subseteq P_0$.

Предположим, что $O_p(X) = T \neq 1$. Тогда группа $X^* = X/T$ удовлетворяет условиям теоремы (см. теорему 1 из [2]). Применение индукции к X^* дает нам, что $[P^*, y] \lhd\lhd X^*$. Так как $[P^*, y]$ есть p-грkппа, то определение группы $O_p(X) = T$ дает нам, что $[P^*, y] = 1$, то есть $[P, y] \subseteq T$ и все доказано.

Поэтому впредь можно считать, что $O_p(X) = 1$. Из разрешимости группы X тогда следует, что $O_q(X) = H \neq 1$. Группа $X^{**} = X/H$ удовлетворяет условиям теоремы (см. теорему 1 из [2]). Применение индукции к X^{**} дает нам, что $[P, y]H/H \lhd\lhd X/H$. Тогда $[P, y]H \lhd\lhd X$. Предположим, что $[P, y]H \subset X$. Так как $[P, y]H$ является y-инвариантной подгруппой в X, то по индукционному заключению $[P, y] \lhd\lhd [P, y]H \lhd\lhd X$ и все доказано. Поэтому $[P, y]H = X$. Но тогда $[P, y]$ – есть силовская p-подгруппа в X. Теперь утверждение следует из теоремы 5 в [1].

Теорема полностью доказана.

В заключение выражаю признательность своему научному руководителю профессору Пальчику Э.М. за постоянное внимание к моей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Пальчик Э.М., Гарист Ю.Э.*** О конечных группах, допукскающих автоморфизм простого порядка. // Вопросы алгебры. Гомель,1996. Вып. 9. С. 75-82.
2. ***Шмидт А.М.*** О конечных группах с копростым автоморфизмом, стабилизатор которого имеет нормальную абелеву 2-подгруппу // Веснік Віцебскага дзяржаўнага універсітэта, 2001, №1. С. 69-71.
3. ***Гарист Ю.Э., Пальчик Э.М.*** О конечных группах, допускающих копростой автоморфизм // Вопросы алгебры. Гомель, 1997. Вып. 11. С. 20-26.
4. ***Huppert B.*** Endliche Gruppen, I. Berlin: Springer-Verlag. 1967. – 793 S.

S U M M A R Y

In the papers is proved the following theorem:

Let X *be a finite solvable group admitting automorphism* y *of order* r, $(|X|,r) = 1$, $C = C_X(y)$. Let $1 \neq P$ *is* y*-invariant* p*-subgroup of* X *and* $C \subseteq N_X([P, y])$. *Let one of the following holds:*

(I) $p > 2$;

(II) $p = 2$, *bat* 2 *not divided* $|C|$;

(III) $p = 2$, *bat* 2 *divided* $|C|$, *bat* X *has not* y*-invariant section type* (p,2,k,c).

Then $[P, y] \lhd\lhd X$.

Поступила в редакцию 9.01.2002