

тора при наличии линейных сил сопротивления под действием произвольно изменяющейся со временем возмущающей силы. В результате находится частотная передаточная функция. В физике она называется функцией реакции.

Этот пример позволяет обсудить актуальную задачу о линейном отклике (реакции) не только механической системы но и термодинамической системы на действие возмущающей силы. В итоге студенты получают начальные представления о так называемой теории реакции, играющей важную роль в современной статистической механике неравновесных процессов.

Анализ этого примера приводит к необходимости рассмотреть теорему о свертке двух функций и ее преобразование Фурье. Кроме того вводится понятие о δ -функции и показывается, что функция реакции описывает смещение осциллятора при действии δ -образной возмущающей силы.

Большое внимание уделяется корреляционной теории случайных функций и, в частности, подробно рассматриваются стационарные случайные

функции. Здесь анализируются наиболее часто встречающиеся модели корреляционных функций: чисто экспоненциальная функция и функции гармонического типа, модулируемые экспонентой.

Изучается также спектральная теория корреляционных функций, причем изложение сопровождается подробным расчетом спектральных плотностей для введенных ранее моделей корреляционных функций. Рассматривается понятие о белом шуме и с помощью δ -функции определяется вид соответствующей корреляционной функции.

В заключении курса рассматривается определение корреляционных функций по результатам опытов в случае стационарного случайного процесса.

Можно надеяться, что предложенный курс будет иметь важное значение не только при подготовке инженеров-механиков лесного комплекса, но и при обучении специалистов других направлений. Кроме того, рассматриваемый курс усиливает фундаментальную подготовку инженеров и демонстрирует большое прикладное значение фундаментальных наук.

РАСЧЕТ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ В СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ МАТРИЧНЫМ МЕТОДОМ

Локтионов А.В.

Analytical dependencies for calculating speed and acceleration of the point are obtained by matrix method. The given methodology is used for robots—manipulators working in spherical system of coordinates.

В работах [1, 2] скорость \vec{v} и ускорение \vec{a} в сферической системе координат определяются как частный случай их расчета в ортогональных криволинейных координатах. Для расчета скорости определяются частные производные от декартовых координат x, y, z точки по соответствующим криволинейным q_1, q_2, q_3 и находятся коэффициенты Ляме H_1, H_2, H_3 . Модуль скорости v точки определяется из выражения $v^2 = \dot{q}_1^2 H_1^2 + \dot{q}_2^2 H_2^2 + \dot{q}_3^2 H_3^2$.

Для расчета ускорения также используются коэффициенты Ляме, определяются соответственно частные производные от квадрата скорости по обобщенным криволинейным скоростям $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3$ и координатам q_1, q_2, q_3 и полные производные по времени от полученных соответствующих разностей частных производных по \dot{q} и q .

Такая методика расчета кинематических параметров достаточно трудоемка. Искомые \vec{v} и \vec{a} определяются только в проекциях на подвижные сферические оси координат R, φ, Θ связанные с движущейся точкой М.

В работах [3, 4] скорость \vec{v} и ускорение \vec{a} получены с использованием векторного анализа. Матричное исчисление использовано в работе [3] для преобразования от прямоугольных и цилиндрических к сферическим системам координат.

Рассмотрим матричный метод расчета кинематических параметров в сферических координатах и применим изложенную методику к роботу-манипулятору с тремя степенями подвижности [5, 6].

Аналитические исследования по расчету кинематических параметров точки М (рис. 1, а) матричным методом выполнены для случая, когда она совпадает с началом координат X_R, Y_φ, Z_Θ . В общем случае, который здесь не рассматривается, координаты $X_R, Y_\varphi, Z_\Theta \neq 0$.

В прямоугольной неподвижной системе координат xyz положение вектора \vec{r} (рис. 1) определяется текущими координатами x, y, z точки М. В сферической подвижной системе координат положение точки М определяется расстоянием R , углом φ и углом Θ . Введем также подвижные системы координат $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$, начало которых находится в точке О. Указанные на рисунке 1, а, б, в системы координат составляют между собой углы, косинусы которых образуют матрицы A_φ, A_Θ . Проекция абсолютной скорости \vec{v} и ускорения \vec{a} точки М определены как на неподвижные оси координат xyz , так и на подвижные сферические оси координат $X_R, Y_\varphi, Z_\Theta (R, \varphi, \Theta)$.

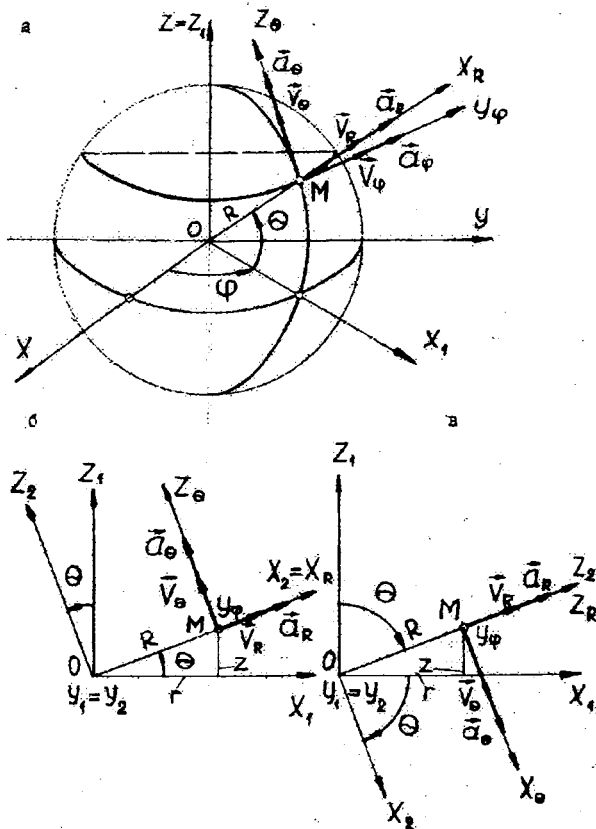


Рис. 1. Расчетная схема для определения кинематических параметров в сферической системе координат

Координаты точки М в неподвижной системе x, y, z в рассматриваемом случае выражается через координаты этой точки в системе X_R, Y_φ, Z_Θ следующим образом

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A_\varphi A_\Theta \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + A_\varphi A_\Theta \begin{pmatrix} x_R \\ y_\varphi \\ z_\Theta \end{pmatrix} \quad (1)$$

Вектор скорости \vec{v} точки М в системе x, y, z определяется дифференцированием текущих координат равенства (1) из выражения

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = (\dot{A}_\varphi A_\Theta \dot{\varphi} + A_\varphi \dot{A}_\Theta \dot{\Theta}) \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + A_\varphi A_\Theta \begin{pmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{y}_\varphi \\ \dot{z}_\Theta \end{pmatrix} \quad (2)$$

Из формулы (2) определяются проекции вектора скорости точки М на неподвижные оси координат x, y, z , которые имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x} = v_x &= \dot{R} \cos \varphi \cos \Theta - R \dot{\varphi} \cos \Theta \sin \varphi - R \dot{\Theta} \cos \varphi \sin \Theta; \\ \dot{y} = v_y &= \dot{R} \sin \varphi \cos \Theta + R \dot{\varphi} \cos \Theta \cos \varphi - R \dot{\Theta} \sin \varphi \sin \Theta; \\ \dot{z} = v_z &= \dot{R} \sin \Theta + R \dot{\Theta} \cos \Theta. \end{aligned} \quad (3)$$

Модуль скорости точки М найдется из равенств (3) по формуле

$$v = \sqrt{\dot{R}^2 + R^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \Theta + R^2 \dot{\Theta}^2}. \quad (4)$$

В свою очередь вектор скорости \vec{v}_M точки М в системе X_R, Y_φ, Z_Θ (R, φ, Θ)

$$\vec{v}_M = A^T \vec{v}, \quad (5)$$

где A^T — транспонированная матрица, равная произведению транспонированных матриц-множителей, взятых в обратном порядке: $A^T = A_\Theta^T \cdot A_\varphi^T$.

Векторы \vec{v} и \vec{v}_M в равенствах (2) и (5) представляют разложение одного и того же вектора \vec{v} по разным базисам систем координат x, y, z и X_R, Y_φ, Z_Θ . С учетом (2) равенство (5) будет иметь вид

$$\vec{v}_M = (A^T \dot{A}_\varphi A_\Theta \dot{\varphi} + A^T \dot{A}_\Theta \dot{\Theta}) \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{R} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Из формулы (6) определяются проекции вектора скорости точки М на подвижные сферические оси координат X_R, Y_φ, Z_Θ , которые имеют вид

$$\dot{x}_R = v_R = \dot{R}; \quad \dot{y}_\varphi = v_\varphi = R \dot{\varphi} \cos \Theta; \quad \dot{z}_\Theta = v_\Theta = R \dot{\Theta} \quad (7)$$

Модуль скорости точки М определяется из равенств (7) формулой (4), а направление скорости — направляющими косинусами.

Определим ускорение точки М в сферической системе координат матричным методом. Вектор ускорения \vec{a} точки М в системе x, y, z определится дифференцированием равенства (2)

$$\begin{aligned} \vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} &= [(\ddot{A}_\varphi \dot{\varphi}^2 + \dot{A}_\varphi \ddot{\varphi}) A_\Theta + \\ &+ 2 \dot{A}_\varphi \dot{A}_\Theta \dot{\varphi} \dot{\Theta} + A_\varphi (\ddot{A}_\Theta \dot{\Theta}^2 + \dot{A}_\Theta \ddot{\Theta})] \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \\ &+ 2 (\dot{A}_\varphi A_\Theta \dot{\varphi} + A_\varphi \dot{A}_\Theta \dot{\Theta}) \begin{pmatrix} \dot{R} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + A_\varphi A_\Theta \begin{pmatrix} \ddot{R} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8)$$

Из формулы (8) определяются проекции вектора ускорения точки М на неподвижные оси координат x, y, z , которые для краткости записи с учетом полученных ниже формул (12) имеют вид

$$\begin{aligned} a_x &= \ddot{x}_R \cos \varphi \cos \Theta - \ddot{y}_\varphi \sin \varphi - \ddot{z}_\Theta \cos \varphi \sin \Theta; \\ a_y &= \ddot{x}_R \sin \varphi \cos \Theta + \ddot{y}_\varphi \cos \varphi - \ddot{z}_\Theta \sin \varphi \sin \Theta; \\ a_z &= \ddot{x}_R \sin \Theta + \ddot{z}_\Theta \cos \Theta. \end{aligned} \quad (9)$$

Модуль ускорения точки М определяется из равенств (9) по формуле

$$a = \sqrt{\ddot{x}_R^2 + \ddot{y}_\varphi^2 + \ddot{z}_\Theta^2} = \sqrt{a_R^2 + a_\varphi^2 + a_\Theta^2}. \quad (10)$$

Значения a_R, a_φ, a_Θ приведены ниже в (12).

Вектор ускорения \vec{a}_M точки М в системе X_R, Y_φ, Z_Θ (R, φ, Θ , см. рис. 1) $\vec{a}_M = A^T \vec{a}$. (11)

С учетом (8) из равенства (11) получим проекции вектора ускорения точки М на подвижные сферические оси координат $X_R Y_\varphi Z_\Theta$, которые имеют вид

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= a_R = \ddot{R} - R\dot{\Theta}^2 - R\dot{\varphi}_2 \cos^2 \Theta; \\ \ddot{y}_\varphi &= a_\varphi = R\ddot{\varphi} \cos \Theta + 2(\dot{R} \cos \Theta - R\dot{\Theta} \sin \Theta)\dot{\varphi}; \\ \ddot{z}_\Theta &= a_\Theta = R\ddot{\Theta} + R\dot{\varphi}^2 \cos \Theta \sin \Theta + 2\dot{R}\dot{\Theta}.\end{aligned}\quad (12)$$

Искомые кинематические параметры (7) и (12) показаны на рис. 1, а, б. Модуль ускорения точки М определяется формулой (10), а направление ускорения — направляющими косинусами.

В тех механических задачах, где ось Z является осью симметрии, угол Θ удобно отсчитывать вниз от положительного направления оси Z (рис. 1, в).

Для рис. 1, в равенство (1) имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A_\varphi A_\Theta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix} + A_\varphi A_\Theta \begin{pmatrix} x_\Theta \\ y_\varphi \\ z_R \end{pmatrix}\quad (13)$$

Сохраняется матрица A_φ . Матрица A_Θ по рис. 1, в получается транспонированием матрицы A_Θ по рис. 1, б относительно главной диагонали.

Формулы для расчета скорости и ускорения по рис. 1, в имеют соответственно вид (2), (6) и (8), (11). В соответствии с (13) в них видоизменяется запись столбцевых матриц.

Применительно к рис. 1, в формулы (3), (4), (7), (12) имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v_x = R\dot{\Theta} \cos \varphi \cos \Theta - R\dot{\varphi} \sin \Theta \sin \varphi + \dot{R} \cos \varphi \sin \Theta; \\ \dot{y} &= v_y = R\dot{\Theta} \sin \varphi \cos \Theta + R\dot{\varphi} \sin \Theta \cos \varphi - \dot{R} \sin \varphi \sin \Theta; \\ \dot{z} &= v_z = -R\dot{\Theta} \sin \Theta + \dot{R} \cos \Theta;\end{aligned}\quad (14)$$

$$v = \sqrt{R^2 \dot{\Theta}^2 + R^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \Theta + \dot{R}^2};\quad (15)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_\Theta = v_\Theta &= R\dot{\Theta}; \quad \dot{y}_\varphi = v_\varphi = R\dot{\varphi} \sin \Theta; \\ \dot{z}_R &= v_R = \dot{R}\end{aligned}\quad (16)$$

$$\begin{aligned}a_x &= \ddot{x}_\Theta \cos \varphi \cos \Theta - \ddot{y}_\varphi \sin \varphi + \ddot{z}_R \cos \varphi \sin \Theta; \\ a_y &= \ddot{x}_\Theta \sin \varphi \cos \Theta + \ddot{y}_\varphi \cos \varphi + \ddot{z}_R \sin \varphi \sin \Theta; \\ a_z &= -\ddot{x}_\Theta \sin \Theta + \ddot{z}_R \cos \Theta.\end{aligned}\quad (17)$$

$$\ddot{x}_\Theta = a_\Theta = R\ddot{\Theta} + 2\dot{R}\dot{\Theta} - R\dot{\varphi}^2 \sin \Theta \cos \Theta;$$

$$\ddot{y}_\varphi = a_\varphi = R\ddot{\varphi} \sin \Theta + 2(\dot{R} \sin \Theta - R\dot{\Theta} \cos \Theta)\dot{\varphi};\quad (18)$$

$$\ddot{z}_R = a_R = \ddot{R} - R\dot{\Theta}^2 - R\dot{\varphi}^2 \sin^2 \Theta.$$

Искомые кинематические параметры (16) и (18) показаны на рис. 1, в. Модуль ускорения точки М найдется из (18) по формуле

$$a = \sqrt{\ddot{x}_\Theta^2 + \ddot{y}_\varphi^2 + \ddot{z}_R^2} = \sqrt{a_\Theta^2 + a_\varphi^2 + a_R^2}.\quad (19)$$

Полученные расчетные формулы позволяют определить скорость и ускорение точки М в сферических координатах матричным методом. Для численного расчета можно использовать стандартные программы вычисления произведения матриц на ЭВМ.

Пример (№ 12.39 [5]). Вертикальная колонна, несущая руку робота-манипулятора, может поворачиваться на угол φ . Рука со схватом поворачивается на угол Θ и выдвигается на расстояние R. Найти скорость и ускорение центра схвата при заданных $R(t)$, $\varphi(t)$, $\Theta(t)$.

Кинематическая и расчетная схема для робота-манипулятора с тремя степенями подвижности, работающего в сферической системе координат, изображена на рис. 2. Координаты центра схвата (точка М) в неподвижной системе координат x, y, z при заданных $R(t)$, $\varphi(t)$, $\Theta(t)$ выражаются формулой (13).

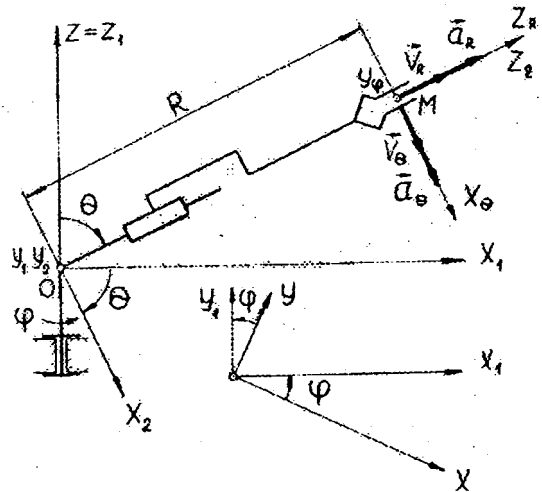


Рис. 2. Кинематическая схема робота-манипулятора с тремя степенями подвижности, работающего в сферической системе координат

Скорость и ускорения центра схвата определяются из (15) и (19).

При заданных $R(t)$, $\varphi(t)$, $\Theta(t)$ уравнения траектории центра схвата в параметрической форме получим из формулы (13), где роль параметра играет время t . Они имеют вид

$$x = R \sin \Theta \cos \varphi, \quad y = -R \sin \Theta \sin \varphi, \quad z = R \cos \Theta.\quad (20)$$

При заданных $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ уравнения траектории центра схвата в параметрической форме, используя транспонированную матрицу A^T , получим из формулы (13). Они имеют вид

$$\begin{aligned}R &= x \cos \varphi \sin \Theta + y \sin \varphi \sin \Theta + z \cos \Theta, \\ \varphi &= \arctg(y/x), \\ \Theta &= \arctg\left(\sqrt{x^2 + y^2}/z\right)\end{aligned}\quad (21)$$

Уравнения (20) и (21) позволяют построить траекторию центра схвата как при заданных $R(t)$, $\varphi(t)$, $\Theta(t)$, так и при $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$.

Изложенную методику расчета скорости и ускорения следует использовать для роботов-манипуляторов, работающих в сферической системе координат.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики, том I. — М.: Наука, 1970. с. 240.
2. Бухгольц Н.Н. Основы курса теоретической механики, ч. I. — М.: Наука, 1972, с. 468.
3. Халфман Р.Л. Динамика. — М.: Наука, 1972. — с. 568.
4. Добронравов В.В., Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. — М.: Наука, 1986. — с. 448.
5. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. — М.: Наука, 1986. — с. 448.
6. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах: Учеб. пособие для вузов. Т.1. Статика и кинематика. — М.: Наука, 1990. — с. 672.

ПРИМЕНЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

Кравчук А.С., Иванова Е.Б.

Some problems of construction of the automatized training system (ATS) of applied mechanics are touched in this article.

The ATS consists of two information blocks: an electronic directory and control-checking system. The electronic directory includes some amount of numbered contexts. Questions of a different level of difficulty form this testing system. Question's selection is realized with the help of randomizing. All questions have different levels of difficulty, that are defined by the methods of the theory of Graphs. A final test evaluation is constructed by the methods of Mathematical Statistics. The results of any tests are recorded in the special form and saved in the fail.

The software of the set exploitation is based on the complex of programs, that allow to view the electronic directory, to make tests in different ways and to analyze final evaluations. Service routines ensure the modification of tests base and a convenient interface for users. System test running showed that it provides gaining accessible and high quality knowledge on the subject.

The set system needs some further development in the field of test methods and evaluation criteria forming. The ATS can be consider as a part of the electronic teaching complex.

Современный уровень информатизации образования позволяет усовершенствовать и модернизировать образовательную систему. Этот процесс сопровождается:

- использованием новых возможностей представления информации — комбинацией текста, графических изображений, анимации, звука, видеофрагментов;

- доступом к большим объемам информации не только в традиционном печатном виде, но и, благодаря сети *Internet*, к большим интеллектуальным ресурсам;

- внедрением новых форм учебных занятий — электронных учебных курсов, которые представляют собой учебные материалы, структурированные особым образом, записанные на магнитные носители и доступные через локальную или глобальную сеть.

Основой информатизации образования является массовое использование информационных компьютерных технологий (ИКТ), которое, в конечном итоге, должно обеспечить получение доступного и качественного образования.

Программное обеспечение ИКТ включает в себя: обучающие системы, информационно-поисковые системы, моделирующие программы, микромиры и инструментальные средства создания новых электронных ресурсов.

В настоящее время во многих учебных заведениях в рамках модульно-рейтингового подхода к обучению [1] разрабатываются и используются автоматизированные обучающие системы (АОС) по различным учебным предметам. Наиболее распространены АОС по естественно-научным и техническим дисциплинам.

Процесс подготовки дипломированных специалистов по различным специальностям регламентируется требованиями государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования. Поэтому содержание и объем учебного курса одной и той же дисциплины по различным специальностям различаются. Это приводит к необходимости разработки собственных компьютерных учебных курсов (в т.ч. АОС) для каждой специальности.

Разработанная по дисциплине «Прикладная механика» АОС используется при обучении студентов