$f(z)+\frac{1}{z}$ не отрицательна, то уравнение (1) не имеет предельных циклов.

Литература:

1. **Немыцкий В. В., Степанов В. В.** Качественная теория дифференциальных уравнений.

Е. Г. САДОВНИКОВ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ОСОБЫХ ТОЧЕК ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В работе рассматривается уравнение

$$y'=f(x,y)\,f_1\left(\frac{yf_3(x,y)}{x}\right)\cdot f_2\left(\frac{yf_4(x,y)}{x}\right). \qquad (1)$$

Предполагается, что выполнены следующие условия:

1) $f(x,y)$ — непрерывно дифференцируемая положительная функция;

2) $f_3(x,y)$ и $f_4(x,y)$ — непрерывно дифференцируемые функции, не равные нулю при $y\neq 0$;

3) функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ непрерывны вместе с производными первого порядка за исключением конечного числа точек $z_1, z_2, \dots z_n$, в которых они имеют двусторонние бесконечные разрывы, причем в окрестности точек разрыва функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ монотонны справа и слева;

4) имеется конечное число изоклин бесконечности;

5) начало координат является единственной особой точкой уравнения (1).

Метод исследования основан на рассмотрении линий $\frac{yf_3(x,y)}{x}=c$.

Если $f_3(0,0)\neq 0$ и $f_4(0,0)\neq 0$, то мы рассматриваем уравнение.

$$f(0,0)\cdot f_1(kf_3(0,0))\cdot f_2(kf_4(0,0))-k=0. \qquad (2)$$

Если предположить, что уравнение (2) имеет конечное число действительных корней, то интегральные кривые уравнения (1) входят в начало координат, касаясь в начале координат лучей $y=kx$, где k удовлетворяет уравнению (2).

Если k_0 является корнем уравнения (2) и производная по k от левой части уравнения (1) не положительна вблизи точки k_0, то в начало координат входит единственная интегральная кривая уравнения, касающаяся в начале координат луча $y=k_0x$.

Во всех остальных случаях в начало координат входит бесконечно много интегральных кривых уравнения (1), касающихся в начале координат луча $y=k_0x$.

Если сегмент $[k_1, k_2]$ не содержит корней уравнения (2), то в секторе, заключенном между лучами $y=k_1x$ и $y=k_2x$, в начало координат не входит ни одна интегральная линия уравнения (1).

Если $f_2(0,0) \neq 0$ или $f_4(0,0) \neq 0$, то для исследования уравнения (1) надо рассматривать изоклины бесконечности, а также корни уравнения (2). Каждую изоклину бесконечности заключаем в достаточно узкую область, в которой правая часть уравнения (1) сохраняет знак. Тогда в такой области в начало координат входит: одна, бесконечно много интегральных кривых или ни одной интегральной кривой, что зависит от знака правой части уравнения (1) и расположения изоклины бесконечности. Рассматривая все изоклины бесконечности и все корни уравнения (2), мы можем установить топологическую картину расположения интегральных кривых уравнения (1) в окрестности изолированной особой точки.

Литература:

1. **Немыцкий В. В.; Степанов В. В.** Качественная теория дифференциальных уравнений.