Возвращаясь к прежним переменным, получим решение уравнения (1)

$$v(r,\Theta)=\frac{a^3\omega\cdot\sin\Theta}{r^2}+\varepsilon\frac{a^3\omega}{r^2}\sum_{n=1}^{\infty}C_n\left(\frac{a}{r}\right)^{n-1}P_n^1(\cos\Theta);$$

где $C_n$ определяются из равенства (6).

Для поддержания вращения сферы необходимо к ней приложить вращающий момент $M$.

$$P_{r\varphi}=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}\right)\Bigg|_{r=a+a\varepsilon f}=-3\mu\omega\sin\Theta-\varepsilon\mu\omega\left[-9f\sin\Theta+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}C_n(n+2)\;P^1{}_n(\cos\Theta)\right].$$

Здесь $P_{r\varphi}$ — составляющая тензора напряжений, $\mu$—кинематический коэффициент вязкости.

$$M=-2\pi a^3\int_0^{\pi}P_{r\varphi}(1+\varepsilon f)^3\sin^2\Theta\;d\Theta.$$

Пренебрегая членами, содержащими $\varepsilon$ во второй степени и в степени выше второй, получим

$$M=8\pi a^3\mu\omega+\varepsilon 2\pi a^3\mu\sum_{n=1}^{\infty}C_n(n+2)\int_0^{\pi}\sin^2\Theta . P_n^1(\cos\Theta)\;d\Theta.$$

---

Е. Г. САДОВНИКОВ

## О ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛАХ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y^1=f\left(\frac{y^n}{x^m}\right), \tag{1}$$

где $n$ и $m$—натуральные числа.

Предположим, что функция $f(z)$ непрерывна вместе с производной всюду, кроме конечного числа точек $z_1, z_2, \ldots z_n$, в которых $f(z)$ имеет двусторонние бесконечные разрывы. Пусть начало координат является единственной особой точкой уравнения (1).

Мы рассматриваем вопрос о наличии предельных циклов уравнения (1). Так как начало координат является единственной особой точкой уравнения (1), то предельные циклы этого уравнения должны содержать внутри себя начало координат.

Если $n=m$, то, очевидно, уравнение (1) является однородным и не может иметь предельных циклов, так как его интегральные кривые подобны с центром подобия в начале координат. Будем предполагать, что числа $n$ и $m$ не равны между собой и не имеют общего множителя, в противном случае отношение $\frac{y^n}{x^m}$ можно представить как степень. Если при этом одно из чисел четно, то рассматривая все возможные случаи, мы убеждаемся, что существует интегральная кривая уравнения, одним концом входящая в начало координат, а другим концом удаляющаяся в бесконечность.

Если бы существовал предельный цикл уравнения (1), то он необходимо пересекался бы с указанной интегральной кривой и, следовательно, в точках отличных от начала координат, нарушалось бы условие единственности решения уравнения (1).

Предположим теперь, что $m$ и $n$—нечетные числа. Будем предполагать, что уравнение $f(k)+\frac{1}{k}=0$ (2), не имеет корней $k\neq 0$, а ось ординат не является изоклиной нуля. Сравнивая интегральные кривые уравнения (1) с кривыми

$$\frac{y^{n+1}}{n+1}+\frac{x^{m+1}}{m+1}=c.$$

мы можем показать, что уравнение (1) не имеет предельных циклов, в противном случае уравнение (2) имело бы корни $k\neq 0$. Результат будет справедливым и при более общих условиях.

Пусть функция $f(z)$ имеет конечное число точек экстремума. Предположим, что $k_1$ есть самый правый положительный корень уравнения (2), а $k_2$—самый левый отрицательный корень уравнения (2). Если предположить, что в промежутке $(0, k_1+a)$, где $a$—положительное число, функция $f(z)+\frac{1}{z}$ не положительна, а в промежутке $(k_2—a, 0)$ функция

$f(z)+\frac{1}{z}$ не отрицательна, то уравнение (1) не имеет предельных циклов.


**Литература:**

1. **Немыцкий В. В., Степанов В. В.** Качественная теория дифференциальных уравнений.


---


Е. Г. САДОВНИКОВ


# ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ОСОБЫХ ТОЧЕК ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В работе рассматривается уравнение

$$y'=f(x,y)\, f_1\left(\frac{yf_3(x,y)}{x}\right)\cdot f_2\left(\frac{yf_4(x,y)}{x}\right). \tag{1}$$

Предполагается, что выполнены следующие условия:

1) $f(x,y)$ — непрерывно дифференцируемая положительная функция;

2) $f_3(x,y)$ и $f_4(x,y)$ — непрерывно дифференцируемые функции, не равные нулю при $y\neq 0$;

3) функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ непрерывны вместе с производными первого порядка за исключением конечного числа точек $z_1, z_2, \dots z_n$, в которых они имеют двусторонние бесконечные разрывы, причем в окрестности точек разрыва функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ монотонны справа и слева;

4) имеется конечное число изоклин бесконечности;

5) начало координат является единственной особой точкой уравнения (1).

Метод исследования основан на рассмотрении линий $\frac{yf_3(x,y)}{x}=c$.

Если $f_3(0,0)\neq 0$ и $f_4(0,0)\neq 0$, то мы рассматриваем уравнение.

$$f(0,0)\cdot f_1(kf_3(0,0))\cdot f_2(kf_4(0,0))-k=0. \tag{2}$$