му интегральных уравнений к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\frac{1}{\lambda}\nu^k_\rho + \sum_{l=0}^{n} \nu^l_\rho A_{kl} + \sum_{l=0}^{n} \nu_z^l B_{kl} = f^k_\rho;$$

$$\frac{1}{\lambda}\nu^k_z + \sum_{l=0}^{n} \nu^l_\rho C_{kl} + \sum_{l=0}^{n} \nu^l_z D_{kl} = f^k_z.$$

Коэффициенты этих уравнений получены при помощи параболической формулы приближенного интегрирования при разбиении участка $h=\pi$ на 18 частей и $\mu=0{,}3$. При этом значения $L_{ij}(\gamma_k,\gamma_l)$ для $l=k$ вычислены приближенно при $\Delta\gamma=0{,}5°$.

В случае симметричной относительно плоскости $\gamma=\frac{\pi}{2}$ нагрузке $\nu^l_\rho=\nu_\rho^{n-l}$ и $\nu^l_z=-\nu_z^{n-l}$. Таким образом получим систему 20 уравнений с 20 неизвестными ν_i^l,

Эти уравнения проверены на задаче о шаре, нагруженном равномерно распределенной нагрузкой. Наибольшая ошибка при этом составила 20% для значений f^k_i близких к нулю. В остальных точках ошибка не превышает 3,4%.

Е. П. ТРЕТЬЯК

УСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ, ВЫЗВАННОЕ ВРАЩЕНИЕМ СФЕРЫ С НЕБОЛЬШИМИ ИСКРИВЛЕНИЯМИ

Рассмотрим движение вязкой несжимаемой жидкости, вызванное медленным вращением погруженной в жидкость сферы с небольшими искривлениями около своего диаметра, причем угловая скорость постоянна и равна ω. Радиус сферы возьмем в виде

$$R=a+a\varepsilon f(\Theta):$$

где ε — малый параметр, а $f(\Theta)$ — функция, характеризующая искривление сферы. Будем считать число Рейнольдса малым, т. е. будем предполагать вращение сферы происходящим достаточно медленно. Вследствие малости числа Рейнольдса в первых трех уравнениях движения вязкой жидкости, записанных в сферических координатах, можно отбросить левые части. Получившимся уравнениям можно удовлетворить положив, что v_r и v_Θ тождественно равны нулю, давление есть постоянная величина, а v_φ зависит только от r и Θ, причем функция $v(r, \Theta)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \Theta^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{\operatorname{ctg}\Theta}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \Theta}-\frac{v}{r^2\sin^2\Theta}=0 \qquad (1)$$

и граничным условиям

$$v\Big|_{r=R}=\omega R\sin\Theta\ ; \qquad v\Big|_{r=\infty}=0.$$

Сделаем замену переменной

$$r=\rho a\ (1+\varepsilon f)$$

и введем безразмерную функцию

$$u=\frac{v}{a\omega}.$$

Если отбросить члены, содержащие ε во второй степени и в степенях выше второй, то уравнение движения жидкости (1) и граничные условия в новых переменных будут иметь вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \Theta^2}-\frac{2f'}{\rho}\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial \rho\partial \Theta}+\left(\frac{2}{\rho}-\frac{f''+f'\operatorname{ctg}\Theta}{\rho}\varepsilon\right)\frac{\partial u}{\partial \rho}+$$

$$+\frac{\operatorname{ctg}\Theta}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial \Theta}-\frac{u}{\rho^2\sin^2\Theta}=0. \qquad (2)$$

$$u\Big|_{\rho=1}=(1+\varepsilon f)\sin\Theta; \qquad u\Big|_{\rho=\infty}=0.$$

Решение уравнения (2) ищем в виде

$$u=u_0+\varepsilon u_1.$$

Для u_0 уравнение и граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial \Theta^2}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial u_0}{\partial \rho}+\frac{\operatorname{ctg}\Theta}{\rho^2}\frac{\partial u_0}{\partial \Theta}-\frac{u_0}{\rho^2\sin^2\Theta}=0\ ;$$

$$u_0\Big|_{\rho=1}=\sin\Theta; \qquad u_0\Big|_{\rho=\infty}=0.$$

Известно, что решение этого уравнения записывается так

$$u_0=\frac{\sin\Theta}{\rho^2}.$$

Для u_1 уравнение и граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial\Theta^2}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial u_1}{\partial\rho}+\frac{\operatorname{ctg}\Theta}{\rho^2}\frac{\partial u_1}{\partial\Theta}-\frac{u_1}{\rho^2\sin^2\Theta}=$$

$$=-\frac{6f'\cos\Theta}{\rho^4}-\frac{2f''\sin\Theta}{\rho^4}; \qquad (3)$$

$$u_1\Big|_{\rho=1}=f\sin\Theta; \qquad u_1\Big|_{\rho=\infty}=0.$$

Частным решением уравнения (3) является функция

$$u_{12}=-\frac{2f\sin\Theta}{\rho^2}.$$

Решение однородного уравнения, соответствующего неоднородному уравнению (3), ищем в виде

$$u_{11}(\rho,\Theta)=x(\rho)y(\Theta).$$

Для определения x и y получаем уравнения

$$\rho^2x''+2\rho x'-kx=0; \qquad (4)$$

$$y''+\operatorname{ctg}\Theta y'+y\left(k-\frac{1}{\sin^2\Theta}\right)=0\ . \qquad (5)$$

Решив уравнения (4) и (5), найдем общее решение уравнения (3)

$$u_1=\sum_{n=1}^{\infty}P^1_n(\cos\Theta)\left[\frac{C_n}{\rho^{n+1}}+C_{1n}\rho^{n+1}\right]-\frac{2f\sin\Theta}{\rho^2};$$

где $n(n+1)=k$, а P^1_n — присоединенный полином Лежандра. Для того чтобы $u_1\to 0$ при $\rho\to\infty$ необходимо $C_{1n}=0$. Из условия

$$u_1\Big|_{\rho=1}=f(\Theta)\sin\Theta$$

находим коэффициенты C_n. Это коэффициенты разложения функции

$$F(\Theta)=3f(\Theta)\cdot\sin\Theta$$

по присоединенным полиномам Лежандра

$$C_n=\frac{3(2n+1)}{2n(n+1)}\int_0^{\pi}f(\Theta)\sin^2\Theta\cdot P''_n(\cos\Theta)\,d\Theta. \qquad (6)$$

Возвращаясь к прежним переменным, получим решение уравнения (1)

$$v(r,\Theta)=\frac{a^3\omega\cdot\sin\Theta}{r^2}+\varepsilon\frac{a^3\omega}{r^2}\sum_{n=1}^{\infty}C_n\left(\frac{a}{r}\right)^{n-1}P_n^1(\cos\Theta);$$

где C_n определяются из равенства (6).

Для поддержания вращения сферы необходимо к ней приложить вращающий момент M.

$$P_{r\varphi}=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}\right)\Bigg|_{r=a+a\varepsilon f}=-3\mu\omega\sin\Theta-\varepsilon\mu\omega\Bigg[-9f\sin\Theta+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}C_n(n+2)\,P^1_n(\cos\Theta)\Bigg].$$

Здесь $P_{r\varphi}$ — составляющая тензора напряжений, μ—кинематический коэффициент вязкости.

$$M=-2\pi a^3\int_0^{\pi}P_{r\varphi}(1+\varepsilon f)^3\sin^2\Theta\,d\Theta.$$

Пренебрегая членами, содержащими ε во второй степени и в степени выше второй, получим

$$M=8\pi a^3\mu\omega+\varepsilon 2\pi a^3\mu\sum_{n=1}^{\infty}C_n(n+2)\int_0^{\pi}\sin^2\Theta\,.P_n^1(\cos\Theta)\,d\Theta.$$

Е. Г. САДОВНИКОВ

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛАХ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y^1=f\left(\frac{y^n}{x^m}\right), \qquad (1)$$

где n и m—натуральные числа.

Предположим, что функция $f(z)$ непрерывна вместе с производной всюду, кроме конечного числа точек $z_1, z_2, \dots z_n$, в ко-