при отрицательных и достаточно больших по абсолютной величине $y_2=y(x_2)$, тогда система (1) имеет предельный цикл.

Следствие 2. Система (1) имеет предельный цикл, если $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условия 1), 2), 5) теоремы 2 и условию

$$\lim_{x\to+\infty}[-f(x)]=\pm\infty.$$

Литература:

1. **Н. Н. Красовский.** Об устойчивости решений системы двух дифференциальных уравнений. ПММ, т. XVII, в. 6, 1952.

2. **Е. И. Железнов.** Некоторые достаточные условия существования предельных циклов. Известия высших учебных заведений. Математика № 1 (2), 1958.

А. А. КАЛИНИН

ПРЯМОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ШАРА

Интегральные уравнения второй краевой задачи теории упругости, полученные методом бигармонических потенциалов, для тела вращения в цилиндрических координатах имеют вид:

$$\nu_{io}+\frac{1-2\mu}{4\pi(1-\mu)}\eta\int_S\Sigma\nu_jM_{ij}ds=\frac{F_i}{2\pi G}\eta;\ i,j=\rho,t,z.$$

В случае осесимметричной задачи с меридиональной нагрузкой плотности ν_j бигармонического потенциала простого слоя и функции F_i не зависят от координаты Θ. Отбросив уравнения кручения, получим систему уравнений:

$$\nu_{\rho o}+\frac{1-2\mu}{4\pi(1-\mu)}\eta\int_S(\nu_\rho M_{\rho\rho}+\nu_z M_{\rho z})\,ds=\frac{F_\rho}{2\pi G}\eta;$$

$$\nu_{zo}+\frac{1-2\mu}{4\pi(1-\mu)}\eta\int_S(\nu_\rho M_{z\rho}+\nu_z M_{zz})\,ds=\frac{F_z}{2\pi G}\eta.$$

Здесь $M_{i\rho}=m_{i\rho}\cos\Theta+m_{it}\sin\Theta;\qquad M_{iz}=m_{iz};$

$$m_{ij}=\frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{3}{1-2\mu}\beta_{io}\beta_{jo}+\delta_{ij}\right)\cos\psi+\alpha_{jo}\beta_{io}-\alpha_{io}\beta_{jo}\right].$$

Введя сферические координаты R, γ, ϑ для шара и выполнив интегрирование по Θ, получим систему интегральных уравнений

$$\nu_{i0}+\frac{1-2\mu}{4\pi(1-\mu)}\eta\int\limits_0^{\pi}\Sigma\nu_j L_{ij}d\gamma=\frac{F_i}{2\pi G}\eta;\ i,\ j=\rho,\ z.$$

Здесь $L_{ij}=R^2\sin\gamma\int\limits_0^{2\pi}M_{ij}d\Theta$.

Ядра L_{ij} представляют собой функции полных эллиптических интегралов первого и второго рода $K(k)$ и $E(k)$, где

$$k^2=\frac{2\sin\gamma_o\sin\gamma}{1+\sin\gamma_o\sin\gamma-\cos\gamma_o\cos\gamma}.$$

В точке $\gamma=\gamma_0$ ядра $L_{ij}=L_{ij}(\gamma_0,\ \gamma)$ имеют особенности.
В случае $\gamma_0=0$

$$\lim_{\gamma\to\gamma_0}L_{\rho\rho}=0;\ \lim_{\gamma\to\gamma_0}L_{\rho z}=0;\ \lim_{\gamma\to\gamma_0}L_{z\rho}=-\infty;$$
$$\lim_{\gamma\to\gamma_0}L_{zz}=-\pi.$$

В случае $\gamma_0\neq0$.

$$\lim_{\gamma\to\gamma_0}L_{\rho\rho}=\frac{3}{1-2\mu}\sin^2\gamma_0-\lim_{K^2\to1}3(K-2);$$

$$\lim_{\gamma\to\gamma_0}L_{zz}=-\frac{3}{1-2\mu}\sin^2\gamma_0-\lim_{K^2\to1}K.$$

Ядра $L_{\rho z}$ и $L_{z\rho}$ в точке $\gamma=\gamma_0$ имеют разрыв второго рода. Разложив их на симметричные и антисимметричные части, дающие сингулярные интегралы, и, отбросив последние, получим

$$\lim_{\gamma\to\gamma_0}L_{\rho z}=\frac{3}{1-2\mu}\sin\gamma_0\cos\gamma_0-\mathrm{ctg}\gamma_0\lim_{K^2\to1}(K-3);$$

$$\lim_{\gamma\to\gamma_0}L_{z\rho}=\frac{3}{1-2\mu}\sin\gamma_0\cos\gamma_0-\mathrm{ctg}\gamma_0\lim_{K^2\to1}(K+1).$$

Поскольку в точке $\gamma=\gamma_0$ ядра $L_{\rho\rho}L_{zz}$ и симметричные части ядер $L_{\rho z}$ и $L_{z\rho}$ имеют логарифмические особенности, то к ним можно применить квадратурные формулы и свести систему интегральных уравнений к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\frac{1}{\lambda}\nu^k_\rho + \sum_{l=0}^{n} \nu^l_\rho A_{kl} + \sum_{l=0}^{n} \nu_z^l B_{kl} = f^k_\rho;$$

$$\frac{1}{\lambda}\nu^k_z + \sum_{l=0}^{n} \nu^l_\rho C_{kl} + \sum_{l=0}^{n} \nu^l_z D_{kl} = f^k_z.$$

Коэффициенты этих уравнений получены при помощи параболической формулы приближенного интегрирования при разбиении участка $h=\pi$ на 18 частей и $\mu=0,3$. При этом значения $L_{ij}(\gamma_k,\gamma_l)$ для $l=k$ вычислены приближенно при $\Delta\gamma=0,5°$.

В случае симметричной относительно плоскости $\gamma=\frac{\pi}{2}$ нагрузке $\nu^l_\rho=\nu_\rho^{n-l}$ и $\nu^l_z=-\nu_z^{n-l}$. Таким образом получим систему 20 уравнений с 20 неизвестными ν_i^l,

Эти уравнения проверены на задаче о шаре, нагруженном равномерно распределенной нагрузкой. Наибольшая ошибка при этом составила 20% для значений f^k_i близких к нулю. В остальных точках ошибка не превышает 3,4%.

Е. П. ТРЕТЬЯК

УСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ, ВЫЗВАННОЕ ВРАЩЕНИЕМ СФЕРЫ С НЕБОЛЬШИМИ ИСКРИВЛЕНИЯМИ

Рассмотрим движение вязкой несжимаемой жидкости, вызванное медленным вращением погруженной в жидкость сферы с небольшими искривлениями около своего диаметра, причем угловая скорость постоянна и равна ω. Радиус сферы возьмем в виде

$$R=a+a\varepsilon f(\Theta):$$

где ε — малый параметр, а $f(\Theta)$ — функция, характеризующая искривление сферы. Будем считать число Рейнольдса малым, т. е. будем предполагать вращение сферы происходящим достаточно медленно. Вследствие малости числа Рейнольдса в первых трех уравнениях движения вязкой жидкости, записанных в сферических координатах, можно отбросить левые части. Получившимся уравнениям можно удовлетворить поло-