В. С. ДЕНИСОВ

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается система двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=y+f(x)\quad \frac{dy}{dt}=g(x) \tag{1}$$

и даются достаточные условия существования предельного цикла, окружающего три особые точки системы (1), расположенные на оси абсцисс. Теоремы 1 и 2 являются обобщением теоремы Е. И. Железнова [2] на случай, когда система имеет три особых точки. Функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям, обеспечивающим единственность решения при любых начальных значениях (x, y) и непрерывны.

Теорема 1. Пусть $x_1<0$, $x_2>0$ и выполнены следующие условия:

1. $g(x)>0$ при $0<x<x_2, -\infty<x<x_1$

   $g(x)<0$ при $x_1<x<0, \quad x_2<x<+\infty$

   $f(x)>0$ при $0<x<x_2, \quad x_3<x<x_1$, где $x_2<x_1$

   $f(x)<0$ при $x_1<x<0, \quad x_2<x<x_4$, где $x_4>x_2$.

2. Существует такое число $c>0$ и M, что

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\left(-f(x)+c\int_{x_2}^{x}-g(x)dx\right)<M$$

3.

$$\underline{\lim_{x\to-\infty}}\left(f(x)+\int_{x_1}^{x}\frac{g(x)}{y_1+f(x)}dx\right)=-\infty$$

при положительных и достаточно больших $y_1=y(x_1)$.

4.

$$\underline{\lim_{x\to+\infty}}\left(f(x)+\int_{x_2}^{x}\frac{g(x)}{y_2+f(x)}dx\right)=+\infty$$

при отрицательных и достаточно больших по абсолютной величине $y_2=y(x_2)$.

5.

$$\int_{x_1}^{x_1} -g(x)\,dx > \int_{x_1}^{0} -g(x)\,dx; \quad \int_{x_1}^{x_1} -g(x)\,dx > \int_{x_1}^{0} -g(x)\,dx \ ,$$

тогда система (1) имеет предельный цикл, окружающий три особые точки $(x_1, 0)$; $(0,0)$; $(x_2, 0)$.

Доказательство проводится методом построения кольцевой области, внутрь которой не входит ни одна траектория. Из условий 1) и 2) теоремы следует существование траектории, уходящей в бесконечность при $t \to +\infty$ в полуплоскости $x > x_2$, причем эта траектория начинается в точке с положительной ординатой. Доказательство этого факта дано Н. Н. Красовским [1] для системы (1) с одной особой точкой, которое переносится на рассматриваемый нами случай. Отметим, что для системы (1) отсутствуют траектории, вдоль которых $x(t) \to a$ (const), $y(t) \to \pm\infty$ при $t \to \pm\infty$. Среди траекторий, уходящих при $t \to +\infty$ в бесконечность в полуплоскости $x > x_2$ можно выбрать траекторию, которая при $t \to -\infty$ пересечет положительную полуось оси ординат, обозначим ее $y(A, t)$, где $A(x_2, y_A)$ и $y_A > 0$. В силу поля направлений, единственности решения и отсутствия траекторий, вдоль которых $x(t) \to a$, $y(t) \to +\infty$ при $t \to -\infty$ она пересечет прямую $x = x_1$ в точке $B(x_1, y_B)$.

Из условия 3) теоремы следует, что траектория, начинающаяся в точке $C(x_1, y_c)$, где $y_c > y_B$ и достаточно большое при $t \to -\infty$ пересекает кривую $y = -f(x)$ и затем в силу поля направлений прямую $x = x_1$ в точке D с отрицательной ординатой.

Рассмотрим траекторию, начинающуюся в точке $E(x_1, y_E)$, где $y_E < y_D$, такую, чтобы она пересекала ось OY в точке с отрицательной ординатой и затем прямую $x = x_2$ в точке $F(x_2, y_F)$. Из условия 4) теоремы следует, что траектория, начинающаяся в точке $M(x_2, y_M)$, где $y_M < y_F$ и достаточно большое по абсолютной величине, пересекает при $t \to -\infty$ кривую $y = -f(x)$ и затем прямую $x = x_1$ в точке $N(x_1, y_N)$, где $y_N > 0$, при этом в силу единственности $y_N < y_A$. В силу поля направлений и единственности решения ни одна траектория не входит в контур, состоящий из вертикальных отрезков BC, DE, FM, NA и частей траекторий, рассмотренных выше.

Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V(x,y)=\frac{1}{2}y^2+\int_{x_1}^{x}-g(x)\,dx$$

Обозначим

$$C_1=\int_{x_1}^{0}-g(x)dx \; C_2=\min\left\{\int_{x_1}^{x_4}-g(x)\,dx\;;\;\int_{x_1}^{x_3}-g(x)dx\right\}$$

Кривая уровня $V=C$, где $C_1<C<C_2$, ограничивает область, которая содержит внутри себя три особые точки, и из которой не выходит ни одна траектория.

Доказано, что кривая уровня $V=C$ лежит внутри контура $ABCDEFMNA$.

Таким образом, существует кольцевая область, расположенная между контуром $ABCDEFMNA$ и кривой уровня $V=C$, внутрь которой не входит ни одна траектория. Следовательно система (1) имеет по крайней мере один предельный цикл.

Следствие 1. Система (1) имеет предельный цикл, если $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям 1), 2), 5) и выполнено

$$\varliminf_{x\to\pm\infty}[-f(x)]=\mp\infty$$

Теорема 2. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условию 1), 5) теоремы 1 и следующим:

2. Существует такое $c>0$ и постоянное M, что

$$\varliminf_{x\to-\infty}\quad[-f(x)+c\int_{x_1}^{x}g(x)dx)>]-M$$

3.

$$\varliminf_{x\to-\infty}\;[f(x)+\int_{x_1}^{x}\frac{g(x)}{y_1+f(x)}dx]\;=-\infty$$

при положительных и достаточно больших $y_1=y(x_1)$.

4.

$$\varliminf_{x\to\infty}\;\left[f(x)\int_{x_1}^{x}\frac{g(x)}{y_2+f(x)}dx\right]=\infty$$

при отрицательных и достаточно больших по абсолютной величине $y_2=y(x_2)$, тогда система (1) имеет предельный цикл.

Следствие 2. Система (1) имеет предельный цикл, если $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условия 1), 2), 5) теоремы 2 и условию

$$\lim_{x \to +\infty} [-f(x)] = \pm \infty.$$

Литература:

1. **Н. Н. Красовский.** Об устойчивости решений системы двух дифференциальных уравнений. ПММ, т. XVII, в. 6, 1952.

2. **Е. И. Железнов.** Некоторые достаточные условия существования предельных циклов. Известия высших учебных заведений. Математика № 1 (2), 1958.

А. А. КАЛИНИН

ПРЯМОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ШАРА

Интегральные уравнения второй краевой задачи теории упругости, полученные методом бигармонических потенциалов, для тела вращения в цилиндрических координатах имеют вид:

$$\nu_{io}+\frac{1-2\mu}{4\pi(1-\mu)}\,\eta\int_S \Sigma\nu_j M_{ij}ds=\frac{F_i}{2\pi G}\,\eta;\quad i,j=\rho,\ t,\ z.$$

В случае осесимметричной задачи с меридиональной нагрузкой плотности ν_j бигармонического потенциала простого слоя и функции F_i не зависят от координаты Θ. Отбросив уравнения кручения, получим систему уравнений:

$$\nu_{\rho o}+\frac{1-2\mu}{4\pi(1-\mu)}\,\eta\int_S(\nu_\rho M_{\rho\rho}+\nu_z M_{\rho z})\,ds=\frac{F_\rho}{2\pi G}\,\eta\ ;$$

$$\nu_{zo}+\frac{1-2\mu}{4\pi(1-\mu)}\,\eta\int_S(\nu_\rho M_{z\rho}+\nu_z M_{zz})\,ds=\frac{F_z}{2\pi G}\,\eta.$$

Здесь $\quad M_{i\rho}=m_{i\rho}\cos\Theta+m_{it}\sin\Theta;\qquad M_{iz}=m_{iz};$

$$m_{ij}=\frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{3}{1-2\mu}\beta_{io}\beta_{jo}+\delta_{ij}\right)\cos\psi+\alpha_{jo}\beta_{io}-\alpha_{io}\beta_{jo}\right].$$