функция, которая имеет непрерывные частные производные, удовлетворяющие условиям:

$$1.\ \frac{\partial F}{\partial x_к} > 0 \qquad (k=1, \ldots, n).$$

$$2.\ x_{к+1}\frac{\partial F}{\partial x_{к+1}} < x_к \frac{\partial F}{\partial x_к} \qquad \text{при } x_{к+1} < x_к.$$

тогда

$$F(|\lambda_1|, \ |\lambda_2|, \ldots |\lambda_n|) \leqslant F(s_1, \ s_2, \ldots, s_n),$$

где

$$\lambda_j = \lambda_j\ (A) \quad s_j = \lambda_j(\sqrt{A A^*}) \qquad j=1, 2, \ldots n.$$

причем знак равенства имеет здесь место в том и только в том случае, когда

$$|\lambda_j| = s_j \qquad (j=1, 2, \ldots, n).$$

Можно построить ряд функций для получения требуемых оценок, не зависящих от порядка матрицы A следующего вида:

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}\lambda\ (\sqrt{A A^*} \geqslant \min_{0\leqslant n\leqslant n}\lambda\ (A) f(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\lambda_i(A), \max_{1\leqslant i\leqslant n}\lambda_i\sqrt{A A^*},$$

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}\lambda(A)$$

Литература

1. **И. Ц. Гохберг** и **М. Г. Крейн**. «Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве». Москва, 1965.

В. С ДЕНИСОВ

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛАХ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается система двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = y + f(x) \quad \frac{dy}{dt} = g(x) \qquad (1)$$

При выполнении обобщенных условий Гурвица $xf(x)<0$, $xg(x)<0$ при $x\neq 0$, $f(0)=g(0)=0$ исследование системы (1) проведено Н. П. Еругиным, В. А. Плиссом, Н. Н. Красовским и другими. Н. Н. Кушков провел исследование системы (1) при нарушении этих условий. Накладывая на $f(x)$ и $g(x)$ дополнительные условия, он доказал ряд теорем о существовании предельного цикла, окружающего единственную особую точку — начало координат. Предполагая, что система (1) удовлетворяет условиям существования и единственности решения при любых начальных значениях (x, y), нами доказаны теоремы о существовании по крайней мере одного предельного цикла, окружающего три особые точки, расположенные на оси абсцисс. При этом указывается полоса изменения аргумента, в которой находится предельный цикл. Сформулируем две из них.

Теорема 1.

Если выполнены условия:

1. $g(-x)=-g(x)$; $f(-x)=-f(x)$
2. $f(x)>0$ при $x\in(0, x_1)$; $f(x)\geqslant 0$ при $x\in(x_3, x_5)$
$f(x)<0$ при $x\in(x_1, x_3)$, где $0<x_1<x_3<x_5$
3. $g(x)>0$ при $x\in(0, x_1)$; $g(x)<0$ при $x\in(x_1,\infty)$

4. $$\int\limits_{x_1}^{x_3}-g(x)dx\geqslant\left[2+\frac{1}{4M^2}\int\limits_0^{x_1}g(x)\,dx\right]\cdot\int\limits_0^{x_1}g(x)\,dx$$

5. $$\int\limits_{x_3}^{x_4}-g(x)f(x)dx\geqslant 3\int\limits_0^{x_3}g(x)f(x)dx,\quad \text{где}\quad x_4\in(x_3,x_5)$$

6. $$\int\limits_{x_3}^{x_5}-g(x)dx\geqslant 4M^2,\quad \text{где}\quad M=\max_{0\leqslant x\leqslant x_5}|f(x)|$$

7. Существует такой $x_2\in(x_1, x_3)$ и существует такой $x_2\in(-x_3, -x_1)$, что выполнены неравенства

$$\int\limits_{-x_1}^{x_2}-g(x)dx>\int\limits_0^{x_1}g(x)dx\quad\text{и}\int\limits_{-x_1}^{x_2}-g(x)dx>\int\limits_0^{x_1}g(x)dx$$

то тогда в полосе $-x_5\leqslant x\leqslant x_5$ существует предельный цикл системы (1), окружающий три особые точки $(-x_1, 0)$; $(0,0)$; $(x_1, 0)$.

Теорема 2.

Если выполнены условия 1), 2), 3), 4), 5), 7) теоремы 1 и

а) $f^1(x)\leqslant 0$ при $x\in(x_4, x_5)$

б) $$\int\limits_{x_4}^{x_5}-g(x)\,dx>2M^2+2Mf(x_4)-\frac{f^2(x)}{2},\quad M=\max_{0\leqslant x\leqslant x_5}|f(x)|$$

где $x_4 > x_3$ таково, что

$$\int_{x_3}^{x_4} -g(x) f(x) dx = 3 \int_0^{x_3} g(x) f(x) dx$$

в)
$$\int_{x_5}^{x} g(x) dx > f^2(x) \qquad \text{при } x \in (x_1, x_5)$$

то тогда в полосе $-x_5 \leqslant x \leqslant x_5$ существует предельный цикл, окружающий три особые точки $(-x_1, 0)$; $(0, 0)$; $(x_1, 0)$.

Доказательство теорем проводится методом построения кольцевых областей, внутри которых нет особых точек, и ни одна траектория системы (1) не входит в эти кольцевые области. Построение внешнего контура их проводится с использованием результатов и методики исследования работы [1], при этом доказывается, что траектории данной системы пересекают его изнутри наружу. Для построения внутреннего контура кольцевых областей используется известная для системы (1) функция Ляпунова

$$V(x,y) = \frac{1}{2} y^2 + \int_{x_1}^{x} -g(x)\, dx$$

Далее доказывается, что при выполнении условий теорем существует кривая уровня $V=C$, ограничивающая область $V<C$, внутри которой содержатся три особые точки системы (1) $(-x_1, 0)$; $(0; 0)$; $(x_1, 0)$, расположенные на оси абсцисс. При этом кривая уровня $V=C$ целиком лежит внутри области, ограниченной внешним контуром, не имея с ним общих точек пересечения. Траектории системы (1) входят в область $V<C$ при $t \to +\infty$. Построенная кольцевая область между кривой уровня $V=C$ и внешним контуром такова, что внутри области нет особых точек, и траектории системы не входят в нее. Тогда существует в этом кольце по крайней мере один предельный цикл. Из расположения области кольца видно, что он окружает три особые точки системы (1).

Литература:

1. **Н. Н. Кушков.** Некоторые теоремы о предельных циклах для системы нелинейных колебаний. У. М. Н. том XIII, вып. 2 (80), 1958.